ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALEXANDROS PATSOURAKOS

Sur la représentation adjointe d'une algèbre de Lie libre. II

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 2 (1994), p. 387-400

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_2_387_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 2 (1994), 387-400

SUR LA REPRÉSENTATION ADJOINTE D'UNE ALGÈBRE DE LIE LIBRE. II

par Alexandros PATSOURAKOS

Introduction.

Soient K un corps commutatif et X un ensemble. Soient $A(X)$ l'algèbre des mots construits sur X à coefficients dans K et $A^+(X)$ le sous-module de $A(X)$ des mots non vides. Soit $L(X)$ l'algèbre de Lie libre de X sur K. On considère l'application $\Gamma : A^+(X) \to L(X)$ définie par la relation $\Gamma(x_1 \dots x_n) = [x_1, [\dots [x_{n-1}, x_n] \dots]$, pour $x_1, \dots, x_n$ dans X, $n > 0$. Le noyau N de l'application Γ est un $A(X)$-module à gauche, par la multiplication à gauche de $A(X)$, libre.

Le principal résultat de ce travail est la construction d'un ensemble de générateurs du $A(X)$-module à gauche N. Cette construction est basée sur deux résultats (2.3.8 et 2.4.4), intéressants en soi, concernant la structure de l'algèbre non associative libre $\mathrm{Lib}(X)$ de X sur K.

L'ensemble de générateurs construit dans ce travail est strictement contenu dans l'ensemble de générateurs proposé par Labute dans [4] par des méthodes différentes.

On note qu'un ensemble de générateurs du $A(X)$-module à gauche N peut être utilisé pour calculer la cohomologie de la représentation adjointe de $A(X)$ à partir du complexe

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A^+(X) \xrightarrow{\Gamma} L(X) \longrightarrow 0.$$

Mots-clés : Algèbre de Lie libre – Représentation adjointe.
Classification A.M.S. : 17B01 – 17B10.

Dans [5] nous avons déterminé une $A(X)$-base de N. Au 3.2.7 nous donnons la relation entre cette $A(X)$-base de N et l'ensemble de générateurs obtenu dans le présent article.

Ce travail comprend 3 chapitres :
1. Notations.
2. Sur la structure de l'algèbre $\mathrm{Lib}(X)$.
3. Le noyau N de l'application $\Gamma : A^+(X) \to L(X)$.

1. Notations.

Soient K un corps commutatif et X un ensemble.

1.1. On note $M(X)$ le magma libre construit sur X défini comme l'ensemble somme de la famille des ensembles $(X_n)_{n\geq 1}$ où $X_1 = X$ et X_n est l'ensemble somme des ensembles $X_p \times X_{n-p}$, $p = 1, \dots, n-1$ ([1], chap. 1, p. 77). Soit ω dans $M(X)$. La longueur de ω, notée $l(\omega)$, est l'unique entier n de sorte que $\omega \in X_n$.

1.2. L'algèbre du $M(X)$ sur le corps K est notée $\mathrm{Lib}(X)$; c'est une algèbre non associative sans unité, munie de la graduation $(\mathrm{Lib}^n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathrm{Lib}^n(X)$ est le sous-module de $\mathrm{Lib}(X)$ ayant pour base l'ensemble X_n.

1.3. Soit S un ensemble d'éléments de $\mathrm{Lib}(X)$. On note $\langle S\rangle_b$ (resp. $\langle S\rangle_g$) l'idéal bilatère (resp. à gauche) de $\mathrm{Lib}(X)$ engendré par l'ensemble S.

1.4. Soit M l'ensemble des éléments de $\mathrm{Lib}(X)$ de l'une des formes :

$$Q(a) = aa,$$
$$J(a, b, c) = a(bc) + b(ca) + c(ab)$$

pour a, b, c dans $\mathrm{Lib}(X)$.

Avec les notations de 1.3, l'algèbre de Lie libre $L(X)$ de X sur K est le quotient $\mathrm{Lib}(X)/\langle M\rangle_b$ ([2], p. 18, déf. 1).

On note π la projection canonique de $\mathrm{Lib}(X)$ sur $L(X)$.

1.5. On note $A(X)$ l'algèbre des mots construits sur X à coefficients dans K ([1], chap. 3, p. 21). C'est une algèbre associative unitaire. On note encore $A^+(X)$ le sous-module de $A(X)$ engendré par les mots non vides.

