

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

A. HILALI

A. WAZNER

## **Un algorithme de calcul de l'invariant de Katz d'un système différentiel linéaire**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 36, n° 3 (1986), p. 67-81

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1986\\_\\_36\\_3\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_3_67_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# UN ALGORITHME DE CALCUL DE L'INVARIANT DE KATZ D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE

par A. HILALI et A. WAZNER

## 1. Introduction.

On considère un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 :

$$\frac{dy}{dx} = M(x)y \quad (S)$$

où  $M$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbf{C}((x))$ , le corps des séries formelles :

$$M(x) = \frac{A(x)}{x^q} = \frac{1}{x^q} \sum_0^{+\infty} A_k x^k \quad A_0 \neq 0 \quad (1)$$

avec  $q$  un entier supérieur ou égal à 1, les  $A_k : k = 0, 1, \dots$  sont des matrices à coefficients dans  $\mathbf{C}$ . On sait par le lemme du vecteur cyclique [2] réduire le système (S) à une seule équation différentielle scalaire d'ordre  $n$  [4]. Ce procédé permet d'appliquer sur le système (S) tous les critères déjà connus sur les équations différentielles scalaires et d'attribuer ainsi au système (S) des invariants (voir [9]) qui servent à mesurer l'irrégularité au point singulier (supposé ici à l'origine). B. Malgrange [9] a démontré que l'indice d'irrégularité associé à l'équation différentielle est indépendant du choix du vecteur cyclique. Cependant du point de vue pratique, on constate que la méthode est d'un maniement lourd et coûteux (voir des exemples dans [4]) surtout que ces invariants sont uniquement déterminés par la connaissance des valuations des coefficients de l'équation différentielle obtenue par la méthode. D'où l'intérêt de travailler directement sur le système.

*Mots-clés* : Points singuliers – Invariant de Moser – Invariant de Katz – Vecteur cyclique.

Le calcul explicite de ces invariants est en général connu pour une équation différentielle scalaire, tandis que pour un système différentiel (S) nous sommes amenés à construire des algorithmes de "Réduction" qui conduisent au bout d'un certain nombre de pas au calcul de ces invariants. On s'intéresse dans cet article au calcul de l'invariant de N. Katz. Ce travail constitue une suite à l'algorithme de "Réductibilité" développé dans [5] et [6]. Ensuite partant d'un système écrit sous une forme irréductible (au sens de Moser) nous construisons un algorithme permettant le calcul de cet invariant sans l'utilisation de vecteur cyclique. Nous rappelons brièvement cette méthode :

## 2. Méthode du vecteur cyclique.

On pose

$$Y_0(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$$

un vecteur à  $n$  composantes où les  $\lambda_i(x)$  sont des polynômes arbitraires de degrés  $\leq n - 1$  [12]. La récurrence :

$$Y_i = Y'_{i-1} + Y_{i-1} M$$

définit une matrice  $Q$  carrée d'ordre  $n$  dont les lignes sont :

$$Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}.$$

DEFINITION 1 [4]. — *On dira que le vecteur  $Y_0$  est "cyclique" si la matrice  $Q$  est inversible.*

(Pour une autre méthode de construction de vecteur cyclique voir [7].)

Dans ce cas on pose  $T = Q^{-1}$  et le changement de variables :

$$y(x) = T(x) z(x) \quad (2)$$

transforme (S) en un système dont la matrice est sous une forme compagnon :

$$C = T^{-1} M T - T^{-1} T' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \cdot & & \searrow & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & 1 \\ a_n & & & & a_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Les  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) sont naturellement les coefficients de l'équation différentielle qui correspond au système (S) obtenue par l'intermédiaire du vecteur cyclique  $Y_0$ . On notera  $E_S(Y_0)$  cette équation :

$$E_S(Y_0) : \frac{d^n y}{dx^n} - \sum_{k=1}^n a_k(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0.$$

DEFINITION 2. — On dira que deux matrices  $M$  et  $N$  appartenant à  $M_n(\mathbf{C}((x)))$  sont équivalentes (ou que leurs systèmes différentiels sont équivalents) s'il existe  $T$  appartenant à  $Gl(n, \mathbf{C}((x)))$  telle que :

$$M = T^{-1} N T - T^{-1} \frac{dT}{dx}.$$

Dans la suite on supposera que les  $a_k$  sont de la forme :

$$a_k(x) = x^{-\lambda_k} b_k(x) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

où les  $\lambda_k$  désignent l'ordre du pôle des  $a_k$  au sens large, avec  $b_k(0) \neq 0$  (on prendra  $\lambda_k = -\infty$  si  $a_k \equiv 0$ ).

