ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES CHAUMAT
ANNE-MARIE CHOLLET

Régularité höldérienne de l'opérateur $\overline{\partial}$ sur le triangle de Hartogs

Annales de l'institut Fourier, tome 41, n° 4 (1991), p. 867-882
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_4_867_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 4 (1991), 867-882.

RÉGULARITÉ HÖLDÉRIENNE DE L'OPÉRATEUR $\bar{\partial}$ SUR LE TRIANGLE DE HARTOGS

par J. CHAUMAT et A.-M. CHOLLET

Introduction.

Soit $\mathbf{T}$, le triangle de Hartogs de $\mathbf{C}^2$,

$$\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C}^2 ; |z_2| < |z_1| < 1\}.$$

Ce domaine pseudoconvexe célèbre jouit de propriétés très intéressantes. En effet, sa frontière est une sous-variété de classe C^1 par morceaux en dehors de 0 mais n'est pas une variété au voisinage de 0. Son adhérence $\bar{\mathbf{T}}$ n'a pas de base de voisinages de Stein. Plus précisément, toute fonction holomorphe dans un voisinage de $\bar{\mathbf{T}}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans le polydisque unité de $\mathbf{C}^2$, $\mathbb{P} = \{z \in \mathbf{C}^2 ; |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. On a même beaucoup mieux : toute fonction de $A^\infty(\bar{\mathbf{T}})$, la classe des fonctions indéfiniment dérivables sur $\bar{\mathbf{T}}$ et holomorphes dans $\mathbf{T}$, se prolonge en une fonction holomorphe dans $\mathbb{P}$. On en tire alors que, si ζ est un point de $\mathbb{P} \backslash \bar{\mathbf{T}}$, il n'existe pas de couple (h_1, h_2) de fonctions de $A^\infty(\bar{\mathbf{T}})$, solution de l'équation

$$(*) \qquad h_1(z)(\zeta_1 - z_1) + h_2(z)(\zeta_2 - z_2) = 1$$

pour tout z de $\mathbf{T}$.

On déduit de là, par un argument classique [4] et [5], que, si on note $\alpha(z)$ la (0, 1) forme différentielle réelle analytique et $\bar{\partial}$-fermée dans

---

Mots-clés : Formules intégrales - Équations de Cauchy-Riemann - Triangle de Hartogs.
Classification A.M.S. : 32A25 - 32F15.

un voisinage de $\bar{\mathbf{T}}$, définie par

$$\alpha(z) = (-(\bar{z}_1-\bar{\zeta}_1)\, d\bar{z}_2+(\bar{z}_2-\bar{\zeta}_2)\, d\bar{z}_1)|z-\zeta|^{-4},$$

l'équation $\bar{\partial}u = \alpha$ n'a pas de solution u dans $C^\infty(\bar{\mathbf{T}})$.

Cet exemple montre l'importance de l'hypothèse de *s-H* convexité introduite dans [1] et [2]. Elle assure, pour un compact K de $\mathbf{C}^n$, l'existence d'une bonne base de voisinages de Stein et permet de résoudre l'équation

$$(**) \qquad \bar{\partial}u = f$$

dans $C^\infty(K)$ et dans les classes ultradifférentiables sur K à l'aide d'une formule intégrale. En effet, sous cette hypothèse, on peut trouver, pour chaque ζ proche de K, un couple de fonctions (h_1, h_2) holomorphes en z dans un voisinage V_ζ de K, suffisamment régulières en ζ et vérifiant l'équation (*). On sait l'importance de l'existence d'un tel couple encore appelé section du fibré de Cauchy-Leray lorsque l'on souhaite construire un noyau intégral pour résoudre (**).

On montre ici que, en l'absence de base de voisinages de Stein et à la différence du cas C^∞, l'on peut résoudre l'équation (**) dans les classes höldériennes $C^{p,\alpha}(\bar{\mathbf{T}})$, p entier, $p \geqslant 1$, et α, réel, $0 < \alpha < 1$. On exhibe tout d'abord, pour chaque p entier, un couple (h_1, h_2), solution de l'équation (*). Contrairement à la situation des compacts *s-H* convexes, les fonctions h_1 et h_2 sont holomorphes seulement dans $\mathbf{T}$ et d'une régularité dépendant de p sur $\bar{\mathbf{T}}$. On construit ensuite, comme dans le travail des auteurs [1] déjà cité, un opérateur intégral dépendant de p résolvant l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans les classes correspondantes $C^{p,\alpha}(\bar{\mathbf{T}})$.

1. Définitions et notations.

Soit $\mathbf{T} = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 ; |z_2| < |z_1| < 1\}$, le triangle de Hartogs.

Ici, $C^{p,\alpha}(\bar{\mathbf{T}})$ désigne l'espace des fonctions ou des formes différentielles f de classe C^p dans $\mathbf{T}$ telles que, pour tout multi-indice β de longueur $|\beta| \leqslant p$, on ait

$$\sup_{x,y\in\mathbf{T}} \frac{|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$$

et on note $\|f\|_{C^{p,\alpha}(\bar{\mathbf{T}})}$ la norme associée.

Dans le cas de $\mathbf{C}^2$ on simplifie la notation en écrivant $C^{p,\alpha}$ au lieu de $C^{p,\alpha}(\mathbf{C}^2)$.

