ANNALES DE L’INSTITUT FOURIER

FRANCISCO JAVIER GONZÁLEZ VIELI

Intégrales trigonométriques et pseudofonctions

Annales de l’institut Fourier, tome 44, n° 1 (1994), p. 197-211

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_1_197_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 1 (1994), 197-211

INTÉGRALES TRIGONOMÉTRIQUES ET PSEUDOFONCTIONS (*)

par F.J. GONZÁLEZ VIELI

I. Introduction.

En 1963, Kahane et Salem établissent une caractérisation des fermés d'unicité sur $\mathbb{T}$ en termes de support de pseudofonctions ([KS] chap. V). Pour ce faire ils démontrent l'équivalence suivante : si $S \in PF(\mathbb{T})$ et E est un fermé de $\mathbb{T}$, alors $\operatorname{supp} S \subset E$ si et seulement si $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{-N}^{N} \widehat{S}(k)\, e^{2\pi ikt} = 0$ quel que soit t dans $\mathbb{T} \setminus E$.

Dans ce travail, nous démontrons un analogue de cette équivalence sur $\mathbb{R}^n$:

THÉORÈME. — *Soient $S \in PM(\mathbb{R}^n)$ avec $\widehat{S}(t) = o(\|t\|^{1-n})$ à l'infini et E un fermé de $\mathbb{R}^n$. Alors* $\operatorname{supp} S \subset E$ *si et seulement si* $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_{\|t\|\le N} \widehat{S}(t)\; e^{2\pi i(x|t)}\; dt = 0$ *quel que soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.*

Nous restreindrons notre démonstration au cas $n \geq 2$. En effet, pour $n = 1$ les idées de Kahane et Salem s'adaptent aisément. Par contre, en plusieurs variables il n'existe pas d'analogue direct au lemme de Schwarz sur la deuxième dérivée symétrique (cf. [AW]); aussi avons-nous utilisé le laplacien intégral (employé par exemple par Shapiro [Sh]) et la fonction

---

(*) Ce travail a pu être réalisé grâce à une bourse de la Royal Society dans le cadre de son "European Science Exchange Programme".

Mots-clés : Pseudofonctions – Intégrales trigonométriques – Fonction de Riemann - Laplacien intégral.
Classification A.M.S. : 42B10.

de Riemann qui découle de ce choix. Cependant la démarche générale de Kahane et Salem a été maintenue (voir [Ba], [Z], [KS], [KL]).

2. Définitions, notations.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, nous notons sa transformée de Fourier

$$\widehat{f}(y) = \mathcal{F} f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i (x|y)}\, dx.$$

L'ensemble $A(\mathbb{R}^n) = \{\mathcal{F} f \mid f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ muni de la norme $\| \mathcal{F} f \|_A = \|f\|_1$ est une algèbre de Banach. Son dual est noté $PM(\mathbb{R}^n)$: c'est l'ensemble des *pseudomesures* sur $\mathbb{R}^n$.

L'application $\mathcal{F}$ de $L^1(\mathbb{R}^n)$ sur $A(\mathbb{R}^n)$ se transpose en une application, toujours notée $\mathcal{F}$, de $PM(\mathbb{R}^n)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ vu comme le dual de $L^1(\mathbb{R}^n)$: si $T \in PM(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi = \mathcal{F} f \in A(\mathbb{R}^n)$,

$$T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F} T(t)\, f(t)\, dt.$$

Une pseudomesure T est dite nulle sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ si, quelle que soit $\varphi \in A(\mathbb{R}^n)$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ (ce que nous notons $\varphi \in A(U)$), $T(\varphi) = 0$. Le support de la pseudomesure T, noté $\operatorname{supp} T$, est alors le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle est nulle .

Étant donnés $T \in PM(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in A(\mathbb{R}^n)$, on peut définir une pseudomesure, notée φT, sur $\mathbb{R}^n$ en posant $(\varphi T)(\psi) = T(\varphi\psi)$; on a $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(y) \neq 0\} \cap \operatorname{supp} T \subset \operatorname{supp} \varphi T \subset \operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi$.

On appelle *pseudofonction* toute pseudomesure dont la transformée de Fourier est une fonction continue disparaissant à l'infini; on note $PF(\mathbb{R}^n)$ leur ensemble. (Sur tout ceci, voir [Be].)

Nous notons $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions à décroissance rapide, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des distributions sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ celui des distributions tempérées.