### 3. Invariant de Moser.

J. Moser [11] associe à tout système (S), les rationnels :

$$m(M) = q - 1 + \text{rang}(A_0)/n \geq 0 \quad (5)$$

avec :  $m(M) = 0$  si  $q - 1 + \text{rang}(A_0)/n \leq 0$

$$\mu(M) = \inf_{T \in Gl(n, \mathbf{C}((x)))} (m(T^{-1} M T - T^{-1} dT/dx)) \quad (6)$$

où  $Gl(n, \mathbf{C}((x)))$  désigne le groupe des matrices inversibles à coefficients dans  $\mathbf{C}((x))$ .

DEFINITION 3. — On dira que le système (S) est irréductible au sens de Moser (ou M-irréductible), si  $m(M) = \mu(M)$ .

Dans le cas où  $m(M) > 1$ , nous avons donné dans [5] et [6] un algorithme qui construit, en un nombre fini de pas, une transformation permettant de mettre (S) sous une forme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{q^*}} \left( \sum_0^{+\infty} A_k^* x^k \right) y \quad (S^*)$$

où  $q^*$  et  $r^* = \text{rang}(A_0^*)$  sont les plus petites valeurs de  $q \geq 1$  et  $r$  obtenues en appliquant à (S) toutes les transformations de  $Gl(n, \mathbf{C}((x)))$ . Dans le cas où  $x = 0$  est une singularité régulière, l'algorithme s'arrête lorsque  $m(M) \leq 1$ . Cet algorithme donne la caractérisation suivante :

$x = 0$  est une singularité régulière si et seulement si :

$$\mu = q^* - 1 + r^*/n \leq 1.$$

### 3.1 Calcul de l'invariant de Moser à partir d'un vecteur cyclique.

Dans le cas d'une équation différentielle scalaire de la forme  $E_S(Y_0)$ , J. Moser (cf. [11] théorème 3 p. 382) a explicité le calcul du nombre  $\mu$ . Pour cela il considère  $p$  le plus petit entier tel que

$$p \geq \frac{\lambda_k}{k} \quad k = 1, 2, \dots, n, \text{ et } p \geq 1 \quad (7)$$

et en notant

$$r_k = \lambda_k - (p-1)k \quad (8)$$

$$r = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (r_k) \quad (9)$$

on a 
$$\mu = p - 1 + r/n.$$

En appliquant ce résultat à l'équation différentielle  $E_S(Y_0)$  on obtient :

**PROPOSITION 1.** — *Si le système (S) est M-irréductible et si la singularité est irrégulière (i.e.  $q \geq 2$ ) alors quel que soit le choix du vecteur cyclique on a :  $p = q$  et  $r = \text{rang}(A_0)$  où  $p$  et  $r$  sont les entiers définis par (7) et (9).*

*Démonstration.* — Soit  $E_S(Y_0)$  l'équation différentielle obtenue à partir du système (S) à l'aide du vecteur cyclique  $Y_0$ . Soit  $C(x)$  sa matrice compagnon définie en (3) et :

$$\frac{dy}{dx} = C(x)y \quad (10)$$

le système différentiel correspondant. Dans [11] J. Moser construit une matrice :

$$x^\beta = \text{diag}(x^{\beta_1}, x^{\beta_2}, \dots, x^{\beta_n}) \quad \beta_i \in \mathbb{Z}$$

qui réduit (10) à une forme M-irréductible :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D(x)}{x^p} y \quad (11)$$

