ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL BALAZARD

Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier

Annales de l'institut Fourier, tome 40, nº 2 (1990), p. 255-270

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_2_255_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 2 (1990), 255-270

UNIMODALITÉ DE LA DISTRIBUTION DU NOMBRE DE DIVISEURS PREMIERS D'UN ENTIER

par Michel BALAZARD

1. Introduction.

Soit $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de l'entier positif n :

$$\omega(n) = \sum_{p \mid n} 1,$$

où la lettre p désigne un nombre premier générique.

Nous noterons $\pi(x,k)$ le nombre des entiers n vérifiant :

$$1 \leqslant n \leqslant x \qquad \text{et} \qquad \omega(n) = k.$$

Ainsi $\pi(1\,000,0) = 1$; $\pi(1\,000,1) = 194$; $\pi(1\,000,2) = 505$; $\pi(1\,000,3) = 277$; $\pi(1\,000,4) = 23$ et $\pi(1\,000,k) = 0$ pour $k \geqslant 5$. La suite 1, 194, 505, 277, 23 est unimodale : elle croît, atteint un maximum, puis décroît. De façon générale, une suite (u_k) de réels positifs ou nuls, définie pour k appartenant à un intervalle d'entiers, est dite unimodale s'il existe k_0 tel que $u_k \leqslant u_{k+1}$ si $k < k_0$ et $u_k \geqslant u_{k+1}$ si $k \geqslant k_0$.

Erdös a conjecturé en 1948 (cf. [5], p. 62) que pour tout x assez grand la suite $\pi(x,k)$ est unimodale, ainsi que les suites

$$\rho(x,k) := {}^{\#}\{n : 1 \leqslant n \leqslant x, n \text{ sans facteur carré et } \omega(n) = k\}$$

et

$$\sigma(x,k) := {}^{\#}\{n : 1 \leqslant n \leqslant x \text{ et } \Omega(n) = k\}$$

Mots-clés : Unimodalité - Diviseurs premiers.
Classification A.M.S. : 11 N.

où $\Omega(n) = \sum_{p^\nu \| n} \nu$ désigne le nombre total de facteurs dans la décomposition de n en produit de nombres premiers.

Le but de cet article est de confirmer la conjecture d'Erdös.

THÉORÈME. — *$\pi(x,k)$, $\rho(x,k)$ et $\sigma(x,k)$ sont pour x assez grand des fonctions unimodales de k.*

Dans [2] (théorème 3) nous avons démontré l'unimodalité de $\sigma(x,k)$ pour x assez grand, grâce aux arguments suivants :

1) Si $k > \dfrac{\log x}{\log 3}$, tout entier n compté dans $\sigma(x,k)$ est pair et $\dfrac{n}{2}$ est compté dans $\sigma(x,k-1)$, donc $\sigma(x,k) \leqslant \sigma(x,k-1)$;

2) On a l'équivalence asymptotique :

$$\frac{\sigma(x,k+1)}{\sigma(x,k)} \sim \max\left(\frac{1}{2}, \frac{\log\log x}{k}\right)$$

valable uniformément quand $\dfrac{x}{2^k}$ tend vers l'infini ; elle est déduite d'une estimation de $\sigma(x,k)$ due à l'auteur, Delange et Nicolas (cf. [3]) ;

3) On a une formule asymptotique plus précise, valable pour $k \leqslant (2-\varepsilon)\log\log x$, permettant de déceler une valeur k_0' telle que $\sigma(x,k) < \sigma(x,k+1)$ si $k < k_0'$ et $\sigma(x,k) > \sigma(x,k+1)$ si $k > k_0'$ (le k_0 de notre définition d'une suite unimodale est alors égal à k_0' ou $k_0'+1$).

Pour démontrer l'unimodalité de $\pi(x,k)$, la même approche conduit à d'importantes difficultés. Observons d'abord que $\pi(x,k)$ est non nul si et seulement si

$$2.3 \ldots p_k \leqslant x,$$

où p_j désigne le j-ème nombre premier. La résolution en k de cette inégalité donne $k \leqslant K$, où $K = K(x)$ est l'entier défini par l'encadrement $\theta(p_K) \leqslant \log x < \theta(p_{K+1})$, θ désignant la fonction de Tchebychev $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$. En utilisant le théorème des nombres premiers sous les formes

$$\theta(y) = y + O_\varepsilon(y \exp(-(\log y)^{3/5-\varepsilon})) \quad (\varepsilon > 0)$$

et

$$\pi(y) = \ell i(y) + O_\varepsilon(y \exp(-(\log y)^{3/5-\varepsilon})) \quad (\varepsilon > 0)$$

où ℓi désigne le logarithme intégral, on obtient successivement

$$p_K = \log x + O_\varepsilon(\log x . \exp(-(\log\log x)^{3/5-\varepsilon}))$$

et $K(x) = \pi(p_K) = \ell i(\log x) + O_\varepsilon(\log x . \exp(-(\log\log x)^{3/5-\varepsilon}))$, pour tout ε positif. On a en particulier, pour tout entier N positif ou nul :

$$K(x) = \frac{\log x}{\log\log x}\left(0\,! + \frac{1\,!}{\log\log x} + \cdots + \frac{N\,!}{(\log\log x)^N} + O_N\left(\frac{1}{(\log\log x)^{N+1}}\right)\right).$$