Une fonction f localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$ définit une distribution, que nous notons $[f]$, par, si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$[f](\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\psi(t)\, dt.$$

Via [ ], nous avons les inclusions, pour $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

D'autre part $\mathcal{F}$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même; elle se transpose donc en un automorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, d'inverse noté $\overline{\mathcal{F}}$.

Par suite toute pseudomesure T, de transformée de Fourier $\mathcal{F}T = \tau \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, s'identifie à la distribution tempérée $\overline{\mathcal{F}}([\tau])$; en particulier, la distribution $\overline{\mathcal{F}}([\tau])$ est nulle sur un ouvert U si et seulement si c'est le cas pour la pseudomesure T.

3. Bref rappel sur les fonctions de Bessel.

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν ($\nu \in \mathbb{R}_+$) est définie par (cf. [W])

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(1+k+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Nous nous intéresserons à son comportement sur $\mathbb{R}_+$. Remarquons d'abord que $|J_\nu(x)| \leq 1$ pour $x \geq 0$.

À l'aide des relations

$$\frac{d}{dz}(z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz}(z^{-\nu} J_\nu(z)) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z),$$

des majorations sur $\mathbb{R}_+$ $J_0(x) \leq 1$, $J_{1/2}(x) \leq \sqrt{\dfrac{2x}{\pi}}$ et d'une double récurrence nous obtenons la

PROPOSITION 1. — *Soit $\nu \in 1/2(\mathbb{Z}_+)$; alors, pour $x \geq 0$ et quel que soit l'entier $m \geq 0$,*

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(1+k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \leq J_\nu(x) \leq \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(1+k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

4. Fonction de Riemann et laplacien intégral.

DÉFINITION 1. — *Soit τ une fonction bornée sur $\mathbb{R}^n$ et appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n, (1+\|x\|^2)^{-1}dx)$. Nous définissons la* fonction de Riemann associée *à τ, notée F_τ (ou F lorsque aucune équivoque n'est possible) par*

$$F(x) = -\int_{\|t\|\leq 1} \frac{e^{2\pi i(x|t)} - 1 - 2\pi i(x|t)}{4\pi^2\|t\|^2}\,\tau(t)\,dt \; - \int_{\|t\|\geq 1} \frac{e^{2\pi i(x|t)}}{4\pi^2\|t\|^2}\tau(t)\,dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque. — La condition « $\tau \in L^1(\mathbb{R}^n, (1+\|x\|^2)^{-1}dx)$ » , résumée dorénavant par $\tau \in \mathcal{I}(-2)$, nous assure que la fonction de Riemann F_τ associée à τ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 2. — *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x \in U$ et g une fonction définie sur U. On appelle* laplacien intégral de g en x *la limite, si elle existe,*

$$\widetilde{\Delta} g(x) \;=\; \lim_{r\to 0_+} \frac{2(n+2)}{r^2}\left(\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B(0,r)} g(x+y)\,dy \;-\; g(x)\right),$$

avec la notation $\omega_n = \dfrac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — de sorte que $\dfrac{r^n}{n}\omega_n$ est égal au volume de la boule $B(0,r)$ de centre 0 et de rayon r.

Remarque. — Si g est C^∞ au voisinage de x, on vérifie que $\widetilde{\Delta} g(x)$ existe et est égal au laplacien usuel de g en x, $\Delta g(x)$. Si g n'est que continue, on a l'important résultat suivant, dû a Szpilrajn [Sz] :

PROPOSITION 2. — *Soit g une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Supposons que son laplacien intégral, $\widetilde{\Delta} g$, soit identiquement nul sur U. Alors g est harmonique sur U.*

5. Le premier lemme de Riemann.

La fonction de Riemann associée à τ a été construite de manière à ce que, calculé formellement, son laplacien (au sens usuel) « vaille » $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \tau(t)\, e^{2\pi i(x|t)}\,dt$. Nous allons montrer que, dans un cas précis, il est possible de donner un sens à cet heuristique.

Prenons τ dans $\mathcal{I}(-2)$ et x dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\|t\|\leq N} \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}\, \tau(t)\, dt$$

existe et vaille I.

Calculons le laplacien intégral de F_τ en x.

Comme F est continue sur $\mathbb{R}^n$, nous pouvons l'intégrer sur la boule $B(x,r)$; alors

$$\int_{B(0,r)} (F(x+y) - F(x))\, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tau(t)}{4\pi^2\|t\|^2}\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)} \left(\int_{B(0,r)} (1 - \mathrm{e}^{2\pi i(y|t)})\, dy \right) dt$$

en utilisant Fubini et l'identité $\displaystyle\int_{B(0,r)} (y|t)\, dt = 0$.