où  $D \in M_n(\mathbf{C}[[x]])$  ( $\mathbf{C}[[x]]$  désigne l'algèbre des séries formelles à coefficients complexes).  $p$  et  $r = \text{rang}(D(0))$  sont les entiers définis en (7) et (9). Or :

$$\frac{D(x)}{x^p} = x^{-\beta} C(x) x^\beta - \frac{\beta}{x} . \quad (12)$$

D'après les relations (3) et (12), les systèmes (S) et (11) sont donc équivalents par la transformation  $S(x) = T(x) x^\beta$ . Comme les deux systèmes sont M-irréductibles on a :

$$q - 1 + \text{rang}(A_0)/n = p - 1 + r/n$$

d'où

$$q = p \quad \text{et} \quad \text{rang}(A_0) = r.$$

#### 4. Invariant de Katz.

N. Katz (cf. [3] pages 190 et 191) associe à tout système (S) un nombre rationnel  $\text{RK} \geq 0$ , tel que si  $Y_0$  est un vecteur cyclique de (S), on a (cf. [2], prop. 1.10 p. 48)

$$\text{RK} = \text{Max} \left( 0, \text{Max}_{1 \leq k \leq n} \left( \frac{\lambda_k - k}{k} \right) \right)$$

d'après (8) on peut encore écrire :

$$RK = \text{Max} \left( 0, p - 2 + \text{Max}_k \left( \frac{r_k}{k} \right) \right).$$

(La singularité régulière est caractérisée ici par la nullité de RK). On sait (cf. [10]) que si le système (S) est M-irréductible et si la matrice résidu  $A_0$  est non nilpotente, alors l'invariant de Katz vaut  $p - 1$ .

Nous supposons donc dans la suite les hypothèses suivantes :

- a) – le système de départ (S) est M-irréductible.
- b) –  $p = q \geq 2$  et  $r = \text{rang}(A_0)$  (cf. proposition 1).
- c) – La matrice  $A_0$  est nilpotente.

### 5. Algorithme de calcul de l'invariant de Katz.

Au système (S), on associe l'expression :

$$f_A(x, \lambda) = x^r \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right)$$

où  $r = \text{rang}(A_0)$  et :

$$A(x) = x^p M(x) = \sum_0^{+\infty} A_k x^k. \quad (13)$$

LEMME 1. –  $f_A(x, \lambda)$  est un polynôme appartenant à  $\mathbf{C}[[x]][\lambda]$  et son développement en  $x$  jusqu'à l'ordre  $k$  dépend seulement des  $k + 2$  premiers termes du développement (13).

En effet  $r$  désignant le rang de  $A(0)$ , il existe  $r$  colonnes de  $A(0)$  linéairement indépendantes. On peut supposer sans changer la généralité que ce sont les  $r$  premières. Soit la matrice :

$$E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$$

le  $i^{\text{ème}}$  élément de sa diagonale vaut 1 si  $i \leq r$  et 0 sinon.

On pose

$$P(x, \lambda) = \left( \lambda I + \frac{A(x)}{x} \right) x^E$$

donc

$$f_A(x, \lambda) = \det(P(x, \lambda)).$$

Les seules expressions polaires de la matrice  $P(x, \lambda)$  sont les  $n - r$  dernières colonnes de  $A_0$ . En ajoutant à ces colonnes une combinaison linéaire adéquate des  $r$  premières colonnes, on ne change pas la valeur du déterminant et on élimine ainsi les termes polaires. Nous noterons :

$$\tilde{P}(x, \lambda) = \sum_0^{+\infty} P_i(\lambda) x^i$$

la matrice obtenue par l'opération décrite ci-dessus.

On remarque que  $P_i(\lambda)$  ne dépend que de  $\lambda$ , de  $A_i$  et de  $A_{i+1}$ .