Les trois étapes de la démonstration de l'unimodalité de $\sigma(x,k)$ s'adaptent comme suit au cas de $\pi(x,k)$.

i) Nous décrivons au paragraphe 2 un argument combinatoire similaire à celui du 1), mais plus élaboré. Malheureusement, il ne donne que le résultat suivant :

$$\pi(x,k+1) \leqslant \pi(x,k) \quad \text{si} \quad k \geqslant \frac{\log x}{\log\log x}\left(1+\frac{c}{\log\log x}\right)$$

et

$$x \geqslant x_0(c),$$

c étant une constante arbitraire $> 1 - \log 2 = 0{,}306\,85...$

ii) Posons $F(z) = \dfrac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_p\left(1+\dfrac{z}{p-1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^z$. La formule classique de Sathe-Selberg (cf. [9]) est

$$(1) \quad \pi(x,k) = \frac{x}{\log x}F\left(\frac{k}{\log\log x}\right)\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)\,!}\left(1+O_B\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right)$$

uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant B\log\log x$, B positif fixé. Cette formule permet de démontrer l'existence d'une constante absolue C telle que, si $x \geqslant x_0(B)$:

$$\pi(x,k) < \pi(x,k+1) \quad \text{si} \quad k \leqslant \log\log x - C$$

et

$$\pi(x,k) > \pi(x,k+1) \quad \text{si} \quad \log\log x + C \leqslant k \leqslant B\log\log x.$$

D'autre part, grâce à une méthode nouvelle fondée sur la méthode du col, Hildebrand et Tenenbaum ont démontré dans [7] la relation

$$(2) \qquad \frac{\pi(x,k+1)}{\pi(x,k)} = \frac{L}{k}\left(1+O_D\left(\frac{\log L}{L}\right)\right),$$

uniformément pour $1 \leqslant k \leqslant D(\log x)(\log\log x)^{-2}$, $D > 0$ fixé, où $L = \log\log x - \log k - \log\log(k+1)$. Cela prouve que, si $x \geqslant x_0(D)$, l'inégalité $\pi(x,k) > \pi(x,k+1)$ est valable si

$$\log\log x + C \leqslant k \leqslant D(\log x)(\log\log x)^{-2}.$$

iii) La même méthode que dans [2] permet de préciser le $O_B((\log\log x)^{-1})$ de (1) à partir de la formule de Selberg:

$$\sum_{n \leqslant x} z^{\omega(n)} = zF(z)\,x(\log x)^{z-1} + O_B(x(\log x)^{\mathrm{Re}\,z-2}),$$

uniformément pour $x \geqslant 2$ et $|z| \leqslant B$. On lève ainsi l'incertitude sur le signe de $\pi(x,k+1) - \pi(x,k)$ dans l'intervalle $|k - \log\log x| < C$. Le plus petit entier k_0 réalisant le maximum de $\pi(x,k)$ a l'expression

$$k_0 = \log\log x + F'(1) + \Delta(x),$$

où $\liminf \Delta(x) = 0$ et $\limsup \Delta(x) = 1$ quand x tend vers l'infini. Il est intéressant de constater que $k_0 = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} + \Delta_0(x)$, où $\liminf \Delta_0(x) = -1$ et $\limsup \Delta_0(x) = 0$ quand x tend vers l'infini. En particulier, si $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}$ est à une distance $\geqslant \varepsilon > 0$ de l'entier le plus proche et si $x \geqslant x_0(\varepsilon)$, k_0 est la partie entière de $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}$ (cf. [3] pour plus de détails). On a le même résultat pour $\rho(x,k)$ et $\sigma(x,k)$ en remplaçant $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}$ par $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p+1}$ et $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p-1}$ respectivement.