On note

$$H = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2, |z_2| < |z_1|\}$$
$$H^c = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2, |z_1| < |z_2|\}$$
$$\partial H = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2, |z_1| = |z_2|\}.$$

2. Construction d'une section du fibré de Cauchy-Leray sur $H \times H^c$.

Soit $(z,\zeta) \in H \times H^c$; on considère l'équation

$$h_1(z,\zeta)(\zeta_1 - z_1) + h_2(z,\zeta)(\zeta_2 - z_2) = 1. \tag{1}$$

On se propose de trouver h_1 et h_2, holomorphes en z dans H, pour ζ fixé dans H^c, solutions de cette équation. Un tel couple définit une section du fibré de Cauchy-Leray sur $H \times H^c$. On a

$$\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1 = \zeta_2(\zeta_1 - z_1) - \zeta_1(\zeta_2 - z_2) \tag{2}$$

et donc, un premier couple est donné par l'identité

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1}(\zeta_1 - z_1) - \frac{\zeta_1}{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1}(\zeta_2 - z_2) = 1, \tag{3}$$

puisque, pour (z,ζ) dans $H \times H^c$, on a $\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1 \neq 0$.

Mais lorsque z_1 et z_2 tendent vers 0, ces solutions ne sont pas bornées. On cherche donc des solutions plus régulières.

Puisque ζ appartient à H^c, on a $\zeta_2 \neq 0$ et donc, d'après (3), pour tout ℓ entier, $\ell \geqslant 1$, on a

$$\frac{\zeta_2}{(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)}\left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^\ell (\zeta_1 - z_1) - \frac{\zeta_1}{(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)}\left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^\ell (\zeta_2 - z_2) = \left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^\ell$$

dans $H \times H^c$.

On peut réécrire cette égalité sous la forme suivante :

$$\frac{\zeta_2}{(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)}\left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^\ell (\zeta_1 - z_1)$$
$$+ \left(\left(\frac{1}{\zeta_2}\right)^\ell (\zeta_2^{\ell-1} + \zeta_2^{\ell-2} z_2 + \cdots + z_2^{\ell-1}) - \frac{\zeta_1}{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1}\left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^\ell\right)(\zeta_2 - z_2) = 1.$$

Si on pose, pour tout ℓ entier, $\ell \geqslant 1$,

$$h_1(z,\zeta) = \frac{\zeta_2}{(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)}\left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^{\ell} \tag{4}$$

$$h_2(z,\zeta) = \left(\frac{1}{\zeta_2}\right)^{\ell}\left(\zeta_2^{\ell-1} + \zeta_2^{\ell-2} z_2 + \cdots + z_2^{\ell-1}\right) - \frac{\zeta_1}{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1}\left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^{\ell} \tag{5}$$

on a, dans $H \times H^c$,

$$h_1(z,\zeta)(\zeta_1 - z_1) + h_2(z,\zeta)(\zeta_2 - z_2) = 1\,. \tag{6}$$

Pour ζ fixé, ζ dans H^c, lorsque z tend vers 0, z dans H, on a

$$\frac{z_2^{\ell}}{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1} = z_2^{\ell-1}\left(\zeta_1 - \zeta_2 \frac{z_1}{z_2}\right)^{-1}.$$

Puisque l'on a $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \geqslant 1$, on obtient $\left|\zeta_2 \frac{z_1}{z_2} - \zeta_1\right| \geqslant |\zeta_2| - |\zeta_1|$, et donc, si $\ell > 1$, on a

$$\lim_{z \to 0,\, z \neq 0} h_1(z,\zeta) = 0\,.$$

En fait, la fonction h_1 s'étend en une fonction de classe $C^{\ell-2}$ sur $\bar{T}$ dont toutes les dérivées d'ordre $(\ell - 1)$ sont bornées ; ainsi, si $\ell = 1$, la fonction h_1 est simplement bornée.

3. Estimations des dérivées en z.

Soit $\ell > 1$ et (β_1, β_2) un multi-indice vérifiant $\beta = \beta_1 + \beta_2 < \ell$, on a

$$\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial z_1^{\beta_1}} h_1 = z_2^{\ell} \frac{\beta_1 !}{(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)^{1+\beta_1}} \zeta_2^{-\ell+1+\beta_1}$$

et donc

$$\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}}{\partial z_1^{\beta_1} \partial z_2^{\beta_2}} h_1 = \beta_1 !\, \zeta_2^{\beta_1-\ell+1} \sum_{j=0}^{\beta_2} C_{\beta_2}^{j} \frac{\ell !}{(\ell - \beta_2 + j)!} z_2^{\ell-\beta_2+j} (-1)^j \frac{(\beta_1 + j)!\, \zeta_1^{j}}{\beta_1 !\, (\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)^{1+\beta_1+j}}.$$

Il existe donc une constante, D_0, $D_0 > 1$, ne dépendant que de ℓ, telle que l'on ait

$$(7)\quad \left|\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}}{\partial z_1^{\beta_1}\,\partial z_2^{\beta_2}} h_1(z,\zeta)\right| \leqslant D_0 \frac{|z_2|^{\ell-(\beta+1)}}{\left|1-\dfrac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{\beta+1} |\zeta_2|^{\ell}}$$

$$\left|\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}}{\partial z_1^{\beta_1}\,\partial z_2^{\beta_2}} h_2(z,\zeta)\right| \leqslant D_0 \sum_{\beta_2 < s \leqslant \ell} \frac{|z_2|^{s-(\beta_2+1)}}{|\zeta_2|^{s}} + \frac{|z_2|^{\ell-(\beta+1)}}{\left|1-\dfrac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{\beta+1} |\zeta_2|^{\ell}}.$$

4. Construction d'une section du fibré de Cauchy-Leray sur T × ($\mathbf{C}^2\backslash\bar{\mathbf{T}}$).

On note

$$(8)\quad \begin{aligned} E_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 ; x>1, y-x<\tfrac{1}{2}(x-1)\}\\ E_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 ; x>1, \tfrac{1}{2}(x-1)\leqslant y-x\leqslant x-1\}\\ E_3 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 ; x>1, x-1<y-x\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 ; x\leqslant 1, x<y\}\\ E_0 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 ; x<1, y<x<1\}. \end{aligned}$$

Soit g une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive et vérifiant $g(t)=1$ pour $t\leqslant 1/2$ et $g(t)=0$ pour $t\geqslant 1$.