Nous avons ([SW] p. 155)

$$\int_{B(0,r)} \mathrm{e}^{2\pi i(y|t)}\, dy = \left(\frac{r}{\|t\|}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi\|t\|r),$$

cette égalité se prolongeant par continuité en $t = 0$. Donc

$$\int_{B(0,r)} (F(x+y) - F(x))\, dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tau(t)}{4\pi^2\|t\|^2}\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)} \left(\frac{r^n}{n}\omega_n - \left(\frac{r}{\|t\|}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi\|t\|r) \right) dt$$

ce qui est égal, en passant aux coordonnées polaires, à

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2\rho^2} \left(\frac{r^n}{n}\omega_n - \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi\rho r) \right) h(\rho)\, \rho,$$

où nous avons posé $h(\rho) = \displaystyle\int_{S^{n-1}} \tau(\rho y)\ \mathrm{e}^{2\pi i(x|\rho y)}\ \rho^{n-1}\, d\sigma(y)$.

Notons

$$V_r(a) = \frac{1}{4\pi^2 a^2} \left(\frac{r^n}{n}\omega_n - \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi r a) \right);$$

à l'aide du développement limité de $J_{\frac{n}{2}}$ à l'ordre $\dfrac{n}{2} + 2$, on voit que $V_r(0) = \omega_n \dfrac{r^n}{n} \dfrac{r^2}{2(n+2)}$.

Posons $v_r(a) = V_r'(a)$; au vu de la relation $J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z)$, il vient

$$v_r(a) = \frac{-r^n \omega_n}{2n\pi^2 a^3} - \frac{r^{\frac{n}{2}+1}}{2\pi a^{\frac{n}{2}+2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi r a) + \frac{(2+n) r^{\frac{n}{2}}}{4\pi^2 a^{\frac{n}{2}+3}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi r a)$$

et, toujours avec les développements limités, on a que, au voisinage de 0, $v_r(a) = O(a)$.

Par conséquent, quel que soit $M > 0$, nous pouvons faire l'intégration par parties suivante :

$$\int_0^M V_r(a) h(a)\, da = \left(\int_0^u h(s) ds \right) V_r(u) \Big|_{u=0}^M - \int_0^M \left(\int_0^a h(s) ds \right) v_r(a)\, da.$$

Or d'une part

$$\begin{aligned} \int_0^a h(s)\, ds &= \int_0^a ds \int_{S^{n-1}} \tau(sy)\ \mathrm{e}^{2\pi i (x|sy)}\ s^{n-1} d\sigma(y) \\ &= \int_{\|t\| \le a} \tau(t)\, \mathrm{e}^{2\pi i (x|t)}\ dt \end{aligned}$$

et donc, puisque par hypothèse $\lim\limits_{N \to +\infty} \displaystyle\int_{\|t\| \le N} \mathrm{e}^{2\pi i (x|t)}\, \tau(t)\, dt$ existe, la fonction $a \mapsto \displaystyle\int_0^a h(s)\, ds$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

D'autre part, parce que $|J_\nu(y)| \le 1$ si $y \ge 0$, $\lim\limits_{M \to +\infty} V_r(M) = 0$ et v_r est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Il suit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4\pi^2 a^2} \left(\frac{r^n}{n} \omega_n - \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi a r) \right) h(a)\, da$$
$$= - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a h(s)\, ds \right) v_r(a)\, da.$$

D'où

$$\lim_{r \to 0_+} \frac{2(n+2)}{r^2} \left(\frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B(0,r)} (F(x+y) - F(x))\, dy \right)$$
$$= \lim_{r \to 0_+} - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a h(s)\, ds \right) \frac{2n(n+2)}{r^{n+2} \omega_n} v_r(a)\, da.$$

Notons

$$\begin{aligned} g_r(a) = \frac{2n(n+2)}{r^{n+2}\omega_n}\, v_r(a) = \frac{-(n+2)}{\pi^2 r^2 a^3} &- \frac{n(n+2)}{\omega_n \pi r^{\frac{n}{2}+1} a^{\frac{n}{2}+2}} J_{\frac{n}{2}-1}(2\pi r a) \\ &+ \frac{n(n+2)^2}{\omega_n 2\pi^2 r^{\frac{n}{2}+2} a^{\frac{n}{2}+3}}\ J_{\frac{n}{2}}(2\pi r a). \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 1, on montre aisément que $-\pi^2 r^2 a \leq g_r(a) \leq \dfrac{n+2}{n+4}\pi^2 r^2 a$ pour tout $a > 0$.