En résumé, si D et η sont des nombres réels positifs fixés, nous savons qu'il existe $x_0 = x_0(D,\eta)$ tel que, si $x \geqslant x_0(D,\eta)$, $\pi(x,k)$ est unimodale pour $1 \leqslant k \leqslant D(\log x)(\log\log x)^{-2}$ (le maximum étant atteint pour $k = k_0 = \log\log x + O(1)$) et

$$\pi(x,k+1) \leqslant \pi(x,k) \quad \text{si} \quad k \geqslant \frac{\log x}{\log\log x}\left(1 + \frac{1 - \log 2 + \eta}{\log\log x}\right).$$

Pour terminer la démonstration de l'unimodalité de $\pi(x,k)$ on peut essayer d'étendre le domaine de validité de la relation (2). Nous laisserons ouverte cette importante question. Notre approche, indépendante des méthodes et des résultats de l'article [7] de Hildebrand et

Tenenbaum, est fondée sur des résultats d'Alladi et un raisonnement par récurrence sur k, comme nous l'expliquons au paragraphe 3. Les paragraphes 4 et 5 sont dévolus aux détails de la démonstration.

Je remercie les mathématiciens avec lesquels j'ai souvent discuté de ce problème, notamment Paul Erdös, Jean-Louis Nicolas et Gérald Tenenbaum. Cette recherche a été effectuée en grande partie alors que j'étais visiteur à l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de Hongrie. J'y ai bénéficié d'excellentes conditions de travail et d'utiles conversations avec Gabor Halász, Imre Ruzsa et Andras Sárközy : qu'ils en soient remerciés.

2. Un argument combinatoire.

Nous démontrons dans ce paragraphe que $\rho(x,k) \leqslant \rho(x,k-1)$ si $k \geqslant \dfrac{\log x}{\log\log x}\left(1+\dfrac{c}{\log\log x}\right)$ et $x \geqslant x_0(c)$, où c est une constante arbitraire $> 1 - \log 2 = 0{,}306\,85...$

On peut adapter cet argument pour montrer que $\pi(x,k)$ a la même propriété ; le raisonnement est nettement plus compliqué mais sans idée vraiment nouvelle par rapport au cas de $\rho(x,k)$.

Le lemme essentiel est le suivant :

LEMME 1. — *Soit E un ensemble à N éléments et $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des parties de E ayant k éléments. Si $k > \frac{N}{2}$, il existe une injection φ de $\mathscr{E}_k$ dans $\mathscr{E}_{k-1}$ telle que $\varphi(A) \subset A$ pour tout $A \in \mathscr{E}_k$.*

Cela résulte de la solution du « problèmes des mariages » comme l'ont montré Erdös et Nicolas dans [6] (proposition 6).

Notons $P(x,k)$ l'ensemble des $n \leqslant x$, sans facteur carré, tels que $\omega(n) = k$ et posons $f(k) = p_1 p_3 \cdots p_{2k-1}$, où p_j désigne le j-ème nombre premier. Nous construisons par récurrence sur k une injection i_k de $P(f(k),k)$ dans $P(f(k),k-1)$ telle que $i_k(n)$ divise toujours n.

Posons $i_1(2) = 1$. Supposons maintenant i_k définie ; l'ensemble des n sans facteur carré, tels que $\omega(n) = k+1$, et dont tous les diviseurs premiers sont $\leqslant p_{2k+1}$, est en bijection avec l'ensemble des parties à $k+1$ éléments de $\{1,2,\ldots,2k+1\}$. D'après le lemme 1, on peut associer injectivement à chacun de ces nombres n l'un de ses diviseurs m tels que $\omega(m) = k$: on pose $i_{k+1}(n) = m$. Maintenant, si le plus grand facteur premier p d'un élément n de $P(f(k+1), k+1)$ est supérieur à p_{2k+1}, n/p appartient à $P(f(k),k)$ et on peut poser $i_{k+1}(n) = pi_k(n/p)$. On vérifie facilement que i_{k+1} a les propriétés requises.

Si $x \leqslant f(k)$, et si on restreint i_k à $P(x,k)$, on obtient directement $\rho(x,k) \leqslant \rho(x,k-1)$. L'inégalité $x \leqslant f(k)$ s'écrit aussi :

$$\sum_{j=1}^{k} \log p_{2j-1} \geqslant \log x . \tag{3}$$

En utilisant l'approximation

$$\log p_n = \log n + \log\log n + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right),$$

on voit que (3) s'écrit :

$$k\left(\log k + \log\log k + \log 2 - 1 + O\left(\frac{\log\log k}{\log k}\right)\right) \geqslant \log x$$

et la résolution en k de cette dernière inégalité donne bien

$$k \geqslant \frac{\log x}{\log\log x}\left(1 + \frac{1 - \log 2 + o(1)}{\log\log x}\right), \quad (x \to +\infty).$$

3. Plan de la démonstration du théorème.

Notre idée principale est de considérer $\pi(x,k)$ comme cas particulier de la fonction de trois variables :

$$\pi(x,t,k) := \# \{n : 1 \leqslant n \leqslant x, (p \mid n) \Rightarrow (p > t), \omega(n) = k\}.$$

On a bien $\pi(x,k) = \pi(x,t,k)$ pour $t < 2$. L'intérêt de cette extension réside dans l'équation fonctionnelle

$$\pi(x,t,k+1) = \sum_{\substack{p > t \\ \alpha \geqslant 1}} \pi\left(\frac{x}{p^\alpha}, p, k\right) \tag{4}$$

sur laquelle est fondée notre raisonnement.