On définit alors, dans $\mathbb{R}_+^2\backslash\bar{E}_0$, f par

$$(9)\quad \begin{aligned} f(x,y) &= 0 && \text{si}\quad (x,y)\in E_3\\ f(x,y) &= 1 && \text{si}\quad (x,y)\in E_1\\ f(x,y) &= g\left(\frac{y-x}{x-1}\right) && \text{si}\quad (x,y)\in E_2. \end{aligned}$$

La fonction f est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}_+^2\backslash\bar{E}_0$ et il existe une constante $D(\alpha_1+\alpha_2)$ telle que l'on ait

$$(10)\quad \left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1}\,\partial y^{\alpha_2}} f(x,y)\right| \leqslant D(\alpha_1+\alpha_2)\frac{1}{(|x-1|+|y-1|)^{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

En effet, là où les dérivées de g ne sont pas nulles, elles sont uniformément bornées et on a $|x-1|\approx|y-1|$.

On note, pour $i = 0, 1, 2, 3$,

$$E'_i = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \,;\, (|z_1|, |z_2|) \in E_i\}.$$

On a

$$\mathbf{C}^2 \backslash \bar{\mathbf{T}} = \bigcup_{i=1,2,3} E'_i.$$

On définit alors, pour $(z,\zeta) \in \mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \backslash \bar{\mathbf{T}}$,

$$(11) \quad \begin{aligned} s_1(z,\zeta) &= h_1(z,\zeta)[1 - f(|\zeta_1|, |\zeta_2|)] + \frac{1}{(\zeta_1 - z_1)} f(|\zeta_1|, |\zeta_2|) \\ s_2(z,\zeta) &= h_2(z,\zeta)[1 - f(|\zeta_1|, |\zeta_2|)]. \end{aligned}$$

Il importe de remarquer que les fonctions h_1 et h_2 ne sont pas définies si ζ appartient à $H \backslash \bar{\mathbf{T}}$. Mais, si ζ appartient à $H \backslash \bar{\mathbf{T}}$, on a $f = 1$. De là s_1 et s_2 sont bien définies et ont la même régularité que h_1 et h_2 sur $\mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \backslash \bar{\mathbf{T}}$.

On a

$$s_1(z,\zeta) = \frac{1}{z_1 - \zeta_1} \text{ dans } E'_1, \qquad s_2(z,\zeta) = 0 \text{ dans } E'_1$$

$$s_1(z,\zeta) = h_1(z,\zeta) \text{ dans } E'_3, \qquad s_2(z,\zeta) = h_2(z,\zeta) \text{ dans } E'_3$$

et donc, pour tout $(z,\zeta) \in \mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \backslash \bar{\mathbf{T}}$,

$$s_1(z,\zeta)(\zeta_1 - z_1) + s_2(z,\zeta)(\zeta_2 - z_2) = 1.$$

5. Estimations de la distance à T d'un point ζ de $\mathbf{C}^2 \backslash \bar{\mathbf{T}}$.

Remarque. — Il existe une constante D_1, $D_1 > 1$, telle que l'on ait

$$(12) \quad \begin{aligned} &|\zeta_1| - 1 \leqslant d(\zeta, \mathbf{T}) \leqslant D_1(|\zeta_1| - 1) && \text{pour tout } \zeta \in E'_1, \\ &\left.\begin{aligned} &D_1^{-1}(|\zeta_1| - 1) \leqslant d(\zeta, \mathbf{T}) \leqslant D_1(|\zeta_1| - 1) \\ &D_1^{-1}(|\zeta_2| - |\zeta_1|) \leqslant d(\zeta, \mathbf{T}) \leqslant D_1(|\zeta_2| - |\zeta_1|) \end{aligned}\right\} && \text{pour tout } \zeta \in E'_2, \\ &D_1^{-1}(|\zeta_2| - |\zeta_1|) \leqslant d(\zeta, \mathbf{T}) \leqslant D_1(|\zeta_2| - |\zeta_1|) && \text{pour tout } \zeta \in E'_3. \end{aligned}$$

Ici $d(\zeta, \mathbf{T})$ désigne la distance de ζ à $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{C}^2$; on peut remarquer que c'est aussi la distance de $(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$ à E_0 dans $\mathbb{R}^2_+$.