Par conséquent,

1) $\lim\limits_{r\to 0_+} g_r(a) = 0$ quel que soit $a > 0$;

2) si nous supposons $r \leq 1$, alors $|g_r|$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$ par la fonction localement intégrable $\pi^2 a$.

Nous avons de plus, en posant $u = ra$,

$$\int_0^{+\infty} |g_r(a)|\,da = \int_0^{+\infty} |g_1(u)|\,du$$

et, avec le même changement de variable,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g_r(a)\,da &= \int_0^{+\infty} g_1(u)\,du \\ &= \frac{2n(n+2)}{\omega_n}\int_0^{+\infty} v_1(a)\,du \\ &= \frac{2n(n+2)}{\omega_n} V_1(u)\Big|_0^{+\infty} = -1.\end{aligned}$$

Pour conclure, il nous suffit d'utiliser la proposition suivante, qui est un équivalent, pour l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$, d'une condition, dite « de Toeplitz » , sur les matrices infinies (voir [KL] p. 28).

PROPOSITION 3. — *Soient $b \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+$ telles que*

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$ *presque partout;*

ii) *il existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ telle que $|f_n| \leq f$ presque partout, pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

iii) *il existe $K > 0$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

iv) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1.$

Alors, si $\lim\limits_{t\to+\infty} b(t)$ existe et vaut B, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} b(t)f_n(t)\,dt = B.$

En effet, la suite $(-g_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ en vérifie les conditions i) à iv) et par hypothèse $\lim_{a\to+\infty}\int_0^a h(s)\,ds$ existe et vaut I. Ainsi

$$\lim_{r\to 0_+} -\int_0^{+\infty}\left(\int_0^a h(s)\,ds\right) g_r(a)\,da = I\ ;$$

c'est-à-dire

THÉORÈME 1 (Premier lemme de Riemann). — *Soient τ dans $\mathcal{I}(-2)$ et x dans $\mathbb{R}^n$ tels que la limite $\lim_{N\to+\infty}\int_{\|t\|\le N} \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}\,\tau(t)\,dt$ existe et vaille I. Alors le laplacien intégral $\widetilde{\Delta} F$ de la fonction de Riemann F associée à τ existe en x et vaut I.*

6. Fonction de Riemann et pseudomesure.

Prenons $\sigma \in \mathcal{I}(-2)$. La fonction de Riemann F associée à σ s'écrit $F = k + l$ où, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$k(x) = -\int_{\|t\|\le 1} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i(x|t)} - 1 - 2\pi i(x|t)}{4\pi^2\|t\|^2}\,\sigma(t)\,dt \quad \text{et}$$

$$l(x) = -\int_{\|t\|\ge 1} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}}{4\pi^2\|t\|^2}\,\sigma(t)\,dt.$$

On vérifie, avec l'aide du critère habituel de dérivation sous le signe intégral, que le laplacien (usuel) de k existe sur tout $\mathbb{R}^n$, est continu et vaut

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}\,\sigma(t)\chi_{B(0,1)}(t)\,dt = \overline{\mathcal{F}}(\sigma\,\chi_{B(0,1)})(x).$$

Quant à l, nous voyons que $l = \overline{\mathcal{F}}\mu$, où la fonction $\mu(t) = \dfrac{-\sigma(t)}{4\pi^2\|t\|^2}\,\chi_{B(0,1)^C}$ est par hypothèse intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

En passant aux distributions définies par ces fonctions, il vient $[l] = \overline{\mathcal{F}}[\mu]$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Il est toujours possible de dériver des distributions; donc, en particulier,

$$\begin{aligned}\Delta[l] &= \Delta\,\overline{\mathcal{F}}([\mu]) = \overline{\mathcal{F}}(-4\pi^2\|t\|^2[\mu])\\ &= \overline{\mathcal{F}}([-4\pi^2\|t\|^2\mu])\\ &= \overline{\mathcal{F}}([\sigma\cdot\chi_{B(0,1)^C}]).\end{aligned}$$