La démonstration de (4) est simple : tout entier n compté dans $\pi(x,t,k+1)$ s'écrit de manière unique $n = p^\alpha m$ où $p > t$, $\alpha \geqslant 1$, $m \leqslant x/p^\alpha$, m n'a que des diviseurs premiers $> p$ et $\omega(m) = k$.

Alladi a étudié dans [1] la distribution des valeurs de $\omega(n)$ quand n décrit l'ensemble $S(x,t)$ des entiers $n \leqslant x$ dont tous les diviseurs premiers sont $> t$. Il a notamment donné des formules asymptotiques pour la loi locale $\pi(x,t,k)$ quand k est du même ordre de grandeur que la valeur moyenne de $\omega(n)$, $n \in S(x,t)$, à savoir $\log u + O(1)$, où $u = \log x/\log t$. Nous donnerons au paragraphe 4 une présentation des résultats d'Alladi, modifiés afin de les rendre directement applicables à notre problème.

En nous appuyant sur (4), nous donnerons au paragraphe 5 un raisonnement par récurrence sur k prouvant le résultat suivant : si λ et μ sont des nombres réels donnés tels que $1 < \lambda < \mu$, il existe un entier positif $k_1 = k_1(\lambda,\mu)$ tel que

$$\pi(x,t,k+1) \leqslant \frac{1}{\lambda}\pi(x,t,k) \tag{5}$$

dès que

$$x \geqslant t \geqslant \frac{3}{2}$$

et

$$k \geqslant \mu \log u + k_1 .$$

En faisant $t = \frac{3}{2}$ on obtient l'unimodalité de $\pi(x,k)$, compte tenu de la situation décrite dans l'introduction. On a d'ailleurs la relation $\pi(x,k+1) = o(\pi(x,k))$ quand x et $k/\log\log x$ tendent vers l'infini.

Nous omettrons la démonstration de l'unimodalité de $\rho(x,k)$: elle est tout à fait similaire à celle faite pour $\pi(x,k)$. Le raisonnement par récurrence est alors nettement simplifié, du fait que seul l'exposant $\alpha = 1$ intervient dans l'équation fonctionnelle analogue à (4) (cf. [3]).

4. Lois locales pour $\omega(n)$, $n \in S(x,t)$.

Nous utilisons dans ce paragraphe le travail d'Alladi [1]. Signalons d'abord qu'il étudie en fait la quantité

$$\tilde{\pi}(x,t,k) := \#\{n : 1 \leqslant n \leqslant x,\ (p \mid n) \Rightarrow (p \geqslant t),\ \omega(n) = k\}.$$

Comme $\pi(x,t,k)$ est la limite à droite $\tilde{\pi}(x,t+0,k)$, nous citerons directement les conséquences de ses résultats pour la fonction $\pi(x,t,k)$.

Son analyse repose naturellement sur l'étude du polynôme générateur

$$S_z(x,t) = \sum_{n \in S(x,t)} z^{\omega(n)}$$

dont le comportement asymptotique est appréhendé de deux façons différentes selon que t est « petit » (méthode de Selberg) ou « grand » (méthode de l'équation fonctionnelle). Nous commençons par les petites valeurs de t.

LEMME 2. — *Soit $R > 0$. On a uniformément pour $\frac{3}{2} \leqslant t < \exp((\log x)^{2/5})$ et $|z| \leqslant R$,*

$$S_z(x,t) = zg(z,t)\frac{x}{\log x}u^z + O_R\left(\frac{x}{\log x}u^{\operatorname{Re} z-1}\right)$$

où $u = \dfrac{\log x}{\log t}$ et

$$g(z,t) = \frac{1}{\Gamma(z+1)}\left\{(\log t)^z \prod_{p \leqslant t}\left(1-\frac{1}{p}\right)^z\right\} \prod_{p>t}\left(1-\frac{1}{p}\right)^z\left(1+\frac{z}{p-1}\right).$$

Démonstration. — C'est le théorème 1 de [1], présenté ici de façon à insister sur le rôle de la variable u.