2. Sur la structure de l'algèbre Lib(X).

Dans ce chapitre on expose quelques résultats concernant la structure de l'algèbre non associative Lib(X).

2.1. Définitions principales.

2.1.1. L'algèbre enveloppante de $L(X)$ est canoniquement isomorphe à $A(X)$ ([2], p. 32, cor. 1). D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on identifie $L(X)$ à un sous-module de $A^+(X)$ par l'application canonique de $L(X)$ dans son algèbre enveloppante $A(X)$.

2.1.2. Tout élément ω de $M(X)$ de longueur $n \geq 2$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\omega = \omega'\omega''$ avec ω', ω'' dans $M(X)$ et $l(\omega') + l(\omega'') = n$.

On définit une application θ : Lib(X) $\to A^+(X)$ par récurrence sur la longueur $n \geq 1$ de l'élément ω de $M(X)$ en posant

$$\theta(\omega) = \omega \qquad , n = 1$$

et

$$\theta(\omega) = \pi(\omega')\theta(\omega''),\ n \geq 2.$$

Comme $M(X)$ est une base du module Lib(X), l'application θ se prolonge en une application linéaire de Lib(X) dans $A^+(X)$.

2.1.3. L'application θ est surjective. En effet, l'image par θ de l'élément $x_1(\ldots(x_{n-1}x_n)\ldots)$, $n \geq 1$ de Lib(X) est le mot $x_1 \ldots x_n$ de $A^+(X)$.

2.1.4. On note E l'ensemble des éléments de Lib(X) définis par la relation

$$R(a,b,c) = a(bc) - (ab)c - b(ac)$$

quels que soient a, b, c dans Lib(X).

2.1.5. On note T le sous-ensemble de Lib(X) défini par

$$T = \{s \in \mathrm{Lib}(X) : su \in \langle E \rangle_g \quad \forall u \in \mathrm{Lib}(X)\}.$$

PROPOSITION. — *T est un idéal bilatère.*

Démonstration. — On a, pour a, b, c dans Lib(X),

$$(ab)c = -R(a,b,c) + a(bc) - b(ac).$$

Il en résulte, si $a \in T$, ou si $b \in T$, que $(ab)c \in \langle E \rangle_g$, ce qui prouve la proposition. □

2.2. L'idéal $\langle E \rangle_b$.

Dans ce paragraphe, on démontre quatre lemmes, concernant l'idéal $\langle E \rangle_g$, nécessaires pour la suite.

2.2.1. Lemme. — *$E \subset T$.*

Démonstration. — Pour a, b, c, u dans $\mathrm{Lib}(X)$, on a

$$\begin{aligned} R(a,b,c)u = &- R(a,bc,u) + R(ab,c,u) + R(b,ac,u) \\ &- aR(b,c,u) + bR(a,c,u) - cR(a,b,u) \\ &+ R(a,b,cu) - R(a,c,bu) + R(b,c,au), \end{aligned}$$

d'où le lemme. □

2.2.2. Lemme. — *$\langle E \rangle_b = \langle E \rangle_g$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'élément

$$(u_1(\ldots(u_n R(a,b,c))\ldots))u,$$

pour $u_i \in \mathrm{Lib}(X)$ (n quelconque), de $\langle E \rangle_b$ appartient à $\langle E \rangle_g$. Ce qui résulte aussitôt des 2.2.1 et 2.1.5. □

2.2.3. Lemme. — *$\langle E \rangle_g$ est gradué.*

Démonstration. — $\langle E \rangle_g$ est engendré par les éléments homogènes $R(\omega, \omega', \omega'')$, pour $\omega, \omega', \omega''$ dans $M(X)$, donc est un idéal gradué. □

2.2.4. Lemme. — *$\langle E \rangle_g \subset \mathrm{Ker}\,\theta$.*

Démonstration. — On a

$$\theta(u_1(\ldots(u_n R(a,b,c))\ldots)) = \pi(u_1)\ldots\pi(u_n)\theta(R(a,b,c))$$

pour u_i dans $\mathrm{Lib}(X)$ (n quelconque). Mais

$$\begin{aligned} \theta(R(a,b,c)) &= \pi(a)\pi(b)\theta(c) - [\pi(a),\pi(b)]\theta(c) - \pi(b)\pi(a)\theta(c) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où le lemme. □