Comme k est continue, elle définit une distribution et F aussi. Alors $[F] = [k] + [l]$; d'où :

$$\begin{aligned}\Delta[F] &= \Delta[k] + \Delta[l] \\ &= [\Delta k] + \Delta[l] \text{ (parce que } \Delta k \text{ est continue)} \\ &= [\overline{\mathcal{F}}(\sigma\,\chi_{B(0,1)})] + \overline{\mathcal{F}}([\sigma\,\chi_{B(0,1)^C}]) \\ &= \overline{\mathcal{F}}([\sigma\,\chi_{B(0,1)}]) + \overline{\mathcal{F}}([\sigma\,\chi_{B(0,1)^C}]) \\ &= \overline{\mathcal{F}}([\sigma]).\end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

THÉORÈME 2. — *Soient S une pseudomesure sur $\mathbb{R}^n$ avec $\sigma \in \mathcal{I}(-2)$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors S est nulle sur U si et seulement si la fonction de Riemann F associée à σ est harmonique sur U.*

Preuve. — Si S est nulle sur U, la distribution $\overline{\mathcal{F}}([\sigma])$ est aussi nulle sur U donc, vu les calculs ci-dessus, la distribution $[F]$ est harmonique sur U, ce qui implique, par hypoellipticité du laplacien ([D] p. 127), que F est une fonction harmonique sur U. Réciproquement, si F est harmonique sur U, $[F]$ est aussi harmonique sur U, donc $\overline{\mathcal{F}}([\sigma])$ est nulle sur U et de même pour la pseudomesure S.

Remarques. — Le lecteur pourra comparer cette démonstration à celle classique sur $\mathbb{T}$ ([KL] th. II.2.2), passant par la variable complexe et, somme toute, moins naturelle.
Le théorème est encore vrai en supposant seulement $\sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, à condition de définir F comme la distribution $[k] + \overline{\mathcal{F}}([\mu])$.

7. Localisation.

Notation. — Nous noterons Decr $(1-n)$ l'ensemble des fonctions f bornées sur $\mathbb{R}^n$ et telles que $f(x) = o(\|x\|^{1-n})$ à l'infini, ou encore $\lim_{r\to+\infty} r^{n-1}\Big(\sup_{\|y\|=r} |f(y)|\Big) = 0$.

On vérifie aisément que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset$ Decr $(1-n) \subset \mathcal{I}(-2)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \star$ Decr $(1-n) \subset$ Decr $(1-n)$.

Donnons-nous maintenant, pour le reste du paragraphe, une fonction λ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui soit identique à 1 sur $B(0,1)$. Nous posons $\Theta(y) = \mathcal{F}\lambda(y)$ et $\Theta_{(\varepsilon)}(y) = \varepsilon^{-n}\Theta(y/\varepsilon)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, avec $\varepsilon > 0$.

PROPOSITION 4. — *Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathrm{Decr}\,(1-n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $\eta > 0$, il existe $N_0(\eta) > 0$ tel que*

$$N > N_0 \Rightarrow \left| \int_{\|t\| \leq N} \Big(\tau \star (\mathcal{F}\varphi - \varphi(x)\Theta_{(\varepsilon)})\Big)(t)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}\, dt \right| < \eta$$

quel que soit $0 < \varepsilon \leq 1$ avec $\varepsilon\|x\| < 1$.

Preuve. — Remarquons d'abord que $\overline{\mathcal{F}}\,\Theta_{(\varepsilon)}(y) = \lambda(\varepsilon y)$ donc $\overline{\mathcal{F}}\,\Theta_{(\varepsilon)} = 1$ sur $B(0, 1\varepsilon)$.

Notons $E(x)$ l'ensemble $\{\varepsilon \in]0,1] \,:\, \varepsilon\|x\| < 1\}$ et, pour tout $\varepsilon \in E(x)$, posons $\Psi_\varepsilon = \mathcal{F}\varphi - \varphi(x)\Theta_{(\varepsilon)}$. Clairement

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}}\,\Psi_\varepsilon(x) &= \varphi(x) - \varphi(x)\,\overline{\mathcal{F}}\,\Theta_{(\varepsilon)}(x)\\ &= \varphi(x) - \varphi(x) = 0.\end{aligned}$$