LEMME 3. — *La fonction $g(z,t)$ est une fonction entière de z, bornée uniformément par rapport à t dans tout domaine borné de valeurs de z (il en est donc de même pour ses dérivées); $g(z,t)$ est minorée par une constante positive $c(R)$ indépendante de t dans tout segment $0 \leqslant z \leqslant R$.*

Démonstration. — Cela résulte simplement des relations

$$\sum_{p \leqslant t} \log\left(1-\frac{1}{p}\right) = -\log\log t + O(1)$$

et

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^z\left(1+\frac{z}{p-1}\right) = 1 + O_R(p^{-2}) \quad (|z| \leqslant R).$$

Nous laissons les détails au lecteur.

LEMME 4. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe pour $|z| \leqslant R$ et v un réel positif. On pose $f(z)e^{vz} = c_0 + c_1 z + \cdots$*

Alors on a, pour $k \leqslant vR$:

$$\left| c_k - f\left(\frac{k}{v}\right)\frac{v^k}{k\,!}\right| \leqslant 2M\,\frac{v^k}{k\,!}\frac{k}{v^2} \qquad \text{où} \qquad M = \sup_{|z|\leqslant R} |f''(z)|\,.$$

Démonstration. — Ce lemme est classique dans la méthode de Selberg (voir [9] et, pour cet énoncé précis, [8] lemme 3).

LEMME 5. — *Soit $R > 0$. On a uniformément pour $\frac{3}{2} \leqslant t < \exp((\log x)^{2/5})$, $x \geqslant 3$ et $1 \leqslant k \leqslant R\log u$*

$$\pi(x,t,k) = g(r,t)\,\frac{x}{\log x}\,\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)\,!}\left(1+O_R\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right);\ \left(r=\frac{k-1}{\log u}\right).$$

Remarque. — Cette formule nous paraît plus naturelle que celle donnée par Alladi ([1] theorem 6) car nous comparons $\pi(x,t,k)$ à la loi de Poisson de paramètre $\log u$ au lieu de $\log\log x$. De plus, elle fournit un équivalent asymptotique uniforme pour $\pi(x,t,k)$ dans le domaine $\frac{3}{2} \leqslant t < \exp((\log x)^{2/5})$ et $1 \leqslant k \leqslant R\log u$, ce qui n'était pas le cas dans [1].

Démonstration. — Écrivons

$$S_z(x,t) = zg(z,t)\,\frac{x}{\log x}\,u^z + Q(x,z,t)\,\frac{x}{\log x}\,u^{z-1}\,. \tag{6}$$

D'après le lemme 2, $Q(x,z,t)$ est une fonction entière de z bornée uniformément par rapport à t et x $(3/2\leqslant t<\exp((\log x)^{2/5}))$ dans tout domaine borné de valeurs de z. La relation (6) donne

$$\pi(x,t,k) = \frac{x}{\log x}\,(c_{k-1}+c'_k)$$

où c_{k-1} (resp. c'_k) est le coefficient de z^{k-1} (resp. z^k) dans le développement de $g(z,t)u^z$ (resp. $Q(x,z,t)u^{z-1}$) suivant les puissances de z. Le lemme 4 donne alors, pour $1 \leqslant k \leqslant R\log u$,

$$c_{k-1} = g(r,t)\,\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)\,!} + O_R\left(\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)\,!}\,\frac{k-1}{(\log u)^2}\right)$$

et $$c'_k = Q\left(x, r+\frac{1}{\log u}, t\right)u^{-1}\,\frac{(\log u)^k}{k\,!} + O_R\left(u^{-1}\,\frac{(\log u)^k}{k\,!}\,\frac{k}{(\log u)^2}\right),$$

où $r = \dfrac{k-1}{\log u}\cdot$ Comme $\log u \gg \log\log x$ dans la zone considérée, et comme $g(r,t) \geqslant c(R) > 0$ d'après le lemme 3, le lemme 5 découle de ces estimations.

Passons maintenant aux grandes valeurs de t. Nous définissons par récurrence une suite de fonctions f_k :

$$f_1(u) = 1 \quad \text{pour} \quad u > 1$$

et

$$f_{k+1}(u) = \int_k^{u-1} f_k(v)\frac{dv}{v} \quad \text{pour} \quad u > k+1\,,\ k = 1, 2, \ldots$$

LEMME 6. — *Si $k \geqslant 1$ et $u > k+1$, on a :*

i) $f_{k+1}(u) = \displaystyle\int_{1<v_k<v_{k-1}<\cdots<v_1<u-k} dv_1 \cdots dv_k/(v_1+k-1)(v_2+k-2)\cdots(v_{k-1}+1)v_k$

ii) $\dfrac{1}{k!}(\log(u-1) - \log k)^k \leqslant f_{k+1}(u) \leqslant \dfrac{1}{k!}(\log(u-k))^k$

iii) $\log u \,.\, f_k(u) \geqslant k f_{k+1}(u)$.