6. Notations.

On note, comme dans [1] et [3], pour tout (z,ζ) de $\mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \backslash \overline{\mathbf{T}}$ et pour tout λ de $[0,1]$

$$\omega(\zeta) = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

$$\omega'(z,\zeta) = (\bar\zeta_1 - \bar z_1)(d\bar\zeta_2 - d\bar z_2) - (\bar\zeta_2 - \bar z_2)(d\bar\zeta_1 - d\bar z_1)$$

$$\eta_j(z,\zeta,\lambda) = (1-\lambda)s_j(z,\zeta) + \lambda \frac{\bar\zeta_j - \bar z_j}{|\zeta - z|^2}, j = 1,\ 2,$$

$$|\zeta - z|^2 = \sum_{j=1}^{2} |\zeta_j - z_j|^2$$

et

$$\bar\theta(z,\zeta,\lambda) = \frac{1}{(2i\pi)^2}[\eta_1(z,\zeta,\lambda)(\bar\partial_\zeta + \bar\partial_z + d_\lambda)\eta_2(z,\zeta,\lambda) - \eta_2(z,\zeta,\lambda)(\bar\partial_\zeta + \bar\partial_z + d_\lambda)\eta_1(z,\zeta,\lambda)].$$

Pour (z,ζ,λ) dans $\mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \backslash \overline{\mathbf{T}} \times [0,1]$, on a

$$\eta_1(z,\zeta,\lambda)(\zeta_1 - z_1) + \eta_2(z,\zeta,\lambda)(\zeta_2 - z_2) = 1$$

et donc

$$(\bar\partial_\zeta + \bar\partial_z + d_\lambda)(\bar\theta \wedge \omega) = 0. \tag{13}$$

On a

$$\bar\theta(z,\zeta,\lambda) \wedge \omega(\zeta)|_{\lambda=0} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \frac{\omega'(z,\zeta) \wedge \omega(\zeta)}{\sum_{j=1}^{2} |\zeta_j - z_j|^2}.$$

7. Formule intégrale pour résoudre $\bar\partial u = f$ dans le triangle de Hartogs.

PROPOSITION 1. — *Soient p un entier, $p \geqslant 1$, α un réel, $0 < \alpha < 1$, et v une $(0,1)$ forme différentielle de classe $C^{p,\alpha}$ dans $\mathbf{C}^2$, à support compact dans la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 2 vérifiant $\bar\partial v = 0$ sur $\mathbf{T}$.*

La fonction définie pour z dans **T** *par*

$$(14)\quad u(z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\{\zeta\in \mathbf{C}^2\setminus \mathbf{T}\,;|\zeta|\leqslant 2\}\times[0,1]} \bar\partial v(\zeta)\wedge(\eta_1 d_\lambda\eta_2-\eta_2 d_\lambda\eta_1)\wedge\omega(\zeta) + \frac{1}{(2i\pi)^2}\int_{\{\zeta\in\mathbf{C}^2\,;|\zeta|\leqslant 2\}} \frac{v(\zeta)\wedge\omega'(z,\zeta)\wedge\omega(\zeta)}{|\zeta-z|^2}$$

vérifie dans **T** *l'équation* $\bar\partial u = v$.

Preuve. – Par hypothèse sur v, il existe une constante D_2, $D_2 > 1$, telle que l'on ait

$$(15)\qquad |\bar\partial v(w)| \leqslant D_2 d(w,\mathbf{T})^{p-1+\alpha}\|v\|_{C^{p,\alpha}}.$$

On considère alors la forme différentielle γ définie sur $\mathbf{T}\times\mathbf{C}^2\setminus\bar{\mathbf{T}}\times[0,1]$ par

$$\gamma(z,\zeta,\lambda) = \bar\partial v(\zeta)\wedge\bar\theta(z,\zeta,\lambda)\wedge\omega(\zeta).$$

On a donc, en utilisant (13),

$$(d_\zeta+d_\lambda)\gamma = -\,\bar\partial_z(\bar\partial v(\zeta)\wedge\bar\theta(z,\zeta,\lambda)\wedge\omega(\zeta)).$$

On remarque que $\bar\partial v(\zeta)\wedge\omega(\zeta)$ est de type 4 en $(\zeta,\bar\zeta)$; en conséquence

$$\gamma = \bar\partial v(\zeta)\wedge\frac{1}{(2i\pi)^2}[\eta_1(\bar\partial_z+d_\lambda)\eta_2 - \eta_2(\bar\partial_z+d_\lambda)\eta_1]\wedge\omega(\zeta)$$

et

$$(d_\zeta+d_\lambda)\gamma = d_\lambda\gamma.$$

On constate donc que, dans γ et $(d_\zeta+d_\lambda)\gamma$, n'interviennent pas de dérivations de η_1 et η_2 donc de s_1 et s_2 par rapport aux variables $(\zeta,\bar\zeta)$. En conséquence, si on note $\delta(z,\zeta,\lambda)$ un coefficient d'une des formes γ ou $(d_\zeta+d_\lambda)\gamma$, pour tout sous-ensemble compact K de **T**, il existe une constante $D(K,v)$, $D(K,v)\geqslant 1$, telle que l'on ait, pour tout (z,ζ,λ) dans $K\times\mathbf{C}^2\setminus\bar{\mathbf{T}}\times[0,1]$,

$$(16)\qquad |\delta(z,\zeta,\lambda)| \leqslant D(K,v)|\zeta_2|^{-\ell} d(\zeta,\mathbf{T})^{p-1+\alpha}.$$

Puisque $\bar\partial v$ est nulle sur **T**, on peut prolonger γ par 0 sur $\mathbf{T}\times\mathbf{T}\setminus\{0,0\}\times[0,1]$. On obtient alors une forme, notée encore γ, continue sur $\mathbf{T}\times\mathbf{C}^2\setminus\{0,0\}\times[0,1]$ vérifiant

$$(17)\qquad (d_\zeta+d_\lambda)\gamma = d_\lambda\gamma = -\,\bar\partial_z\gamma.$$

Soit ε un réel, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\cdot$ Pour z fixé dans $\mathbf{T}$, on applique la formule de Stokes à γ sur $\{\zeta \in \mathbf{C}^2 ; \varepsilon \leqslant |\zeta| \leqslant 2\} \times [0,1]$. On obtient

$$(18) \qquad -\bar{\partial}_z \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2;\varepsilon \leqslant |\zeta| \leqslant 2\} \times [0,1]} \gamma = \int_{\partial[\{\zeta \in \mathbf{C}^2;\varepsilon \leqslant |\zeta| \leqslant 2\} \times [0,1]]} \gamma .$$

La forme γ est de type 4 en $(\zeta,\bar{\zeta})$; donc, dans l'intégrale figurant au deuxième membre de (18), la seule partie de la frontière donnant une contribution non nulle est $\{\zeta \in \mathbf{C}^2 ; \varepsilon \leqslant |\zeta| \leqslant 2\} \times \partial[0,1]$.