Fixons momentanément $N > 0$. Nous avons :

$$\int_{\|t\| \leq N} (\tau \star \Psi_\varepsilon)(t)\ \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}\ dt = \int_{B(0,N)} \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \tau(y)\Psi_\varepsilon(t-y)\, dy \right) dt$$

ce qui est égal, par Fubini et en posant $u = t - y$, à

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau(y)\ \mathrm{e}^{2\pi i(x|y)} \left(\int_{B(-y,N)} \Psi_\varepsilon(u)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|u)}\ du \right) dy,$$

que nous décomposons en trois intégrales

$$\begin{aligned}&= \int_{B(0,N/2)} \tau(y)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|y)} \left(\int_{B(-y,N)} \Psi_\varepsilon(u)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|u)}\ du \right) dy\\ &\quad + \int_{C(0,N/2,N)} \tau(y)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|y)} \left(\int_{B(-y,N)} \Psi_\varepsilon(u)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|u)}\ du \right) dy\\ &\quad + \int_{B(0,N)^C} \tau(y)\ \mathrm{e}^{2\pi i(x|y)} \left(\int_{B(-y,N)} \Psi_\varepsilon(u)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|u)}\ du \right) dy\\ &= I_1 + I_2 + I_3\end{aligned}$$

($C(0,r,R)$ désigne $B(0,R) \setminus B(0,r)$).

Nous nous contenterons de majorer en détail l'intégrale I_2, les autres se traitant de manière semblable.

Notons d'abord que, puisque $\overline{\mathcal{F}}\,\Psi_\varepsilon(x) = 0$,

$$\int_{B(-y,N)} \Psi_\varepsilon(u)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|u)}\ du = -\int_{B(-y,N)^C} \Psi_\varepsilon(u)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|u)}\ du.$$

Alors

$$|I_2| \leq \int_{C(0,N/2,N)} |\tau(y)| \left(\int_{B(-y,N)^C} |\Psi_\varepsilon(u)|\, du \right) dy.$$

Maintenant

$$\int_{B(-y,N)^C} |\Psi_\varepsilon(u)|\, du \leq \int_{B(-y,N)^C} |\mathcal{F}\varphi(u)| + |\varphi(x)| \cdot |\Theta_{(\varepsilon)}(u)|\, du$$

et

$$\begin{aligned}\int_{B(-y,N)^C} |\Theta_{(\varepsilon)}(u)|\, du &= \int_{B(-\frac{y}{\varepsilon},\frac{N}{\varepsilon})^C} |\Theta(v)|\; dv \\ &\leq \int_{B(-y,N)^C} |\Theta(v)|\, dv,\end{aligned}$$

où nous avons posé $v = u/\varepsilon$ et utilisé le fait que $B\Big(-\dfrac{y}{\varepsilon}, \dfrac{N}{\varepsilon}\Big)^c \subset B(-y,N)^c$ vu que $\|y\| \leq N$ et $\varepsilon \leq 1$.

Parce que $\mathcal{F}\varphi$ et Θ sont à décroissance rapide, il existe finalement une constante $M > 0$ dépendant seulement de φ et Θ telle que, quels que soient $y \in C(0,N/2,N)$ et $\varepsilon \in E(x)$,

$$\int_{B(-y,N)^C} |\Psi_\varepsilon(u)|\, du \leq \int_{B(-y,N)^C} \frac{M}{1+\|u\|^{2n}}\, du.$$

Toujours si $\|y\| \leq N$, $B(-y,N)^c \subset B(0, N - \|y\|)^c$. En passant aux coordonnées polaires cela donne :

$$\int_{B(-y,N)^C} |\Psi_\varepsilon(u)|\, du \;\leq\; M\omega_n \int_{N-\|y\|}^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{1+\rho^{2n}}\, d\rho.$$

Posons $\Pi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{1+t^{2n}}\, dt$; c'est une fonction positive intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Avec cette notation

$$|I_2| \;\leq\; \int_{C(0,N/2,N)} |\tau(y)| \cdot M\omega_n \cdot \Pi(N - \|y\|)\, dy.$$

Passons en coordonnées polaires et posons $\sigma(\rho) = \sup\limits_{\|y\|=\rho} |\tau(y)|$: il vient

$$|I_2| \;\leq\; M\omega_n^2 \int_{N/2}^{N} \Pi(N-\rho)\, \sigma(\rho)\, \rho^{n-1}\, d\rho.$$

Soit $K_{\frac{N}{2}} \;=\; \sup\limits_{\rho \geq \frac{N}{2}} \rho^{n-1}\, \sigma(\rho)$; comme $\lim\limits_{r\to+\infty} r^{n-1}\, \sigma(r) = 0$, $\lim\limits_{N\to+\infty} K_{\frac{N}{2}} = 0$; et

$$|I_2| \leq\; M\omega_n^2 K_{\frac{N}{2}} \int_0^{N/2} \Pi(s)\, ds \leq\; M\omega_n^2 K_{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} \Pi(s)\, ds.$$

D'où l'existence de $N_2(\eta)$ tel que $N > N_2 \Rightarrow |I_2| < \eta/3$, quel que soit $\varepsilon \in E(x)$.