Notons :

$$C_1(x, \lambda), C_2(x, \lambda), \dots, C_n(x, \lambda)$$

les vecteurs colonnes de la matrice  $\tilde{P}(x, \lambda)$ . Le terme d'ordre  $k$  du développement de  $f_A(x, \lambda)$  en  $x$  est :

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\det(\tilde{P}(x, \lambda))) \tag{14}$$

pris en  $x = 0$ . Or l'expression (14) dépend des dérivés partielles des  $C_i(x, \lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) d'ordres plus petits ou égaux à  $k$ . Donc la valeur de cette expression prise en  $x = 0$  dépend de

$$P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_k(\lambda).$$

Or la donnée des  $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k + 1$ ) détermine les coefficients  $P_i(\lambda)$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) de  $\tilde{P}(x, \lambda)$ . Donc le coefficient d'ordre  $k$  en  $x$  du polynôme  $f_A(x, \lambda)$  dépend seulement des  $k + 2$  premiers coefficients de la matrice  $A(x)$  et de  $\lambda$ .

LEMME 2. — Soient  $M(x) = \frac{A(x)}{x^p}$  et  $N(x) = \frac{B(x)}{x^p}$  où  $A$  et  $B$  appartiennent à  $M_n(\mathbf{C}[[x]])$  et telles que  $\text{rang}(A(0)) = \text{rang}(B(0))$ .

Si  $p > 2$  et s'il existe une transformation  $T$  appartenant à  $Gl((n, \mathbf{C}((x))))$  telle que

$$N = T^{-1} M T - T^{-1} \frac{dT}{dx} \tag{15}$$



alors  $f_A(x, \lambda) = f_B(x, \lambda) + O(x^{p-3})$ .

*Remarque.* — Le lemme 2 montre que si deux matrices, ayant le même ordre polaire et dont les matrices résidus ont même rang, sont équivalentes alors les polynômes  $f_A$  et  $f_B$  ont le même développement en  $x$  jusqu'à l'ordre  $p-3$ . D'après le lemme 1, il suffit de considérer les  $p-1$  premiers termes de  $A(x)$  et  $B(x)$  pour démontrer le lemme 2. Ce résultat est la conséquence d'un lemme dû à Moser :

LEMME 3 [11]. — *Toute matrice  $T$  appartenant à  $Gl(n, \mathbf{C}((x)))$  peut être décomposée de la manière suivante :*

$$T(x) = P(x) x^\alpha Q(x)$$

où

—  $P$  est une matrice polynomiale vérifiant  $\det(P(x)) \equiv 1$

—  $Q(x) = \sum_0^{+\infty} Q_k x^k$  avec  $\det(Q_0) \neq 0$

—  $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$   $\alpha_i \in \mathbf{Z}$

avec

—  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ .

En posant  $T(x) = P(x) x^\alpha Q(x)$  d'après la relation (15) si on note :

$$\begin{aligned} \frac{A^{(1)}}{x} &= P^{-1} \frac{A}{x} P - x^{p-1} P^{-1} \frac{dP}{dx} \\ \frac{B}{x} &= Q^{-1} \frac{A^{(2)}}{x} Q - x^{p-1} Q^{-1} \frac{dQ}{dx} \end{aligned} \quad (16)$$

on a alors :

$$\frac{A^{(2)}}{x} = x^{-\alpha} \frac{A^{(1)}}{x} x^\alpha - x^{p-2} \alpha. \quad (17)$$

Comme  $P$  est un polynôme de déterminant identiquement égal à 1,  $P^{-1}$  est aussi un polynôme. Le terme  $x^{p-1} P^{-1} dP/dx$  est donc de valuation supérieure ou égale à  $p-1$ . Comme on a :

$$\text{rang}(A(0)) = \text{rang}(A^{(1)}(0)) \quad (18)$$

et

$$x^r \det\left(\frac{A(x)}{x} + \lambda I\right) = x^r \det\left(P^{-1} \frac{A(x)}{x} P + \lambda I\right)$$

en vertu de l'égalité (16) et du lemme 1 on a :

$$f_A(x, \lambda) = f_{A(1)}(x, \lambda) + O(x^{p-2}). \tag{19}$$

De la même manière puisque  $Q_0$  est inversible, la matrice  $Q^{-1}$  est dans  $M_n(\mathbf{C}[[x]])$ . En faisant le même raisonnement on trouve