On a, d'après (16), pour tout λ de $[0,1]$,

$$(19) \qquad \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2 ;|\zeta| \leqslant \varepsilon\}} |\delta(z,\zeta,\lambda)|\, dm(\zeta) \leqslant D(K,v) \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2;|\zeta| \leqslant \varepsilon\} \cap H^c} |\zeta_2|^{-\ell}\, d(\zeta,\mathbf{T})^{p-1+\alpha}\, dm(\zeta)$$

où m désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{C}^2$.

On remarque que, pour $\zeta \in H^c$, $|\zeta_2| \geqslant d(\zeta,\mathbf{T})$ et $|\zeta_2| \geqslant \dfrac{|\zeta_1| + |\zeta_2|}{2}$ donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2 ;|\zeta| \leqslant \varepsilon\}} |\delta(z,\zeta,\lambda)|\, dm(\zeta) = 0$$

dès que l'on a

$$(20) \qquad p + \alpha + 3 > \ell .$$

On supposera (20) vérifié dans toute la suite.

On peut donc passer à la limite lorsque ε tend vers 0 dans l'égalité (18) et on obtient

$$(21) \qquad -\bar{\partial}_z \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2 ;|\zeta| \leqslant 2\} \times [0,1]} \gamma = \int_{\partial[\{\zeta \in \mathbf{C}^2 ;|\zeta| \leqslant 2\} \times [0,1]]} \gamma .$$

On peut alors conclure comme dans [1] que la fonction $u(z)$ définie pour z dans $\mathbf{T}$ par (14) vérifie dans $\mathbf{T}$ l'équation $\bar{\partial} u = v$. Ceci achève la preuve de la proposition.

8. Estimations de la solution u dans $\bar{\mathbf{T}}$.

On note $I_1(z)$ et $I_2(z)$ respectivement la première et la deuxième intégrale figurant au second membre de (14). Puisque v est de classe $C^{p,\alpha}$, la fonction $I_2(z)$ est de classe $C^{p+1,\alpha}$; on se propose maintenant d'étudier la régularité de $I_1(z)$.

Après intégration en λ, si on note

$$v(\zeta) = v_1(\zeta)\, d\bar{\zeta}_1 + v_2(\zeta)\, d\bar{\zeta}_2,$$

il existe une constante D_3 telle que l'on ait, pour tout z de $\mathbf{T}$,

$$(22)\quad I_1(z) = D_3 \int_{\{\zeta\in \mathbf{C}^2\setminus\bar{\mathbf{T}};|\zeta|\leqslant 2\}} \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_2} v_1\right) \times \frac{s_1(z,\zeta)(\bar{\zeta}_2-\bar{z}_2) - s_2(z,\zeta)(\bar{\zeta}_1-\bar{z}_1)}{|\zeta - z|^2}\, dm(\zeta).$$

On a donc à estimer, si D_z^β est une dérivée quelconque de longueur β en z,

$$D_z^\beta \frac{s_j(z,\zeta)(\bar{\zeta}_k-\bar{z}_k)}{|\zeta - z|^2} \quad \text{pour} \quad j = 1,2 \;\; k = 1,2 \;\; j \neq k.$$

On peut remarquer ici que, pour z fixé dans $\mathbf{T}$, dans l'intégration par rapport à ζ dans $\mathbf{C}^2\setminus\bar{\mathbf{T}} \cap \{|\zeta|<10\}$, la singularité de chacune des fonctions $s_i(z,\zeta)$, $i = 1,2$, est la même que celle de chacune de leurs dérivées par rapport à z, c'est-à-dire du type $|\zeta_2|^{-\ell}$. On conclut aisément, comme plus haut, que, p étant fixé, $d(\zeta,\mathbf{T})^{p-1+\alpha}|\zeta_2|^{-\ell}$ est intégrable dans $\{\zeta\in\mathbf{T}^c ; |\zeta|<10\}$ dès que l'on a $p + \alpha + 3 > \ell$ et donc que la fonction $I_1(z)$ est de classe C^∞ dans l'ouvert $\mathbf{T}$.

PROPOSITION 2. — *Pour $\ell = p + 2$, la fonction $u(z)$ est de classe $C^{p,\alpha}$ dans $\bar{\mathbf{T}}$.*

Preuve. — On doit vérifier que $I_1(z)$ est de classe $C^{p,\alpha}$ dans $\bar{\mathbf{T}}$. Il suffit pour cela d'établir pour une dérivée quelconque d'ordre $p + 1$ de $I_1(z)$, en un point z de $\mathbf{T}$, que l'on a

$$(23)\qquad |D_z^{p+1} I_1(z)| \leqslant D_4\, d(z,\mathbf{C}^2\setminus\bar{\mathbf{T}})^{-1+\alpha}\, \|v\|_{C^{p,\alpha}}.$$

Ce résultat est bien connu pour un domaine D à bord de classe C^1 par morceaux. En effet la preuve de cette propriété est locale. Elle nécessite qu'il existe, pour δ assez petit et tout couple de points z et

z' de D vérifiant $d(z,\partial D) < \delta$, $d(z',\partial D) < \delta$ et $|z-z'| < \delta/2$, un chemin dans D joignant z à z' ayant de bonnes propriétés (Appendice I, proposition 2, [3]). Bien que $\partial \mathbf{T}$ ne soit pas de classe C^1 par morceaux au voisinage de l'origine on peut s'assurer de l'existence d'un tel chemin, pour z et z' dans $\mathbf{T}$ voisins de l'origine.