2.3. Le $A(X)$-module à gauche $\mathrm{Lib}(X)/\langle E \rangle_g$.

2.3.1. On note X_n^1 le sous-module de $\mathrm{Lib}(X)$ qui a comme base la partie $X \times (\ldots(X \times X)\ldots)$ (n-facteurs) de $M(X)$. On note encore X^1 le sous-module de $\mathrm{Lib}(X)$ somme directe des modules X_n^1 pour tout $n \geq 1$. Une conséquence immédiate de la définition de l'application θ est le lemme suivant :

LEMME. — *Les modules gradués X^1 et $A^+(X)$ sont isomorphes.*

2.3.2. On pose $\langle E\rangle_g^n = \langle E\rangle_g \cap \mathrm{Lib}^n(X)$, $n \geq 1$. Si $n = 1, 2$, alors $\langle E\rangle_g^n$ est le module trivial. On établit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour tout $n \geq 1$, on a $\mathrm{Lib}^n(X) = X_n^1 \oplus \langle E\rangle_g^n$.*

Démonstration. — Soit ω dans X_n. On montre que ω s'écrit comme somme d'éléments de la forme :

$$x_1(\ldots(x_{n-1}x_n)\ldots) + r_n,$$

pour $x_1, \ldots, x_n$ dans X et pour r_n dans $\langle E\rangle_g^n$, en raisonnant par récurrence sur la longueur n de ω. Si $n = 1, 2$ notre assertion est évidente. Supposons-la démontrée pour les éléments ω de $M(X)$ de longueur k inférieure à n. Comme $\omega = \omega'\omega''$ pour $\omega' \in X_p$ et $\omega'' \in X_q$ avec $p + q = n$, d'après l'hypothèse de récurrence, en vertu des 2.2.2 et 2.2.3, il suffit de démontrer notre assertion pour les éléments

$$(x_1(\ldots(x_{p-1}x_p)\ldots))(y_1(\ldots(y_{q-1}y_q)\ldots))$$

de $M(X)$. Si $p = 1$ notre assertion est évidente. Supposons-la démontrée lorsque $p = n - 2$. On pose

$$u = x_2(\ldots(x_{p-1}x_p)\ldots).$$

Alors

$$(x_1u)y_1 = -R(x_1, u, y_1) + x_1(uy_1) - u(x_1y_1).$$

L'hypothèse de récurrence sur k entraîne que notre assertion est vraie pour l'élément uy_1 et par conséquent pour l'élément $x_1(uy_1)$. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence sur p, notre assertion est vraie pour l'élément $u(x_1y_1)$. Donc on a démontré que $\mathrm{Lib}^n(X) = X_n^1 + \langle E\rangle_g^n$.

Enfin, d'après 2.2.4 et 2.3.1, cette somme est directe d'où le théorème. □

2.3.3. Il résulte directement de 2.3.2 que le module gradué $\mathrm{Lib}(X)$ se décompose en somme directe de sous-modules gradués :

$$\mathrm{Lib}(X) = X^1 \oplus \langle E\rangle_g.$$

On en déduit les trois corollaires suivants :

2.3.4. COROLLAIRE. — $\langle E\rangle_g = \operatorname{Ker}\theta$.

2.3.5. COROLLAIRE. — *L'application θ est graduée de degré 0.*

2.3.6. COROLLAIRE. — *On a l'isomorphisme de modules gradués*

$$\operatorname{Lib}(X) \cong A^+(X) \oplus \langle E\rangle_g.$$

Cela résulte de 2.3.3 en vertu de 2.3.1.

2.3.7. Soit v dans $L(X)$. On choisit un représentant u de v dans $\operatorname{Lib}(X)$, et on définit une représentation

$$\rho : L(X) \longrightarrow \operatorname{End}_K(\operatorname{Lib}(X)/\langle E\rangle_g)$$

en posant

$$\rho(v)(w + \langle E\rangle_g) = uw + \langle E\rangle_g$$

quel que soit w dans $\operatorname{Lib}(X)$. On note que l'endomorphisme $\rho(v)$ ne dépend que de v et non du choix du représentant. En effet, si u' est un élément de $\operatorname{Lib}(X)$ différent de u tel que $\pi(u) = \pi(u')$, alors

$$\theta((u - u')w) = (\pi(u) - \pi(u'))\theta(w) = 0$$

pour tout $w \in \operatorname{Lib}(X)$. D'où, $(u-u')w \in \operatorname{Ker}\theta$ et, d'après 2.3.4, $(u-u')w \in \langle E\rangle_g$.