$$\text{rang}(B(0)) = \text{rang}(A^{(2)}(0)) \tag{20}$$

et

$$f_B(x, \lambda) = f_{A(2)}(x, \lambda) + O(x^{p-2}). \tag{21}$$

L'hypothèse du lemme  $\text{rang}(A(0)) = \text{rang}(B(0))$ , et les égalités (17), (18) et (20) entraînent les relations :

$$r = \text{rang}(A^{(1)}(0)) = \text{rang}(A^{(2)}(0))$$

et

$$f_{A(2)}(x, \lambda) = f_{A(1)}(x, \lambda) + O(x^{p-3}) \tag{22}$$

d'où :

$$f_A(x, \lambda) = f_B(x, \lambda) + O(x^{p-3}).$$

Ceci démontre le lemme 2.

D'après les relations (3) et (12), les matrices :

$$\frac{A(x)}{x^p} \quad \text{et} \quad \frac{D(x)}{x^p}$$

sont équivalentes. D'après le lemme 2, si  $p > 2$ , on a :

$$f_A(x, \lambda) = f_D(x, \lambda) + O(x^{p-3}). \tag{23}$$

Or  $f_D(x, \lambda) = x^r \det(x^{p-1} x^{-\beta} C(x) x^\beta - x^{p-2} \beta + \lambda I)$ .

Comme  $x^\beta$  et  $\beta$  commutent entre elles :

$$f_D(x, \lambda) = x^r \det(x^{p-1} C(x) - x^{p-2} \beta + \lambda I)$$

d'où le résultat :

LEMME 4. — Si  $C(x)$  désigne la matrice compagnon obtenue par l'intermédiaire d'un vecteur cyclique d'un système (S) M-irréductible et si  $p > 2$  alors :

$$x^r \det\left(\frac{A(x)}{x} + \lambda I\right) = x^r \det(x^{p-1} C(x) + \lambda I) + O(x^{p-3}).$$

Soit  $q_C(x, \lambda)$  le polynôme  $x^r \det(x^{p-1} C(x) + \lambda I)$  où  $C(x)$  est la matrice définie dans (3) :

on a

$$\begin{aligned} q_C(x, \lambda) &= x^{r+n(p-1)} \det(C(x) + \lambda x^{-p+1} I) \\ &= x^r \lambda^n - \sum_1^n (-1)^k \lambda^{n-k} x^{r+k(p-1)} a_k(x). \end{aligned}$$

Or d'après (4) on a :

$$a_k(x) = x^{-\lambda_k} b_k(x) \text{ avec } b_k(0) \neq 0$$

donc

$$q_C(x, \lambda) = x^r \lambda^n - \sum_1^n (-1)^k x^{r-r_k} \lambda^{n-k} b_k(x) \quad (24)$$

où

$$r = \text{rang}(A(0)) = \text{Max}_k(r_k) = \text{Max}_k(\lambda_k - k(p-1)).$$

DEFINITION. — On appelle  $F_p$  l'application linéaire de  $\mathbf{C}((x))[\lambda]$  dans  $\mathbf{C}((x)) \left[ \frac{d}{dx} \right]$ , espace des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans  $\mathbf{C}((x))$  qui, au polynôme  $x^i \lambda^{n-k}$  associe l'opérateur  $x^{i-k(p-1)} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}$ .

Nous allons dans ce qui suit donner un moyen de calcul de l'invariant de Katz. Pour cela nous distinguerons deux cas :

### 5.1 Cas où $p > r + 2$ .

THEOREME 2. — Soit le système différentiel M-irréductible :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x)}{x^p} Y \quad (S)$$

où  $A(0)$  est une matrice nilpotente de rang égal à  $r$ . Si  $p > r + 2$  alors (S) admet le même invariant de Katz que l'opérateur :

$$F_p \left( \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right) \right).$$