On a, à partir de (11) et des estimations de h_1 et h_2 données en (7),

$$(24)\quad \left| D_z^{p+1} \frac{s_j(z,\zeta)(\bar\zeta_k - \bar z_k)}{|\zeta - z|^2} \right| \leqslant D_5\Bigg(f(|\zeta_1|,|\zeta_2|) \sum_{k=0}^{p+1} \frac{1}{|z_1-\zeta_1|^{k+1}|\zeta - z|^{p+2-k}} + (1-f(|\zeta_1|,|\zeta_2|)) \sum_{k=0}^{p+1} \frac{|z_2|^{\ell-(k+1)}}{\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{k+1} |\zeta_2|^{\ell} |\zeta - z|^{p+2-k}} + (1-f(|\zeta_1|,|\zeta_2|)) \sum_{k=0}^{p+1} \sum_{k<s\leqslant \ell} \frac{|z_2|^{s-(k+1)}}{|\zeta_2|^{s}|\zeta - z|^{p+2-k}}\Bigg).$$

On déduit de (15), de (22) et de (24) qu'il existe une constante D_6 telle que l'on ait,

$$(25)\quad |D_z^{p+1} I_1(z)| \leqslant D_6 \|v\|_{C^{p,\alpha}} \Bigg(\sum_{k=0}^{p+1} \int_{\{\zeta\in E_1'\cup E_2';\, |\zeta|<10\}} \frac{(|\zeta_1|-1)^{p-1+\alpha}}{|z_1-\zeta_1|^{k+1}(|\zeta - z|)^{p+2-k}} dm(\zeta) + \sum_{k=0}^{p+1} \int_{\{\zeta\in E_2'\cup E_3';\, |\zeta|\leqslant 10\}} \frac{(|\zeta_2|-|\zeta_1|)^{p-1+\alpha} |z_2|^{\ell-(k+1)}}{\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{k+1} |\zeta_2|^{\ell}|\zeta - z|^{p+2-k}} dm(\zeta) + \sum_{k=0}^{p+1} \sum_{k<s\leqslant \ell} \int_{\{\zeta\in E_2'\cup E_3';\, |\zeta|<10\}} \frac{(|\zeta_2|-|\zeta_1|)^{p-1+\alpha}|z_2|^{s-(k+1)}}{|\zeta_2|^{s}|\zeta - z|^{p+2-k}} dm(\zeta)\Bigg).$$

On note

$$(26)\quad I_3(z,k) = \int_{\{\zeta\in E_1'\cup E_2';\, |\zeta|<10\}} \frac{(|\zeta_1|-1)^{p-1+\alpha}}{|z_1-\zeta_1|^{k+1}|\zeta - z|^{p+2-k}} dm(\zeta).$$

Puisque z est dans $\mathbf{T}$ et ζ dans $E_1'\cup E_2'$, on a $0 \leqslant |\zeta_1| - 1 \leqslant |z_1-\zeta_1|$ et donc

$$I_3(z,k) \leqslant \int_{\{\zeta\in E_1'\cup E_2';\, |\zeta|<10\}} \frac{(|\zeta_1|-1)^{\alpha}}{|z_1-\zeta_1|^{3}|\zeta - z|} dm(\zeta).$$

Après intégration en ζ_2, il existe une constante D_7 telle que l'on ait

$$I_3(z,k) < D_7 \int_{1<|\zeta_1|<10} \frac{(|\zeta_1|-1)^\alpha}{|z_1-\zeta_1|^3}\, dm(\zeta_1).$$

On note $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$.

Si l'on a $|z_1| \leqslant 1/2$, alors clairement, $I_3(z,k)$ est bornée.

Si l'on a $|z_1| > 1/2$, on note $\zeta_1 = re^{i(\theta+\theta_1)}$ et on obtient

$$I_3(z,k) \leqslant D_8 \int_{1<r<10,\, -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi} \frac{(r-1)^\alpha r\, dr\, d\theta}{||z_1|-re^{i\theta}|^3}.$$

On utilise maintenant pour $|z_1| > 1/2$ le fait qu'il existe une constante D_9 telle que l'on ait

$$||z_1|-re^{i\theta}| \geqslant D_9(r-|z_1|+|\theta|)$$

ce qui conduit à

$$I_3(z,k) \leqslant D_{10} \int_{1<r<10,\, -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi} \frac{(r-1)^\alpha r\, dr\, d\theta}{|(r-|z_1|)+|\theta||^3}.$$

On intègre maintenant en θ et on a

$$I_3(z,k) \leqslant D_{11} \int_{1<r<10} \frac{(r-1)^\alpha r\, dr}{((r-1)+1-|z_1|)^2}.$$

On intègre ensuite en r et on a

$$(27) \qquad I_3(z,k) \leqslant D_{12}(1-|z_1|)^{\alpha-1} \leqslant D_{13}d(z,\mathbf{C}^2\backslash\bar{\mathbf{T}})^{\alpha-1}.$$