Démonstration. — i) est évidente ; ii) découle de i) et de l'encadrement

$$\begin{aligned} v_1 v_2 \cdots v_k &\leqslant (v_1+k-1)(v_2+k-2)\cdots v_k \\ &\leqslant (v_1+k-1)(v_2+k-1)\cdots(v_k+k-1). \end{aligned}$$

La démonstration de iii) s'inspire d'un argument d'Erdös dans [5] ; il démontrait que

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n)=k+1}} \frac{1}{n} \leqslant \frac{\log\log x + O(1)}{k+1} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n)=k}} \frac{1}{n}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \log u \,.\, f_k(u) &= \int_1^u \frac{dv_1}{v_1} \int_{1<v_k<\cdots<v_2<u-k+1} dv_2 \cdots dv_k/(v_2+k-2)\cdots v_k \\ &\geqslant \int_{\substack{1<v_k<\cdots<v_2<u-k\\ 1<v_1<u-k}} dv_1 \cdots dv_k/v_1(v_2+k-2)\cdots v_k \\ &= \int_{1<v_1<v_k<\cdots<v_2<u-k} + \int_{1<v_k<v_1<v_{k-1}<\cdots<v_2<u-k} + \cdots \\ &\quad + \int_{1<v_k<v_{k-1}<\cdots<v_3<v_1<v_2<u-k} + \int_{1<v_k<\cdots<v_2<v_1<u-k} \end{aligned}$$

Dans chacune de ces k intégrales, les variables peuvent être renommées $v_1, \ldots, v_k$ de sorte que $1 < v_k < v_{k-1} < \cdots < v_2 < v_1 < u - k$ et l'intégrande est alors $\geqslant 1/(v_1+k-1)(v_2+k-2) \cdots v_k$ d'où le résultat.

LEMME 7. — *Soit* $R > 0$. *On a uniformément pour* $x \geqslant 3$, $\exp\{(\log\log x)^3\} < t < \sqrt{x}$ *et* $|z| \leqslant R$:

$$S_z(x,t) = \frac{x}{\log x}\left(M_z(u) + O_R\left(\frac{u^{|z|}}{\log x}\right)\right)$$

où $M_z(u) = \sum_{1 \leqslant k < u} f_k(u) z^k$.

Démonstration. — C'est le théorème 3 de [1].

LEMME 8. — *Soit* $R > 0$. *On a uniformément pour* $x \geqslant 3$, $\exp\{(\log\log x)^3\} < t < x^{1/\max(2,k)}$ *et* $1 \leqslant k \leqslant R \log u$:

$$\pi(x,t,k) = f_k(u)\frac{x}{\log x} + O_R\left(\frac{x}{\log^2 x}\sqrt{k}\,\frac{(\log u)^k}{k!}\right).$$

Remarque. — Alladi donne ([1], theorem 7) une formule pour $\pi(x,t,k)$, asymptotique à condition que u tende vers l'infini. La formule ci-dessus est plus précise pour les valeurs bornées de u, qui sont importantes dans notre raisonnement du paragraphe 5.

Démonstration. — En intégrant sur $|z| = r$, le lemme 7 et la formule intégrale de Cauchy prouvent que

$$\pi(x,t,k) = \frac{x}{\log x} f_k(u) + O_R\left(\frac{x}{\log^2 x} u^r r^{-k}\right),$$

pour tout $r \leqslant R$, $x \geqslant 3$, $\exp\{(\log\log x)^3\} < t < x^{1/k}$, $(t < x^{1/2}$ si $k = 1)$.

Le choix optimal $r = \dfrac{k}{\log u}$ et la formule de Stirling donnent le résultat.

5. Le raisonnement par récurrence.

Dans ce paragraphe, λ et μ désignent deux nombres réels fixés tels que $1 < \lambda < \mu$. Toutes les constantes qui interviennent dans ce paragraphe, littérales $(x_1, R, u_1, M, \varepsilon)$ ou implicites dans les O, $\ll$ et les « assez grand » sont des fonctions de λ et μ seulement. Nous définissons

$\pi(x,t,k)$ pour x et t réels, k entier, tels que $x > 1$, $t \geqslant 3/2$ et $k \geqslant 0$; x et t définissent $u = \dfrac{\log x}{\log t}\,(>0)$.

