

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

TAMBEKOU ROGER TCHANGANG

## **Le groupe d'automorphismes du groupe modulaire**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 37, n° 2 (1987), p. 19-31

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1987\\_\\_37\\_2\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_2_19_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LE GROUPE D'AUTOMORPHISMES DU GROUPE MODULAIRE

par Roger Tambekou TCHANGANG

---

En 1983, Ivanov affirme dans [8] que le groupe  $M_g^* = \pi_0 \text{Diff } F_g$  est complet (où  $\pi_0 \text{Diff } F_g$  désigne le groupe des classes d'isotopie des difféomorphismes de la surface fermée orientable  $F_g$ ), c'est-à-dire que tout automorphisme du groupe  $M_g^*$  est intérieur. L'année suivante, grâce à une étude des sous-groupes virtuellement abéliens de  $M_g^*$  et en particulier des divers rangs qui leur sont associés, J. McCarthy [10] précise ce résultat et en donne une démonstration qui s'appuie notamment sur le théorème de classification des difféomorphismes de surfaces de W. Thurston. Dans ce qui suit, on se propose d'établir le théorème d'Ivanov (cf. Théorème I ci-dessous) en ne faisant appel qu'à des techniques simples de théorie des groupes et de topologie des surfaces. Comme on le verra au théorème II, la méthode proposée permet aussi de retrouver le résultat d'Ivanov dans le cas des surfaces pointées<sup>(1)</sup>.

Je remercie A. Papadopoulos qui m'a conseillé la lecture du manuscrit de McCarthy, ainsi que J. L. Loday et C. Squier par l'intermédiaire desquels j'ai su que  $\text{Out } B_n \approx Z_2$ .

Le groupe modulaire  $M_g = \pi_0 \text{Diff}^+ F_g$  est le sous-groupe de  $M_g^*$  des classes d'isotopie de difféomorphismes orientés de la surface  $F_g$ . On désigne par  $\text{Out } G$  le groupe des automorphismes extérieurs du groupe  $G$ , c'est-à-dire le quotient du groupe  $\text{Aut } G$  des automorphismes de  $G$  par le sous-groupe distingué  $\text{Int } G$  des automorphismes intérieurs de  $G$ .

(<sup>1</sup>) Dans *Algebraic properties of the mapping class group*, preprint E-1-85, Steklov Mathematical Institute, Leningrad, 1985, Ivanov affirme avoir obtenu le même résultat pour les difféomorphismes de  $F_g$  fixant un nombre quelconque de points.

THÉORÈME I. — Lorsque  $g \geq 3$ , on a

$$\text{Out } M_g \approx \mathbf{Z}_2 \quad \text{et} \quad \text{Out } M_g^* = 1;$$

lorsque  $g = 2$ ,

$$\text{Out } M_2 \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \quad \text{et} \quad \text{Out } M_2^* \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2.$$

Lorsque  $g \geq 3$ , l'unique automorphisme extérieur non trivial de  $M_g$  est déterminé par la conjugaison par un difféomorphisme (quelconque) renversant l'orientation de  $F_g$ . Les automorphismes de  $M_2$  et de  $M_2^*$  seront caractérisés plus loin.

### 1. Rappels.

*A. Intersection géométrique.* — Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux courbes simples fermées sur  $F_g$ . On définit leur nombre d'intersection géométrique  $i(C_1, C_2)$  en posant :

$$i(C_1, C_2) = \inf (\text{cardinal de } C \cap C'),$$

où  $C$  et  $C'$  sont des courbes simples isotopes respectivement à  $C_1$  et à  $C_2$ . Lorsque  $i(C_1, C_2) = 0$ , on peut choisir des représentants des classes d'isotopie de  $C_1$  et de  $C_2$  qui sont disjoints. Rappelons que la surface  $F_g$  étant orientable, deux courbes homotopes ont un nombre d'intersection nul. On note  $T_C \in M_g$  le twist de Dehn suivant la courbe  $C$ . Comme  $T_C$  ne dépend que de la classe d'isotopie  $\Gamma$  de  $C$ , on utilisera également dans la suite la notation  $T_\Gamma$ . Soit  $n \in \mathbf{Z}^*$  ; on a :

$$i(C_1, C_2) \neq 0 \Leftrightarrow i(C_2, T_{C_1}^n(C_2)) \neq 0. \quad (*)$$

On obtient l'équivalence (\*) en considérant l'action d'un représentant de  $T_{C_1}$  dont le support est contenu dans un voisinage tubulaire convenable de  $C$ . (Voir [5], p. 68-69, pour des résultats plus forts qui impliquent (\*).)

Appliquée à deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  vérifiant  $i(C_1, C_2) \neq 0$ , l'équivalence (\*) montre que tout twist de Dehn suivant une courbe  $C_1$  non triviale est d'ordre infini. Les remarques suivantes permettront de dire si deux courbes simples fermées sont isotopes.