On considère maintenant

$$(28) \quad I_4(z,k) = \int_{\{\zeta\in E_2'\cup E_3';\, |\zeta|<10\}} \frac{(|\zeta_2|-|\zeta_1|)^{p-1+\alpha}|z_2|^{\ell-(k+1)}}{\left|1-\dfrac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{k+1} |\zeta_2|^\ell|\zeta-z|^{p+2-k}}\, dm(\zeta).$$

On a, en utilisant l'hypothèse $\ell = p+2$ et $0 \leqslant k \leqslant p+1$,

$$|z_2|^{\ell-(k+1)} = |z_2|^{p+1-k} \leqslant \sum_{t=0}^{p+1-k} C_{p+1-k}^t|\zeta_2|^t|\zeta_2-z_2|^{p+1-k-t}$$

et donc,

$$\frac{|z_2|^{p+1-k}}{|\zeta|^{p+2}|\zeta-z|^{p+2-k}} \leqslant \sum_{t=0}^{p+1-k} \frac{C_t^{p+1-k}}{|\zeta_2|^{p+2-t}|\zeta-z|^{t+1}}.$$

On a aussi,

$$\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right| = \frac{|\zeta_2 z_1-\zeta_1 z_2|}{|\zeta_2 z_1|} = \frac{|z_1(\zeta_2-z_2)+z_2(z_1-\zeta_1)|}{|\zeta_2 z_1|}$$
$$\leqslant \frac{|z_1|(|\zeta_2-z_2|+|z_1-\zeta_1|)}{|\zeta_2 z_1|} \leqslant \frac{(|\zeta_2-z_2|+|z_1-\zeta_1|)}{|\zeta_2|}.$$

On a donc, pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant p+1$, et tout t, $0 \leqslant t \leqslant p+1-k$,

$$\frac{1}{\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{k+1} |\zeta_2|^{p+2-t}|\zeta-z|^{t+1}} \leqslant \frac{1}{\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{k+1+t} |\zeta_2|^{p+2}|\zeta-z|}$$
$$\leqslant \frac{D_{14}}{\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{p+2} |\zeta_2|^{p+2}|\zeta-z|}$$

et de là,

$$\frac{|z_2|^{p+1-k}}{\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{k+1} |\zeta_2|^{p+2}|\zeta-z|^{p+2-k}} \leqslant \frac{D_{15}}{\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{p+2} |\zeta_2|^{p+2}|\zeta-z|}.$$

On obtient donc

$$I_4(z,k) \leqslant D_{15}\int_{\{\zeta\in E_2'\cup E_3';|\zeta|<10\}} \frac{(|\zeta_2|-|\zeta_1|)^{p-1+\alpha}}{\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{p+2} |\zeta_2|^{p+2}|\zeta-z|}\,dm(\zeta)$$
$$\leqslant D_{15}\int_{\{\zeta\in E_2'\cup E_3';|\zeta|<10\}} \frac{\left(1-\left|\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right|\right)^{p-1+\alpha}}{\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{p+2} |\zeta_2|^{3-\alpha}|\zeta-z|}\,dm(\zeta).$$

Il existe donc une constante D_{16} telle que l'on ait, pour tout z de $\mathbf{T}$ et pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant p+1$,

$$I_4(z,k) \leqslant D_{16}\int_{\{\zeta\in\mathbf{C}^2;|\zeta_1|<|\zeta_2|,|\zeta|<10\}} \frac{1}{\left|1-\frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{3-\alpha} |\zeta_2|^{3-\alpha}|\zeta-z|}\,dm(\zeta)$$

puisque l'on a

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| < 1.$$

On pose $\zeta_1 = \theta\zeta_2$; on a $|\theta| < 1$ et $dm(\zeta_1,\zeta_2) = |\zeta_2|^2\, dm(\theta,\zeta_2)$. On déduit de là

$$I_4(z,k) \leqslant D_{16} \int_{\{|\theta|<1;|\zeta_2|\leqslant 10\}} \frac{|\zeta_2|^2}{\left|1-\theta\dfrac{z_2}{z_1}\right|^{3-\alpha} |\zeta_2|^{3-\alpha}|\zeta_2 - z_2|}\, dm(\theta,\zeta_2)$$

$$\leqslant D_{16} \int_{\{|\theta|<1\}} \frac{1}{\left|1-\theta\dfrac{z_2}{z_1}\right|^{3-\alpha}}\, dm(\theta) \int_{\{\zeta_2;|\zeta_2|<10\}} \frac{1}{|\zeta_2|^{1-\alpha}|\zeta_2 - z_2|}\, dm(\zeta_2).$$

L'intégrale en ζ_2 converge et est bornée indépendamment de z. Ceci conduit à

$$I_4(z,k) \leqslant D_{17} \int_{\{|\theta|<1\}} \frac{1}{\left|1-\theta\dfrac{z_2}{z_1}\right|^{3-\alpha}}\, dm(\theta).$$

On pose $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = a$, on a $0 < a < 1$.

Si l'on $a < 1/2$, l'intégrale en θ est bornée indépendamment de z.