En procédant de même avec I_1 et I_3, nous aboutissons à la conclusion.

Nous avons encore besoin de deux résultats. L'un, assez technique, est pris dans [SW] (p. 13) :

PROPOSITION 5. — *Soient $\theta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Posons $\psi(x) = \operatorname*{ess.sup}_{\|t\| \geq \|x\|} |\theta(t)|$.*

Si $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} (\theta_{(\varepsilon)} \star f)(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \theta(t)\, dt$$

en tout point de Lebesgue x de f, donc presque partout. (Avec $\theta_{(\varepsilon)}(y) = \varepsilon^{-n}\theta(y/\varepsilon)$.)

L'autre, très simple, est donné sans preuve :

LEMME 1. — *Soit $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ tel que*

i) *pour tout $\eta > 0$ il existe $n_0(\eta) \in \mathbb{N}$ tel que $|\alpha(n,k)| < \eta$ quels que soient $n \geq n_0$ et $k \in \mathbb{N}$;*

ii) *$\lim_{k \in \mathbb{N}} \alpha(n,k)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors $\lim_{n \in \mathbb{N}} \Big(\lim_{k \in \mathbb{N}} \alpha(n,k) \Big) = 0$.

Avec ces deux résultats, nous pouvons démontrer la

PROPOSITION 6. — *Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in \mathrm{Decr}\,(1-n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors*

$$\lim_{N \to +\infty} \int_{\|t\| \leq N} \big((\tau \star \mathcal{F}\varphi)(t) - \varphi(x)\tau(t) \big)\, \mathrm{e}^{2\pi i (x|t)}\, dt = 0.$$

Preuve. — Nous allons employer le lemme 1 avec l'application $\alpha(N, 1/\varepsilon) = \displaystyle\int_{\|t\| \leq N} (\tau \star \Psi_\varepsilon)(t)\, \mathrm{e}^{2\pi i (x|t)}\, dt$.

En effet, la condition i) du lemme n'est autre que la proposition 4.

Pour la condition ii), utilisons la proposition 5 : nous avons $\lim_{\varepsilon \to 0_+} \Theta_{(\varepsilon)} \star \tau = \tau$ presque partout. Donc $\lim_{\varepsilon \to 0_+} \tau \star \Psi_\varepsilon = (\tau \star \mathcal{F}\varphi) - \varphi(x)\tau$ presque partout. De plus

$$\|\tau \star \Psi_\varepsilon\|_\infty \leq \|\tau\|_\infty \cdot \|\Psi_\varepsilon\|_1 \leq \|\tau\|_\infty(\|\mathcal{F}\varphi\|_1 + |\varphi(x)| \cdot \|\Theta_{(\varepsilon)}\|_1)$$
$$= \|\tau\|_\infty(\|\mathcal{F}\varphi\|_1 + |\varphi(x)| \cdot \|\Theta\|_1).$$

Alors, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, quel que soit $N > 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\|t\|\leq N} (\tau \star \Psi_\varepsilon)(t)\ \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}\ dt$$

existe et vaut

$$\int_{\|t\|\leq N} \Big((\tau \star \mathcal{F}\varphi)(t) - \varphi(x)\tau(t)\Big)\ \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}\ dt :$$

c'est la condition ii). La conclusion en découle.

THÉORÈME 3 (Principe de localisation de Riemann). — *Soit $T \in PM(\mathbb{R}^n)$ avec $\tau = \widehat{T} \in$ Decr $(1-n)$. Si T est nulle sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $x \in U$,*

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\|t\|\leq N} \tau(t)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}\ dt = 0.$$

Preuve. — Soient $x_0 \in U$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi(x_0) = 1$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset U$.