1. Soit  $f \in M_g$  : on a :

$$f \circ T_C \circ f^{-1} = T_{f(C)}.$$

Ceci est une conséquence de la définition d'un twist de Dehn.

2. Si  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas isotopes, alors il existe une courbe simple fermée  $C_3$  sur  $F_g$  telle que  $i(C_1, C_3) \neq 0$  et  $i(C_2, C_3) = 0$ .

En effet, il suffit de constater que toute composante connexe de  $F_g - C_2$  est de genre supérieur ou égal à 1.

3. Soient  $n$  et  $p$  des entiers non nuls. Si  $T_{C_1}^n = T_{C_2}^p$ , alors  $C_1$  est isotope à  $C_2$ , et  $n = p$ .

Pour le voir, on suppose d'abord  $C_1$  et  $C_2$  non isotopes. On applique  $T_{C_1}^n$  et  $T_{C_2}^p$  à une courbe  $C_3$  satisfaisant aux conditions de la remarque 2. L'équivalence (\*) conduit alors à une contradiction. Puisque  $C_1$  et  $C_2$  sont isotopes et que le twist  $T_{C_1}$  est d'ordre infini, on a  $n = p$ .

4. Soit  $f \in M_g$  une difféotopie vérifiant :  $f \circ T_C^p \circ f^{-1} = T_C^p$ , où  $p$  est un entier non nul. Alors, la classe d'isotopie  $f(C)$  contient  $C$ .

En effet, par la remarque 1, on a  $T_{f(C)}^p = T_C^p$  ; on applique ensuite la remarque 3.

5. Si  $T_{C_1}$  commute avec  $T_{C_2}$ , alors  $i(C_1, C_2) = 0$ .

En effet,  $T_{C_1}(C_2)$  est isotope à  $C_2$ , d'après la propriété 4. L'équivalence (\*) permet de conclure.

*B. Involution hyperelliptique.* — On dit qu'un élément  $h$  de  $M_g$  est une *involution hyperelliptique* s'il existe un difféomorphisme  $\tilde{h}$  d'ordre 2 représentant  $h$  et ayant exactement  $2g + 2$  points fixes (voir [4]).

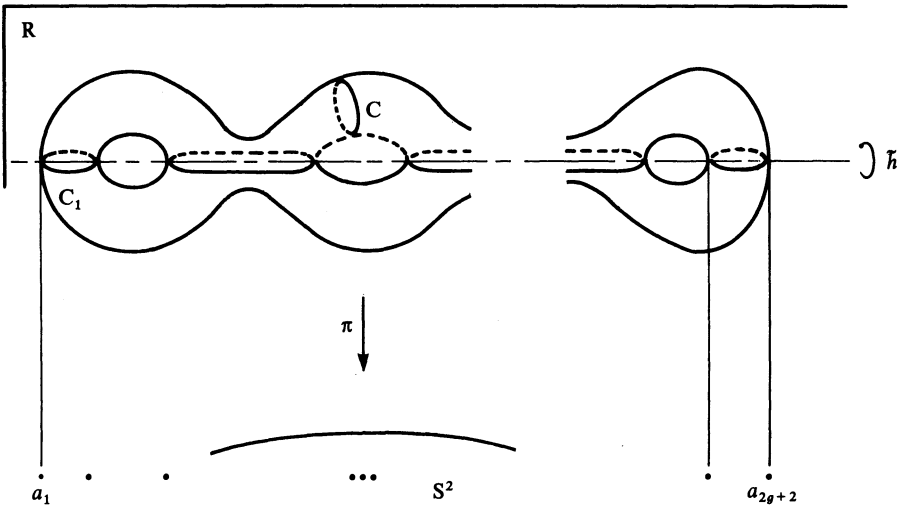


Fig. 1.

Rappelons quelques faits dont on pourra trouver une démonstration dans [2]. Soit  $h$  une involution hyperelliptique, représentée par l'involution  $\tilde{h}$  de  $F_g$ . Par la formule de Riemann-Hurwitz,  $F_g/\tilde{h}$  est une sphère et la projection  $\pi: F_g \rightarrow F_g/\tilde{h}$  est un revêtement ramifié à deux feuillettes. En particulier,  $\tilde{h}$  préserve l'orientation de  $F_g$ . Soit

$$A_{2g+2} = \{a_1, \dots, a_{2g+2}\} \subset S^2 \approx F_g/\tilde{h}$$

l'ensemble des points de branchement de  $\pi$  et soit  $(I_i)_{1 \leq i \leq 2g+1}$  un système de  $2g+1$  arcs de  $S^2$ , d'intérieurs 2 à 2 disjoints et contenus dans  $S^2 - A_{2g+2}$  et d'extrémités respectives  $a_i$  et  $a_{i+1}$ . Dans  $F_g$ , les relevés par  $\pi$  des arcs  $I_i$  forment une chaîne  $(C_i)_{1 \leq i \leq 2g+1}$  de  $2g+1$  courbes simples fermées invariantes par  $\tilde{h}$ . Soit  $T_i$  le twist de Dehn suivant  $C_i$ , cf. fig. 1.