Si l'on $a > 1/2$, on pose $\psi = 1 - \theta\dfrac{z_2}{z_1}$ et on obtient

$$(29)\quad I_4(z,k) \leqslant D_{18} \int_{\{\psi;1-a\leqslant|\psi|\leqslant 2\}} \frac{1}{|\psi|^{3-\alpha}}\, dm(\psi) = D_{19}\int_{1-\alpha}^{2} \frac{r}{r^{3-\alpha}}\, dr$$

$$\leqslant D_{20}(1-a)^{\alpha-1} = D_{20}\left(1-\left|\frac{z_2}{z_1}\right|\right)^{\alpha-1} = D_{20}|z_1|^{1-\alpha}(|z_1|-|z_2|)^{\alpha-1}$$

$$\leqslant D_{20}d(z,\mathbf{C}^2\backslash\bar{\mathbf{T}})^{\alpha-1}.$$

On considère maintenant, pour $0 \leqslant k \leqslant p+1$ et $k \leqslant s \leqslant p+2$,

$$(30)\quad I_5(z,s,k) = \int_{\{\zeta\in E'_2\cup E'_3;|\zeta|<10\}} \frac{(|\zeta_2|-|\zeta_1|)^{p-1+\alpha}|z_2|^{s-(k+1)}}{|\zeta_2|^s|\zeta - z|^{p+2-k}}\, dm(\zeta).$$

En utilisant un calcul analogue à celui mené pour estimer $I_4(z,k)$, on a

$$I_5(z,s,k) \leqslant \sum_{t=0}^{s-(k+1)} C^t_{s-(k+1)} \int_{\{\zeta\in\mathbf{C}^2;|\zeta_1|<|\zeta_2|,|\zeta|<10\}} \frac{(|\zeta_2|-|\zeta_1|)^{p+1+\alpha}}{|\zeta_2|^{s-t}|\zeta - z|^{p+3-s+t}}\, dm(\zeta).$$

En remarquant que l'on a

$$|\zeta_2| - |\zeta_1| \leqslant |\zeta - z| \qquad \text{et} \qquad |\zeta_2| \geqslant |\zeta_2| - |\zeta_1|$$

et que,

si $\zeta \in \{|\zeta| < 10\,;|\zeta_1| < |\zeta_2|\}$ on a $2|\zeta_2| > |\zeta_1| + |\zeta_2| > |\zeta_2|$

on conclut que les intégrales apparaissant dans $I_5(z,s,k)$ sont majorées par l'une ou l'autre des intégrales suivantes

$$\int_{\{|\zeta|<10\}} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta|^{3-\alpha}|\zeta-z|}, \qquad \int_{\{|\zeta|<10\}} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta|^{2-\alpha}|\zeta-z|^2}, \qquad \int_{\{|\zeta|<10\}} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta|^{1-\alpha}|\zeta-z|^3}.$$

Puisque ces trois intégrales sont uniformément bornées pour z dans $\mathbf{T}$ on obtient

$$I_5(z,s,k) \leqslant D_{21}. \tag{31}$$

Les estimations (25), (27), (29) et (31) conduisent à (23) ce qui achève la preuve de la proposition.

9. Régularité de l'opérateur $\bar\partial$ dans les classes höldériennes.

THÉORÈME. — *Soit f une* (0,1) *forme,* $\bar\partial$-fermée sur $\mathbf{T}$, *de classe $C^{p,\alpha}$ sur $\mathbf{T}$ avec p entier, $p \geqslant 1$ et α réel, $0 < \alpha < 1$. Alors, il existe une fonction u de classe $C^{p,\alpha}$ sur $\mathbf{T}$ vérifiant*

$$\bar\partial u = f \quad sur \quad \mathbf{T}$$

et

$$\|u\|_{C^{p,\alpha}(\mathbf{T})} \leqslant D_{22}\|f\|_{C^{p,\alpha}(\mathbf{T})},$$

avec D_{22} une constante qui dépend de p et de α.

De plus cette solution est donnée par un opérateur linéaire.

Preuve. — Soit p un entier, $p \geqslant 1$ et α un réel, $0 < \alpha < 1$. On sait [6] qu'il existe un opérateur E, dépendant de p, de $C^{p,\alpha}(\mathbf{T})$ dans $C^{p,\alpha}$ tel que l'on ait, pour toute fonction g de $C^{p,\alpha}(\mathbf{T})$,

$D_z^\ell E(g) = D_z^\ell g$ sur $\mathbf{T}$, pour toute dérivation D_z^ℓ de longueur ℓ, $\ell \leqslant p$,

$E(g)$ est à support compact dans la boule $B(0;2)$,

$$\|E(g)\|_{C^{p,\alpha}} \leqslant D_{22}\|g\|_{C^{p,\alpha}(\mathbf{T})},$$

avec une constante D_{22} qui ne dépend que de p et de α.

Le théorème s'en déduit en utilisant les propositions 1 et 2 avec $v = Ef$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Chaumat et A.-M. Chollet, Noyaux pour résoudre l'équation $\bar{\partial}$ dans des classes ultradifférentiables sur des compacts irréguliers de $\mathbf{C}^n$. Several complex variables, Proc. Mittag-Leffler Inst. 1987/1988, Math. Notes 38, Princeton Univ. Press, à paraître.

[2] A. Dufresnoy, Sur l'opérateur d'' et les fonctions différentiables au sens de Whitney, Ann. Inst. Fourier, 29-1 (1979), 229-238.

[3] G. M. Henkin et J. Leiterer, Theory of functions on complex manifolds, Monographs in Mathematics, Birkhaüser Verlag, 79 (1984).

[4] L. Hormander, Generators for some rings of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 273-292.

[5] N. Øvrelid, Generators of the maximal ideals of $A(\bar{D})$, Pacific J. Math., 39 (1971), 219-223.

[6] E. M. Stein, Singular integrals and diffentiability properties of functions, Princeton Mathematical Series, Princeton Univ. Press, 1970.

Manuscrit reçu le 17 avril 1991.

J. Chaumat et A.-M. Chollet,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.