LEMME 9. — *Il existe un nombre réel $x_1 \geqslant 3$ tel que les conditions $x \geqslant x_1$ et $\mu \log u \leqslant k < \mu \log u + 1$ entraînent :*

$$\pi(x,t,k+1) \leqslant \frac{1}{\lambda}\,\pi(x,t,k).$$

Démonstration. — Si $k = 0$ on a $\log u \leqslant 0$ donc $x \leqslant t$ et

$$\pi(x,t,1) = 0 \leqslant \frac{1}{\lambda}\,\pi(x,t,0).$$

On peut donc supposer $k \geqslant 1$. D'autre part, si $t \geqslant x^{1/k+1}$ on a :

$$\pi(x,t,k+1) = 0 \leqslant \frac{1}{\lambda}\,\pi(x,t,k).$$

On peut donc supposer $t < x^{1/k+1}$, c'est-à-dire $u > k+1$. On en déduit que $1 \leqslant k < k+1 \leqslant R \log u$ avec $R = \mu + \dfrac{2}{\log 2}\cdot$

Ces remarques étant faites, nous étudions trois cas suivant l'ordre de grandeur de t. Commençons par supposer $\dfrac{3}{2} \leqslant t < \exp\{(\log x)^{2/5}\}$. Le lemme 5 nous donne

$$\pi(x,t,k+1) = g\left(r+\frac{1}{\log u},t\right)\frac{x}{\log x}\,\frac{(\log u)^k}{k\,!}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right)$$

$$\pi(x,t,k) = g(r,t)\,\frac{x}{\log x}\,\frac{(\log u)^{k-1}}{(k-1)\,!}\left(1+O\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right)$$

avec $r = \dfrac{k-1}{\log u}\cdot$ D'après le lemme 3 on a :

$$g\left(r+\frac{1}{\log u},t\right) = g(r,t) + O\left(\frac{1}{\log u}\right)$$

$$= g(r,t)\left(1+O\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right),$$

donc $\dfrac{\pi(x,t,k+1)}{\pi(x,t,k)} = \dfrac{\log u}{k}\left(1+O\left(\dfrac{1}{\log\log x}\right)\right) < \dfrac{1}{\lambda}$ si x est assez grand.

Maintenant, si $\exp\{(\log x)^{2/5}\} \leqslant t < x^{1/k+1}$, on a d'après le lemme 8 :

$$\pi(x,t,k+1) = f_{k+1}(u)\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\sqrt{k}\frac{(\log u)^k}{k\,!}\right)$$

et

$$\pi(x,t,k) \quad = f_k(u)\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\sqrt{k}\frac{(\log u)^k}{k\,!}\right),$$

d'où

$$(7) \quad \pi(x,t,k) - \lambda\pi(x,t,k+1)$$
$$= \frac{x}{\log x}(f_k(u) - \lambda f_{k+1}(u)) + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\sqrt{k}\frac{(\log u)^k}{k\,!}\right).$$

Supposons d'abord u assez grand, disons $u \geqslant u_1$. Nous aurons, d'après le lemme 6 :

$$\begin{aligned} f_k(u) - \lambda f_{k+1}(u) &\geqslant f_{k+1}(u)\left(\frac{k}{\log u} - \lambda\right) \\ &\geqslant (\mu - \lambda)\frac{(\log(u-1) - \log k)^k}{k\,!} \\ &= (\mu - \lambda)\frac{(\log u + O(\log\log u))^k}{k\,!} \\ &= \frac{(\log u)^{k+O(1)}}{k\,!} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \pi(x,t,k) &- \lambda\pi(x,t,k+1) \\ &\geqslant \frac{x}{\log x}\frac{(\log u)^{k+O(1)}}{k\,!}\left(1 + O\left(\sqrt{k}\frac{(\log u)^{O(1)}}{\log x}\right)\right), \\ &> 0 \text{ si } x \text{ est assez grand,} \end{aligned}$$

puisque $k \ll \log u \ll \log\log x$.

Enfin, si $u < u_1$, on peut utiliser (7) sous la forme

$$\pi(x,t,k) - \lambda\pi(x,t,k+1) \geqslant \frac{x}{\log x}(f_k(u) - \lambda f_{k+1}(u)) - M\frac{x}{\log^2 x},$$

où M est une constante positive. Pour chaque entier k, $1 \leqslant k < u_1 - 1$, notons I_k l'intervalle, éventuellement vide, $]k+1, \exp(k/\mu)]$. D'après le lemme 6 la fonction $f_k(u) - \lambda f_{k+1}(u)$ est continue sur I_k, strictement positive, et sa limite en $k+1$ est $f_k(k+1) > 0$. On en déduit l'existence d'une constante $\varepsilon > 0$ telle que :

$$f_k(u) - \lambda f_{k+1}(u) \geqslant \varepsilon$$

si

$$k \geqslant 1, k+1 < u \leqslant u_1 \quad \text{et} \quad k \geqslant \mu \log u.$$

Il en résulte que :

$$\pi(x,t,k) - \lambda\pi(x,t,k+1) \geqslant \frac{x}{\log x}\left(\varepsilon - \frac{M}{\log x}\right) > 0 \quad \text{si } x \text{ est assez grand.}$$

LEMME 10. — *Les conditions $t \geqslant x_1$ et $k \geqslant \mu \log u$ entraînent*

$$\pi(x,t,k+1) \leqslant \frac{1}{\lambda}\pi(x,t,k).$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur k. Si $k=0$, on a $u \leqslant 1$ donc $\pi(x,t,1) = 0 \leqslant \frac{1}{\lambda}\pi(x,t,0)$.