On note  $N(h)$  le sous-groupe de  $M_g$  formé des éléments qui commutent avec  $h$ . Le groupe  $N(h)$  admet la présentation :

$$\begin{aligned} \langle T_1, \dots, T_{2g+2} \mid & [T_i, T_j] = 1, \quad i - j \geq 2 \\ & T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2g \\ & (T_1 \dots T_{2g+1})^{2g+2} = 1 \\ & (T_1 \dots T_{2g} T_{2g+1}^2 T_{2g} \dots T_1)^2 = 1 \\ & [T_g T_1 \dots T_{2g} T_{2g+1}^2 T_{2g} \dots T_1, T_1] = 1 \rangle \end{aligned}$$

et on a  $h = T_1 \dots T_{2g} T_{2g+1}^2 T_{2g} \dots T_1$ . On établit ce fait à partir de la suite exacte :

$$1 \rightarrow \{1, h\} \rightarrow N(h) \xrightarrow{p} \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2}) \rightarrow 1$$

et de la présentation classique de  $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$  :

$$\begin{aligned} \langle S_1, \dots, S_{2g+2} \mid & [S_i, S_j] = 1, \quad i - j \geq 2 \\ & S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2g \\ & (S_1 \dots S_{2g+1})^{2g+2} = 1 \\ & S_1 \dots S_{2g} S_{2g+1}^2 S_{2g} \dots S_1 = 1 \rangle \end{aligned}$$

où  $S_i = p(T_i)$  est un *demi-twist de Dehn* autour de l'arc  $I_i$ . Les remarques 1 à 5 demeurent vraies pour les demi-twists, si l'on remplace les courbes fermées par des arcs simples. Sur ces présentations, on lit que  $N(h)$  et  $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$  sont des quotients du groupe des tresses

$$B_{2g+2} = \pi_0 \text{Diff}^+(D^2, A_{2g+2}, \text{rel } \partial D^2)$$

qui pour sa part admet la présentation

$$\langle s_1, \dots, s_{2g+2} \mid [s_i, s_j] = 1, i - j \geq 2, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, i - j \leq 2 \rangle.$$

Enfin, le centre de  $N(h)$  est engendré par  $h$ . Ceci résulte du fait que si un élément laisse invariant chaque classe d'isotopie de courbe  $C_i$ , on peut le représenter par un difféomorphisme laissant invariant  $\bigcup_1^{2g+1} C_i$  ([5], p. 53), et que  $F_g - \bigcup_1^{2g+1} C_i$  est la réunion de deux disques disjoints.

**2. Démonstration du théorème I.**

LEMME 1. — Soient  $h$  et  $h'$  deux involutions hyperelliptiques dans  $M_g$ . Alors,  $h$  est conjugué à  $h'$  dans  $M_g$ .

*Démonstration.* — Pour le montrer, il suffit de relever dans  $\text{Diff}^+ F_g$  un difféomorphisme entre les espaces quotients envoyant points de branchement sur points de branchement, ce qui est toujours possible, d'après le théorème de monodromie d'Hurwitz (voir [2]).  $\square$

Dans toute la suite, on travaille avec une involution hyperelliptique  $\tilde{h}$  fixée une fois pour toutes.

LEMME 2. — Tout difféomorphisme  $\bar{\alpha}$  de  $(S^2, A_{2g+2})$  d'ordre  $2g + 1$  admet dans  $\text{Diff}^+ F_g$  un relèvement  $\tilde{\alpha}$  d'ordre  $2(2g+1)$ , et on a

$$\alpha^{2g+1} = h,$$

où  $\alpha$  désigne la classe d'isotopie de  $\tilde{\alpha}$  dans  $M_g$ .

*Démonstration.* — Tout difféomorphisme de  $(S^2, A_{2g+2})$  se relève en deux difféomorphismes qui se déduisent l'un de l'autre par multiplication par  $h$ . Soit  $\tilde{\alpha}$  un relèvement de  $\bar{\alpha}$ .  $\tilde{\alpha}^{2g+2}$  induit l'identité sur  $(S^2, A_{2g+2})$ . En outre,  $\bar{\alpha}$  étant d'ordre impair, on peut choisir  $\tilde{\alpha}$  d'ordre  $2(2g+1)$ .  $\square$

*Remarque.* — L'automorphisme  $T_1 \dots T_{2g}$  est d'ordre  $2(2g+1)$ . Il permute circulairement les points  $a_1, \dots, a_{2g+1}$  et fixe  $a_{2g+2}$ .

LEMME 3. — Soit  $\alpha$  un élément d'ordre  $2(2g+1)$  de  $M_g$ . Alors, il existe une réalisation  $\tilde{\alpha}$  de  $\alpha$  d'ordre  $2(2g+1)$  et  $\alpha^{2g+1}$  est une involution hyperelliptique.