*Démonstration.* – D'après le lemme 4, si  $p > 2$  alors :

$$q_C(x, \lambda) = f_A(x, \lambda) + O(x^{p-3})$$

donc

$$x^r \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right) = x^r \lambda^n - \sum_1^n (-1)^k x^{r-rk} b_k \lambda^{n-k} + O(x^{p-3}). \quad (25)$$

Notons

$$x^r \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right) = x^r \lambda^n - x^r \sum_1^n (-1)^k Q_k(x) \lambda^{n-k} \quad (26)$$

le développement en  $\lambda$  du premier terme de l'égalité (25). Par identification on a :

$$x^r Q_k(x) = x^{r-rk} b_k(x) + O(x^{p-3}). \quad (27)$$

On peut supposer sans changer la généralité que les  $r_k$  sont positifs puisque les  $r_k$  négatifs n'interviennent pas dans le calcul de l'invariant de Katz (voir la définition page 72).

D'après la relation (27) on a :

$$Q_k(x) = x^{-rk} b_k(x) + O(x^{p-r-3}).$$

Comme nous avons supposé que  $p > r + 2$  et  $b_k(0) \neq 0$  on a donc :

$$Q_k(x) = x^{-rk} \tilde{b}_k(x) \quad (28)$$

avec  $\tilde{b}_k(x) \in \mathbf{C}[[x]]$  et  $\tilde{b}_k(0) \neq 0$   $k = 1, 2, \dots, n$ .

Dans l'égalité (26) on divise les deux membres par  $x^r$  et on applique  $F_p$

$$F_p \left( \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right) \right) = \frac{d^n}{dx^n} - \sum_{k=1}^n x^{-rk-k(p-1)} \tilde{b}_k(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}. \quad (29)$$

L'invariant de Katz associé à l'opérateur (29) vaut alors :

$$\text{RK} = \text{Max}_{1 < k < n} \left( 0, \frac{r_k + k(p-1) - k}{k} \right)$$

$$\text{RK} = p - 2 + \text{Max}_k \left( \frac{r_k}{k} \right)$$

qui est le même que celui de l'équation différentielle  $E_S(Y_0)$  associée au système (S) et obtenue par le vecteur cyclique  $Y_0$ .

5.2. Cas où  $p \leq r + 2$ .

Nous allons voir dans ce paragraphe que dans le cas où  $p \leq r + 2$ , par un changement de variable de la forme  $x = t^m$  ( $m$  est un entier convenablement choisi) on peut se ramener au cas précédent ( $p > r + 2$ ). En posant  $x = t^m$  on obtient :

$$\frac{dy}{dt} = mt^{m-1} M(t^m)y. \quad (S_m)$$

DEFINITION. — On dira que  $(S_m)$  est le système ramifié de (S) par  $m$ .

LEMME 5. — Le rang de Katz RK d'un système différentiel (S) M-irréductible d'invariant de Moser  $\mu = p - 1 + r/n$  est tel que :

$$\mu \leq \text{RK} + 1 \leq p.$$

Démonstration. — Supposons que (S) est M-irréductible i.e de rang de Moser

$$\mu = p - 1 + \frac{r}{n}.$$

Soit  $Y_0$  un vecteur cyclique dont l'équation différentielle correspondante est  $E_S(Y_0)$ . Le rang de Katz vaut :

$$\text{RK} = p - 2 + \text{Max}_k \left( \frac{r_k}{k} \right).$$

Les  $r_k$  sont les nombres définis dans (8), on a  $r_k \leq k$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$  et donc :

$$\frac{r}{n} \leq \text{Max}_k \left( \frac{r_k}{k} \right) \leq 1.$$

Ceci démontre le lemme 5.

LEMME 6. — Si (S) est M-irréductible et si  $m$  est un entier tel que

$$m > \frac{n + 1}{p - 2 + r/n}$$

alors  $(S_m)$  est d'invariant de Moser  $\tilde{p} - 1 + \tilde{r}/n$  avec  $\tilde{p} > \tilde{r} + 2$ .