Posons $S = \varphi T$; $S \in PM(\mathbb{R}^n)$ et on vérifie que $\sigma = \widehat{S}$ est égale à $\tau \star \mathcal{F}\varphi$; donc $\sigma \in$ Decr $(n-1)$. La proposition 6 nous dit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathcal{E}) \qquad \lim_{N\to+\infty} \int_{\|t\|\leq N} (\sigma - \varphi(x)\tau)(t)\, \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}\ dt = 0.$$

Par hypothèse, T est nulle sur U, c'est-à-dire $\operatorname{supp} T \subset U^c$. Donc, vu que $\operatorname{supp}\varphi T \subset \operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$, $\varphi T = S$ est nulle; d'où $\sigma = 0$ presque partout et $(\mathcal{E})$ se réduit à

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\|t\|\leq N} \varphi(x)\tau(t)\ \mathrm{e}^{2\pi i(x|t)}\ dt = 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Comme $\varphi(x_0) = 1$, le théorème est établi.

8. Une équivalence.

THÉORÈME 4. — *Soient* $T \in PM(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\widehat{T}(t) = o(\|t\|^{1-n})$ *à l'infini et* E *un fermé de* $\mathbb{R}^n$. *Alors* $\operatorname{supp} T \subset E$ *si et seulement si* $\lim_{N\to+\infty} \int_{\|t\|\le N} \widehat{T}(t)e^{2\pi i(x|t)}\,dt = 0$ *quel que soit* $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.

Preuve. — Si $\operatorname{supp} T \subset E$, T est nulle sur l'ouvert E^c; donc, par le théorème 3, quel que soit $x \in \mathbb{R}^n\backslash E$, $\lim_{N\to+\infty} \int_{\|t\|\le N} \widehat{T}(t)e^{2\pi i(x|t)}\,dt = 0$. Réciproquement, si cette limite est nulle sur tout $\mathbb{R}^n\backslash E$, par le théorème 1 (premier lemme de Riemann) $\tilde{\Delta}F_\tau(x) = 0$ sur E^c (où $\tau = \widehat{T}$). De la proposition 2 il découle que F_τ est harmonique sur E^c, ce qui équivaut, d'après le théorème 2, à T nulle sur E^c, ou encore $\operatorname{supp} T \subset E$.

Remarques. — Devançons la critique : pour $n \ge 3$, la condition $\widehat{T} \in \operatorname{Decr}(1-n)$ implique que la pseudomesure T est ... une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nonobstant, même ainsi ce résultat paraît nouveau, du fait qu'il y a convergence partout et non pas seulement presque partout. On pourra comparer par exemple à [CS].

La condition $\tau \in \operatorname{Decr}(1-n)$, introduite pour obtenir la proposition 4, devrait pouvoir être améliorée. Il est par contre certain que l'hypothèse $T \in PF(\mathbb{R}^n)$ ne suffirait pas pour obtenir l'équivalence du théorème. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, la transformée de Fourier de la mesure naturelle μ sur le cercle S^1 est $\widehat{\mu}(t) = 2\pi J_0(2\pi\|t\|)$; mais, au point $x = 0$, $\int_{\|t\|\le N} \widehat{\mu}(t)e^{2\pi i(0|t)}\,dt = 2\pi N J_1(2\pi N)$, ce qui ne converge pas lorsque N tend vers l'infini.

Le théorème est aussi vrai pour $n = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[AW] J.M. ASH and G.V. WELLAND, Convergence, uniqueness and summability of multiple trigonometric series, Trans. Amer. Math. Soc., 163 (1972), 401–436.

[Ba] N.K. BARY, A Treatise on Trigonometric Series, Pergamon Press, Oxford, 1964.

[Be] J.J. BENEDETTO, Spectral Synthesis, B.G.Teubner, Stuttgart, 1975.

[CS] A. CARBERY and F. SORIA, Almost-Everywhere Convergence of Fourier Integrals [...], Revista Matemática Iberoamericana, vol. 4, n°2 (1988), 319–337.

[D] N.F. DONOGHUE, Distributions and Fourier Transforms, Academic Press, New York, 1969.

[KS] J.-P. KAHANE et R. SALEM, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, Paris, 1963.

[KL] A.S. KECHRIS & A. LOUVEAU, Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness, Cambridge University Press, 1987.

[Sh] V.L. SHAPIRO, Fourier series in several variables, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 48–93.

[SW] E.M. STEIN and G. WEISS, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, 1971.

[Sz] E. SZPILRAJN, Remarques sur les fonctions sousharmoniques, Annals of Math., 1933 (34), 588–594.

[W] G.N. WATSON, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, 1922.

[Z] A. ZYGMUND, Trigonometric Series, Cambridge University Press, 1977.

Manuscrit reçu le 10 mars 1993.

F.J. GONZÁLEZ VIELI,
Institut de Mathématiques
Collège Propédeutique – UNIL
1015 Lausanne (Suisse).