*Démonstration.* — L'existence de  $\tilde{\alpha}$  est la conséquence d'un théorème de Fenchel-Nielsen (cf. [13]). D'autre part, en vertu d'un résultat de Harvey utilisant pour l'essentiel la formule de Riemann-Hurwitz [6], la projection  $F_g \rightarrow F_g/\tilde{\alpha}$  a  $2g + 4$  points de ramification  $x_1, \dots, x_{2g+4}$  sur lesquels  $\tilde{\alpha}$  induit la permutation

$$(x_1, \dots, x_{2g+1})(x_{2g+2})(x_{2g+3}, x_{2g+4}).$$

Par conséquent,  $\tilde{\alpha}^{2g+1}$  laisse fixes les points  $x_1, \dots, x_{2g+2}$ .  $\square$

**PROPOSITION 1.** — *Soit  $\Phi$  un automorphisme de  $M_g$ . Alors,  $\Phi(h)$  est une involution hyperelliptique.*

*Démonstration.* — D'après le lemme 2, il existe  $\alpha \in M_g$  d'ordre  $2(2g+1)$  tel que  $h = \alpha^{2g+1}$ . Donc  $h' = \Phi(h) = \Phi(\alpha)^{2g+1}$  est aussi une involution hyperelliptique, d'après le lemme 3.  $\square$

**COROLLAIRE 1.** — *Tout élément  $\Phi$  de  $\text{Out } M_g$  admet un représentant  $\Phi$  tel que  $\Phi(h) = h$  et par conséquent  $\Phi(N(h)) = N(h)$ .*  $\square$

Soit  $\Phi$  un tel représentant. Il induit un automorphisme

$$\bar{\Phi} : \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2}) \approx N(h)/h \rightarrow N(h)/h.$$

**PROPOSITION 2.** — *On a  $\text{Out } N(h) \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ .*

*Démonstration.* — Pour le voir, on exhibe deux éléments  $\rho$  et  $\sigma$  d'ordre 2 de  $\text{Out } N(h)$  et l'on montre que leur produit  $\rho\sigma$  est d'ordre 2, ce qui définit une injection de  $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$  dans  $\text{Out } N(h)$  dont on montre ensuite la surjectivité.

Soit  $R$  une réflexion (involution renversant l'orientation) de la surface  $F_g$  respectant chacune des courbes  $C_i$ . On exige en outre que la réflexion  $R$  laisse invariante la courbe  $C$  de la figure 1, ce qui la détermine à isotopie près. Une isotopie convenable permet enfin d'imposer à  $R$  de commuter avec  $\tilde{h}$  (figure 1). Alors, l'involution  $\rho$  est la restriction à  $N(h)$  de la conjugaison par  $R$  dans  $M_g^*$ .

Soit maintenant  $s : N(h) \rightarrow \mathbf{Z}_2$  l'application définie par la composition

$$N(h) \xrightarrow{P} \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2}) \xrightarrow{P} \mathcal{S}_{2g+2} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$$

où  $\varepsilon$  est l'homomorphisme de signature du groupe symétrique  $\mathcal{S}_{2g+2}$  et  $P$  l'homomorphisme de restriction à  $A_{2g+2}$  des difféotopies de la paire

$(S^2, A_{2g+2})$ . On définit alors l'involution  $\sigma$  de  $N(h)$  en posant :

$$\sigma(x) = xh^{s(x)}.$$

Lorsque  $1 \leq i \leq 2g + 1$ , aucun des trois éléments  $\rho(T_i) = T_i^{-1}$ ,  $\sigma(T_i) = T_i h$  et  $\sigma\rho(T_i) = T_i^{-1}h$  ne peut être conjugué à  $T_i$  dans  $M_g$ . En effet, supposons par exemple que  $T_i h$  soit conjugué à  $T_i$ . D'après la remarque 1,  $T_i h$  est un twist de Dehn  $T_D$ , et on a  $T_i^2 = (T_i h)^2 = T_D^2$ ; d'après la remarque 3, la courbe  $D$  est isotope à  $C_i$ , ce qui conduit à l'absurdité  $h = \text{Identité}$ .

On en déduit que  $(\rho\sigma)$  est d'ordre 2 dans  $\text{Out } N(h)$  et que l'application  $Z_2 \times Z_2 \rightarrow \text{Out } N(h)$  ainsi définie est injective. La surjectivité résulte des cinq lemmes suivants :

LEMME 4. — *Le groupe  $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, \text{rel } A_{2g+2})$  est un sous-groupe caractéristique de  $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$ .*

*En outre, tout élément  $\psi$  de  $\text{Out } N(h)$  admet un représentant  $\psi$  dans  $\text{Aut } N(h)$  qui induit l'identité sur*

$$\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2}) / \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, \text{rel } A_{2g+2}) \approx \mathcal{S}_{2g+2}.$$

La première assertion permet de définir, par passage au quotient, un morphisme  $\text{Out } N(h) \rightarrow \text{Out } \mathcal{S}_{2g+2}$ . La seconde dit que ce morphisme est trivial.