En effet soient RK et  $\tilde{RK}$  les rangs de Katz des systèmes respectifs (S) et  $(S_m)$ , d'après le lemme 5 :

$$p - 2 + \frac{r}{n} \leq \text{RK} \leq p - 1.$$

Or on sait [10] que si (S) est de rang de Katz RK, alors  $\tilde{RK} = m \text{RK}$  donc

$$m(p - 2 + r/n) \leq \tilde{RK} = m \text{RK} \leq m(p - 1)$$

$$\tilde{p} - 1 \geq \tilde{RK} > n + 1 \geq \tilde{r} + 1$$

ce qui entraîne

$$\tilde{p} > \tilde{r} + 2. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

### 6. Conclusion.

On peut résumer tout ce qui précède en un algorithme qui est le suivant :

Soit 
$$\frac{dy}{dx} = M(x)y. \qquad (S)$$

I — Appliquer l'algorithme de réductibilité (cf. [6]) qui construit une transformation  $T(x)$  telle que le système de matrice

$$T^{-1} M T - T^{-1} \frac{dT}{dx} = \frac{A(x)}{x^p}$$

soit irréductible au sens de Moser.

- II – 1) Si  $A(0)$  n'est pas nilpotente alors  $RK = p - 1$ . Sinon :  
 2) Si  $p > 2 + \text{rang}(A(0))$  alors  $RK$  est égal à celui de l'opérateur :

$$F_p \left( \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right) \right)$$

- 3) Si  $p \leq 2 + \text{rang}(A(0))$  alors  
 3-a) Trouver un entier  $m$  tel que :

$$m > \frac{n + 1}{p - 2 + \text{rang}(A(0))/n} .$$

3-b) Soit  $(S_m)$  le système ramifié par  $m$ .

3-c) Appliquer l'algorithme de réductibilité, le système obtenu est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x)}{x^p} y \text{ avec } p > 2 + \text{rang}(A(0)) .$$

3-d) Si  $A(0)$  n'est pas nilpotente  $RK = (p - 1)/m$ .

3-e) Si  $A(0)$  est nilpotente, le rang de Katz de  $(S)$  est  $RK/m$  où  $RK$  est le rang de Katz de l'opérateur  $F_p$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. CODDINGTON and N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, New York, 1955.  
 [2] P. DELIGNE, Equations différentielles à points singuliers réguliers, *Lectures Notes in Mathematics*, 163, Springer-Verlag, 1970.  
 [3] R. GERARD et A.H.M. LEVELT, Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes différentiels linéaires, *Ann. Inst. Fourier*, 23-1(1973), 157-195.

- [4] A. HILALI, *Contribution à l'étude des points singuliers des systèmes différentiels linéaires*, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle IMAG, Grenoble, 1982.
- [5] A. HILALI, Réductibilité d'un système différentiel linéaire, *Num. Math.*, 41 (1983), 1-17.
- [6] A. HILALI et A. WAZNER, *Un algorithme de calcul de l'invariant de Moser d'un système différentiel linéaire*, R.R n° 487 IMAG, TIM3, Grenoble, 1984.
- [7] N. KATZ, *A simple algorithm for cyclic vector*, Manuscrit, Août, 1984.
- [8] N. KATZ, Nilpotent connexions and the monodromy theorem, *Pub. Math. IHES* n° 39 (1970), 176-232.
- [9] B. MALGRANGE, Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, *L'Enseignement Mathématique*, t. xx, 1-2 (1974), 147-176.
- [10] B. MALGRANGE, *Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularité irrégulière*, Preprint Institut Fourier, Grenoble, 1981.
- [11] J. MOSER, The order of singularity in Fuch's theory, *Math. Zeitschrift*, 72 (1960), 379-398.
- [12] J.P. RAMIS, *Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Pub. IRMA Strasbourg (1981).

Manuscrit reçu le 15 avril 1985

révisé le 10 juin 1985.

A. HILALI,  
Institut IMAG  
& I.N.P.T.  
Boulevard Maâ El Ainine  
Rabat Instituts (Maroc).

A. WAZNER,  
Institut IMAG  
Lab. TIM3  
B.P. 68  
38402 St. Martin d'Hères Cedex .