Supposons le résultat vrai pour l'entier k et démontrons-le pour l'entier $k+1$. Nous supposons donc $k+1 \geqslant \mu \log u$. On a :

$$\pi(x,t,k+2) = \sum_{\substack{p>t \\ \alpha\geqslant 1, p^\alpha<x}} \pi\left(\frac{x}{p^\alpha}, p, k+1\right).$$

Si $k \geqslant \mu \log u$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à chaque terme de la somme car $\frac{x}{p^\alpha} > 1$, $p > t \geqslant x_1$ et

$$k \geqslant \mu \log\left(\frac{\log(x/p^\alpha)}{\log p}\right).$$

On obtient alors :

$$\pi(x,t,k+2) \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{p>t \\ \alpha\geqslant 1, p^\alpha<x}} \pi\left(\frac{x}{p^\alpha}, p, k\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}\pi(x,t,k+1)$$

où la dernière inégalité n'est stricte que si $k=0$ et si x est une puissance d'un nombre premier $> t$.

Il reste le cas où $\mu \log u \leqslant k+1 < \mu \log u + 1$. Si $x < x_1 \leqslant t$, on a $\pi(x,t,k+2) = 0 \leqslant \frac{1}{\lambda}\pi(x,t,k+1)$, et si $x \geqslant x_1$ le lemme 9 s'applique (à l'entier $k+1$ au lieu de k).

Nous démontrons (5), et donc le théorème, dans le lemme suivant.

LEMME 11. – *La condition $k \geqslant \mu \log u + \pi(x_1)$ entraîne*

$$\pi(x,t,k+1) \leqslant \frac{1}{\lambda}\pi(x,t,k).$$

Démonstration. – On peut supposer $x \geqslant t$ et, vu le lemme 10, $t < x_1$. Notons a un entier positif générique tel que :

$$p \mid a \Rightarrow t < p \leqslant x_1 .$$

Nous aurons $\omega(a) \leqslant \pi(x_1) \leqslant k$ et

$$\pi(x,t,k+1) = \sum_{a<x} \pi\left(\frac{x}{a}, x_1, k+1-\omega(a)\right).$$

Comme $\frac{x}{a} > 1$ et

$$\begin{aligned} k - \omega(a) &\geqslant \mu \log u + \pi(x_1) - \omega(a) \\ &\geqslant \mu \log\left(\frac{\log (x/a)}{\log x_1}\right), \end{aligned}$$

le lemme 10 nous donne

$$\begin{aligned} \pi(x,t,k+1) &\leqslant \frac{1}{\lambda}\sum_{a<x} \pi\left(\frac{x}{a}, x_1, k-\omega(a)\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\pi(x,t,k) \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. ALLADI, The distribution of $v(n)$ in the sieve of Eratosthenes, Quart. J. Math. Oxford, (2), 33 (1982), 129-148.

[2] M. BALAZARD, Comportement statistique du nombre de facteurs premiers des entiers, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1987-1988, Birkhaüser, C. Goldstein éd., 1-21.

[3] M. Balazard, Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres, à paraître au Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux.

[4] M. Balazard, H. Delange et J.-L. Nicolas, Sur le nombre de facteurs premiers des entiers, C.R.A.S., 306 série I (1988), 511-514.

[5] P. Erdös, On the integers having exactly k prime factors, Ann. of Math., 49 (1948), 53-66.

[6] P. Erdös et J.-L. Nicolas, Méthodes probabilistes et combinatoires en théorie des nombres, Bull. Sci. Math., (2), 100 (1976), 301-320.

[7] A. Hildebrand et G. Tenenbaum, On the number of prime factors of an integer, Duke Math. J., 56 (1988), 471-501.

[8] J.-L. Nicolas, Autour de formules dues à A. Selberg, Colloque Hubert Delange, Publications Mathématiques d'Orsay, 1982.

[9] A. Selberg, Note on a paper by L. G. Sathe, J. Indian Math. Soc., 18 (1954), 83-87.

Manuscrit reçu le 8 juin 1989,
révisé le 26 février 1990.

Michel Balazard,
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
123, rue Albert-Thomas
87060 Limoges Cedex.