*Démonstration.* — Comme  $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$  est un quotient de  $B_{2g+2}$ , la première assertion du lemme découle immédiatement du résultat suivant ([1]) :

Tout épimorphisme  $B_{2g+2} \rightarrow \mathcal{S}_{2g+2}$  se déduit de l'homomorphisme standard par composition à gauche avec un automorphisme de  $\mathcal{S}_{2g+2}$ . D'autre part, on sait que lorsque  $g \geq 3$ , on a  $\text{Out } \mathcal{S}_{2g+2} = 1$  (cf. [1]) ; d'où la seconde assertion dans le cas  $g \neq 2$ .

Lorsque  $g = 2$ , on a  $\text{Out } \mathcal{S}_6 \approx Z_2$  et l'élément non trivial de ce groupe peut être représenté par un automorphisme transformant la permutation circulaire  $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$  en  $(1\ 2\ 3)(5\ 6)$ . Or tout élément d'ordre 6 (donc fini) de  $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_6)$  se réalise comme un automorphisme pour une certaine structure conforme sur  $(S^2, A_6)$ , c'est-à-dire comme une rotation, et donc induit sur  $A_6$  un cycle de longueur 6 (voir ([12])). On en déduit que tout automorphisme de  $\mathcal{S}_6$  qui provient d'un automorphisme de  $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_6)$  est nécessairement un automorphisme intérieur de  $A_6$ .  $\square$



Dans ce qui suit,  $\psi \in \text{Aut } N(h)$  désigne un automorphisme induisant l'identité sur  $\mathcal{S}_{2g+2}$ .

LEMME 5. — L'automorphisme  $\bar{\Psi}$  de  $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$  induit par  $\psi$  laisse invariant le sous-groupe  $B(i) = \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+1}, a_i)$  de  $\pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2})$ , où  $1 \leq i \leq 2g + 2$ .

*Démonstration.* — Le groupe  $B(i)$  est tout simplement l'image réciproque par  $P: \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+2}) \rightarrow \mathcal{S}_{2g+2}$  du sous-groupe  $S(i)$  des permutations de  $A_{2g+2}$  fixant  $a_i$ .  $\square$

LEMME 6. — On a  $\bar{\Psi} = \text{Identité}$  ou bien  $\bar{\Psi}(S_i) = S_i^{-1}$  pour  $1 \leq i \leq 2g + 1$ .

*Démonstration.* — Puisque  $S^2 - a_i$  est isomorphe au disque ouvert  $D^2$ , on a  $B(i) \approx \pi_0 \text{Diff}^+(D^2, A_{2g+1})$ . En examinant la suite exacte de fibration de Cerf :

$$\text{Diff}^+(D^2, A_{2g+1}, \text{rel } \partial D^2) \rightarrow \text{Diff}^+(D^2, A_{2g+1}) \rightarrow \text{Diff}^+ \partial D^2,$$

on voit que  $B(i) \approx B_{2g+1}/\mathcal{L}$ , où le twist de Dehn  $\mathcal{L}$  suivant le bord de  $D^2$  engendre le centre (cyclique infini) de  $B_{2g+1}$ . Or l'un des énoncés démontrés par J. Dyer et E. Grossman dans [3] assure que

$$\text{Out } B_n/\mathcal{L} \approx Z_2.$$

L'élément exhibé dans [3] pour représenter la classe non triviale de  $\text{Out } B_n/\mathcal{L}$  est la restriction à  $B(i)$  de l'automorphisme non trivial défini dans l'énoncé.

Montrons que si  $\bar{\Psi}|_{B(2g+1)} = \text{Identité}$ , alors,  $\bar{\Psi} = \text{Identité}$  : Comme  $S_{2g+1}$  est conjugué à  $S_1$  et que  $\bar{\Psi}$  induit l'identité sur  $\mathcal{S}_{2g+2}$ , la difféotopie  $\bar{\Psi}(S_{2g+1})$  est un demi-twist de Dehn autour d'un arc  $I$  d'extrémités  $a_{2g+1}$  et  $a_{2g+2}$ . D'autre part, puisque  $S_{2g+1}$  commute avec  $S_1, \dots, S_{2g-1}$ , la difféotopie  $\bar{\Psi}(S_{2g+1})$  commute avec  $\bar{\Psi}(S_1) = S_1, \dots, \bar{\Psi}(S_{2g-1}) = S_{2g-1}$ . On peut donc choisir l'arc  $I$  disjoint des arcs  $I_1, \dots, I_{2g-1}$ , d'après la remarque 5. Puisque  $S^2 - \bigcup_1^{2g-1} I_i$  est homéomorphe à un disque,  $I$  est

forcément isotope à  $I_{2g+1}$ . D'autre part, on vérifie (comme dans la proposition 2), que l'automorphisme non trivial de l'énoncé est extérieur.  $\square$

LEMME 7. — Lorsque  $\bar{\Psi} = \text{Identité}$ , alors  $\psi = \text{Identité}$  ou bien  $\psi = \sigma$ .

*Démonstration.* — On a alors  $\psi(x) = x$  ou bien  $\psi(x) = xh$ , pour  $x \in N(h)$ . Remarquons que  $\alpha^k T_1 \alpha^{-k} = T_{k+1}$ , où  $\alpha = T_1 \dots T_{2g+1}$  et  $0 \leq k \leq 2g$ . D'où :  $\psi(T_{k+1}) = \psi(\alpha)^k \psi(T_1) \psi(\alpha)^{-k} = \alpha^k \psi(T_1) \alpha^{-k}$ . Par suite, la donnée de  $\psi(T_1)$  détermine entièrement  $\psi$  sur  $N(h)$ .  $\square$

LEMME 8. — Si  $\bar{\Psi}(S_i) = S_i^{-1}$  lorsque  $1 \leq i \leq 2g + 1$ , alors  $\psi = \rho$  ou  $\psi = \rho\sigma$ .

*Démonstration.* — On applique le lemme 7 à  $\rho\psi$ .  $\square$

Le lemme 8 termine la démonstration de la proposition.  $\square$

COROLLAIRE 2. — On a  $\text{Out } M_2 \approx Z_2 \times Z_2$ .

En effet,  $M_2 = N(h)$  (cf. [2]).  $\square$

PROPOSITION 3. — Lorsque  $g \geq 3$ , les automorphismes  $\sigma$  et  $\rho\sigma$  ne se prolongent pas à  $M_g$ .

*Démonstration.* — Supposons en effet que  $\sigma$  se prolonge à  $M_g$ . Soit  $T$  le twist de Dehn suivant la courbe  $C$  représentée sur la figure 1. Puisque  $C$  et  $C_1$  sont disjointes, on a

$$[T, T_1] = 1, \quad \text{d'où} \quad \sigma([T, T_1]) = [\sigma(T), \sigma(T_1)] = [\sigma(T), hT_1] = 1.$$

On a également

$$[T, T_1^2] = 1, \quad \text{d'où} \quad [\sigma(T), \sigma(T_1^2)] = [\sigma(T), T_1^2] = 1.$$

Ainsi,  $\sigma(T)$  commute avec  $T_1^2$  et laisse donc invariant à isotopie près la courbe  $C_1$ , d'après la remarque 4. Par conséquent,  $\sigma(T)$  commute avec  $T_1$  et donc avec  $h$ . On en déduit que  $\sigma(T) \in N(h)$  et donc que  $T \in \sigma^{-1}(N(h)) = N(h)$ , d'où contradiction.

Comme  $\rho$  s'étend évidemment à  $M_g$  par conjugaison par la réflexion  $R$ , l'automorphisme  $\rho\sigma$  ne peut s'étendre à  $M_g$ .  $\square$

COROLLAIRE 3. — Lorsque  $g \geq 3$ , on a  $\text{Out } M_g \approx Z_2$ .

*Démonstration.* — D'après ce qui précède et puisque  $\rho$  s'étend en un automorphisme non intérieur de  $M_g$ , il suffit de voir qu'un automorphisme  $\Phi$  de  $M_g$  fixant  $N(h)$  est nécessairement l'identité ou la

conjugaison par  $h$ . Or, S. P. Humphries a montré dans [7] que  $M_g$  est engendré par  $N(h)$  et le twist  $T$ . Il suffit donc de voir que  $\Phi(T) = T$  ou  $\Phi(T) = hTh^{-1}$  dès que  $\Phi$  fixe  $N(h)$ .

Supposons donc que  $\Phi$  fixe  $N(h)$ . Le twist  $T$  étant conjugué à  $T_4$  (en général deux twists de Dehn suivant des courbes non séparantes sont conjugués),  $\Phi(T)$  est conjugué à  $T_4$  et est donc un twist suivant une courbe fermée que l'on appellera  $C'$ . Puisque  $T$  commute avec  $T_i$ , on a  $i(C', C_i) = 0$  pour  $i \neq 4$  (remarque 5). Mais  $F_g - \bigcup_{i4} C_i$  est la réunion de deux cylindres, ce qui montre que  $C'$  est isotope à  $C$  ou à  $h(C)$ .  $\square$

**COROLLAIRE 4.** — *Lorsque  $g \geq 3$ , on a  $\text{Out } M_g^* = 1$ .*

*Démonstration.* — On a  $[M_g^*, M_g^*] \subset M_g$  et  $[M_g, M_g] = M_g$  d'après [11]. Donc  $M_g = [M_g^*, M_g^*]$  est un sous-groupe caractéristique de  $M_g^*$ , ce dernier étant engendré par  $T_1, \dots, T_{2g+1}, T$  et  $R$ . Puisque la conjugaison par  $R$  est un automorphisme intérieur de  $M_g^*$ , tout se réduit à montrer que l'identité est le seul automorphisme de  $M_g^*$  qui prolonge l'identité de  $M_g$ . Soit donc  $\Phi$  un prolongement de l'identité de  $M_g$ .

Puisque

$$RT_iR^{-1} = T_i^{-1}, \quad 1 \leq i \leq 2g + 1$$

on a

$$\Phi(R)T_i\Phi(R^{-1}) = T_i^{-1}$$

d'où

$$R^{-1}\Phi(R)T_i\Phi(R)^{-1}R = T_i.$$

De même,  $RTR^{-1} = T^{-1}$  implique que  $R^{-1}\Phi(R)$  commute avec  $T$ . Donc  $R = \Phi(R)$ , puisque le centre de  $M_g$  est réduit à l'élément neutre.  $\square$

**PROPOSITION 4.** — *On a  $\text{Out } M_2^* \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ .*

La démonstration de cette proposition est une conséquence des trois lemmes suivants :

**LEMME 9.** — *L'abélianisé  $\overline{M_2^*}$  de  $M_2^*$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$  ; il est engendré par les représentants respectifs  $\overline{T_1}$  et  $\overline{R}$  de  $T_1$  et de  $R$ . En outre, l'image de  $M_2$  dans  $\overline{M_2^*}$  est engendrée par  $\overline{T_1}$ . Enfin, le groupe dérivé  $M$  de  $M_2^*$  est le sous-groupe formé de tous les produits d'un nombre pair de  $T_i$ .*

*Démonstration.* — On obtient une présentation du groupe  $M_2^*$  en ajoutant aux générateurs de  $M_2$  l'élément  $R$  lié par les relations :

$$RT_i R^{-1} = T_i^{-1} \quad (1 \leq i \leq 5) \quad \text{et} \quad R^2 = 1.$$

Cette présentation permet de calculer  $\overline{M_2^*}$  et d'exhiber alors les générateurs de  $M$ . □

LEMME 10. — *Tout automorphisme  $\Phi$  de  $M_2^*$  induit l'identité sur  $\overline{M_2^*}$ . En particulier, le sous-groupe  $M_2$  de  $M_2^*$  est caractéristique.*

*Démonstration.* — Soit  $\overline{\Phi}$  l'automorphisme induit par  $\Phi$  sur  $\overline{M_2^*}$ . On va montrer qu'il existe des éléments  $Z$  et  $B$  de  $M_2^*$  vérifiant

$$A(Z) = A(\Phi(Z)) = \overline{RT_1} \quad \text{et} \quad A(B) = A(\Phi(B)) = \overline{R}$$

où  $A : M_2^* \rightarrow \overline{M_2^*}$  est l'application canonique.

Dans [12], on étudie tous les sous-groupes finis de  $M_2$  et on montre qu'il existe des sous-groupes  $G_1$  et  $G_2$  de  $\pi_0 \text{Diff}(S^2, A_6)$  respectivement isomorphes à  $\mathcal{S}_4 \times Z_2$  et au groupe diédral  $D_{10}$  d'ordre 10. Le groupe  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) se réalise comme groupe des symétries d'un octaèdre régulier (resp. d'une pyramide régulière à base pentagonale) dont les sommets sont les points de  $A_6$ . On désigne par  $z$  l'application antipodale de  $S^2$  qui se trouve être le générateur du centre de  $G_1$ , et par  $b \in G_2$  une symétrie quelconque de la pyramide. Sur  $A_6$ , les  $T_i$  induisent des transpositions tandis que les éléments  $z$ ,  $b$  et  $R$  induisent respectivement un produit de trois transpositions, un produit de deux transpositions et l'identité. On en déduit que pour tout relevé  $Z$  (resp.  $B$ ) de  $z$  (resp.  $b$ ) dans  $M_2^*$ , on a

$$A(Z) = \overline{RT_1} \quad \text{et} \quad A(B) = \overline{R}.$$

On conclut en observant que d'après [12], lorsque  $i = 1$  ou  $2$ , tout sous-groupe de  $\pi_0 \text{Diff}(S^2, A_6)$  isomorphe à  $G_i$  lui est conjugué. □

LEMME 11. — *L'automorphisme Identité de  $M_2$  admet exactement deux prolongements dans  $\text{Out } M_2^*$  : le prolongement trivial  $I$  et l'automorphisme  $\psi_0$  qui à  $R$  associe  $Rh$ .*

*Démonstration.* — Comme dans la démonstration du corollaire 4, on montre que si  $\Phi$  est un automorphisme de  $M_2^*$  prolongeant l'identité de  $M_2$ , on a  $\Phi(R) = R$  ou  $\Phi(R) = Rh$  et ces deux solutions sont compatibles avec les relations de  $M_2^*$ . □

*Démonstration de la proposition 4.* — Tout d'abord l'automorphisme  $\psi_0$  n'est pas intérieur, car s'il existait  $y \in M_g^*$  tel que  $yxy^{-1} = \psi_0(x)$  pour tout  $x$  de  $M_g^*$ , on aurait  $yT_iy^{-1} = T_i$ , ce qui montrerait que  $y$  préserve l'orientation et commute avec  $M_2$ , d'où  $y = 1$  ou  $y = h$ , ce qui contredirait  $\psi_0(R) = Rh$ .

D'autre part, la conjugaison par  $R$  dans  $M_2^*$  est un automorphisme intérieur de  $M_2^*$ . En prolongeant les éléments de  $\text{Out } M_2$  à  $M_2^*$ , on trouve donc

$$\text{Out } M_2^* = \{I, \psi_0, \psi_1, \psi_0\psi_1\}$$

où  $\psi_1(R) = R$  et  $\psi_1(T_i) = T_ih$  pour  $1 \leq i \leq 5$ .  $\square$

### 3. Le cas des surfaces pointées.

On désigne par  $M_{g,1}^*$  (resp.  $M_{g,1}$ ) le groupe des difféotopies (resp. difféotopies orientées) de la surface  $(F_g, *)$  où  $*$  est le point-base de  $F_g$ .

THÉORÈME II. — Lorsque  $g \geq 2$ , on a :

$$\text{Out } M_{g,1} \approx \mathbf{Z}_2 \quad \text{et} \quad \text{Out } M_{g,1}^* = 1.$$

*Démonstration.* — Soit  $h$  une involution hyperelliptique de  $M_{g,1}$ . D'après [9], le groupe  $M_{g,1}$  est engendré par  $T, T_1, \dots, T_{2g}$ . Si l'on suppose que  $*$  =  $\pi^{-1}(a_{2g+2})$ , alors  $N(h)$  est engendré par  $T_1, \dots, T_{2g}$ . En considérant la suite exacte

$$1 \rightarrow \{1, h\} \rightarrow N(h) \rightarrow \pi_0 \text{Diff}^+(S^2, A_{2g+1}, a_{2g+2}) \rightarrow 1,$$

on obtient encore que  $\text{Out } N(h) \approx \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ , par application du théorème de Dyer et Grossmann. Ensuite, on montre comme dans le cas non pointé, que

$$\text{lorsque } g \geq 2, \quad \text{Out } M_{g,1} \approx \mathbf{Z}_2 \quad \text{et} \quad \text{Out } M_{g,1}^* = 1,$$

le genre 2 n'apparaissant plus comme un cas particulier.  $\square$

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. ARTIN, Braids and Permutations, *Annals of Math.*, 48 (1947), 643-649.
- [2] J. BIRMAN and H. HILDEN, On the mapping class group of closed surfaces as covering spaces, *Annals of Math. Studies*, 66 (1971), 81-115.

- [3] J. DYER and E. GROSSMAN, Automorphisms groups of braids groups, *Amer. J. of Math.*, 103 (1981), 1151-1169.
- [4] H. M. FARKAS, Automorphisms of compact Riemann surfaces, *Annals of Math. Studies*, 97 (1974), 121-144.
- [5] A. FATHI, F. LAUDENBACH et V. POÉNARU, Travaux de Thurston sur les surfaces, *Astérisque*, 66-67 (1979).
- [6] W. J. HARVEY, Cyclic groups of automorphisms of a compact Riemann surface, *Quart. J. Math.*, 17 (1966), 86-97.
- [7] S. P. HUMPHRIES, Generators for the mapping class group, *Topology of low dimensional manifolds, Lecture Notes in Math.*, 722 (1979), 44-47.
- [8] N. V. IVANOV, Algebraic properties of the Teichmüller modular group, *Soviet Math., Dokl.*, 29 (1984), 288-291.
- [9] D. JOHNSON, The structure of the Torelli group I: a finite set of generators for I. Preprint (1980).
- [10] J. McCARTHY, Automorphisms of surface mapping class groups. Manuscrit (1984).
- [11] J. POWELL, Two theorems on the mapping class group of a surface, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 68 (1978), 347-350.
- [12] T. R. TCHANGANG, Groupe de Torelli et Stratification de l'espace de Teichmüller d'une surface de genre deux. Thèse, Strasbourg, 1985.
- [13] H. ZIESCHANG, Finite groups of mapping classes of surfaces, *Lecture Notes in Math.*, 875 (1981), V.

Manuscrit reçu le 26 novembre 1985  
révisé le 21 avril 1986.

Roger Tambekou TCHANGANG,  
Institut de Mathématique  
7, rue René Descartes  
67084 Strasbourg Cedex (France).