Soient v, v' dans $L(X)$. On suppose que $v = \pi(u)$ et que $v' = \pi(u')$. Alors, $\pi(uu') = [v, v']$ et

$$\begin{aligned}\rho([v,v'])(w + \langle E\rangle_g) &= (uu')w + \langle E\rangle_g\\ &= -R(u,u',w) + u(u'w) - u'(uw) + \langle E\rangle_g\\ &= \rho(v)\rho(v')(w + \langle E\rangle_g) - \rho(v')\rho(v)(w + \langle E\rangle_g).\end{aligned}$$

Ceci montre que ρ est bien un homomorphisme d'algèbres de Lie, d'où $\operatorname{Lib}(X)/\langle E\rangle_g$ est un $L(X)$-module à gauche et par conséquent un $A(X)$-module à gauche par l'unique représentation ρ' de $A(X)$ dans $\operatorname{Lib}(X)/\langle E\rangle_g$ qui prolonge ρ.

2.3.8. Comme $\langle E\rangle_g$ est gradué par rapport à la graduation de $\operatorname{Lib}(X)$, on munit le module $\operatorname{Lib}(X)/\langle E\rangle_g$ de la graduation quotient. La structure de $A(X)$-module à gauche sur $\operatorname{Lib}(X)/\langle E\rangle_g$ est compatible avec sa graduation quotient. De plus, le $A(X)$-module à gauche gradué $\operatorname{Lib}(X)/\langle E\rangle_g$ est libre. En effet, d'après 2.3.3, les images des éléments de X par la projection canonique de $\operatorname{Lib}(X)$ sur $\operatorname{Lib}(X)/\langle E\rangle_g$ forment une $A(X)$-base de $\operatorname{Lib}(X)/\langle E\rangle_g$.

On établit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les $A(X)$-modules à gauche gradués libres $A^+(X)$ et $\mathrm{Lib}(X)/\langle E\rangle_g$ sont isomorphes.*

Démonstration. — D'après 2.3.6, en passant au quotient par $\langle E\rangle_g$, on obtient l'isomorphisme de $A(X)$-modules à gauche gradués

$$\tilde{\theta} : \mathrm{Lib}(X)/\langle E\rangle_g \cong A^+(X).$$

De plus, pour $x_1, \ldots, x_n$ dans X et w dans $\mathrm{Lib}(X)$, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(\rho'(x_1 \ldots x_n)(w + \langle E\rangle_g) &= \theta(x_1(\ldots(x_n w)\ldots))\\ &= x_1 \ldots x_n \theta(w)\\ &= x_1 \ldots x_n \tilde{\theta}(w + \langle E\rangle_g).\end{aligned}$$

Donc $\tilde{\theta}$ est un homomorphisme de $A(X)$-modules à gauche gradués libres, ce qui achève la démonstration du théorème. □

2.4. L'idéal $\langle M\rangle_b$ de la définition de $L(X)$.

2.4.1. LEMME. — $M \subset T$.

Démonstration. — Pour a, b, c, u dans $\mathrm{Lib}(X)$, on a

$$\begin{aligned}J(a,b,c)u &= (a(bc))u + (b(ca))u + (c(ab))u\\ &= -R(a,bc,u) - R(b,ca,u) - R(c,ab,u)\\ &\quad + R(b,c,au) + R(c,a,bu) + R(a,b,cu)\\ &\quad - aR(b,c,u) - bR(c,a,u) - cR(a,b,u)\end{aligned}$$

et

$$Q(a)u = (aa)u = -R(a,a,u),$$

d'où le lemme. □

2.4.2. Soient a, b dans $\mathrm{Lib}(X)$. On pose

$$B(a,b) = ab + ba.$$

Alors, $B(a,b) = Q(a+b) - Q(a) - Q(b)$.

LEMME. — $\langle E\rangle_g \subset \langle M\rangle_g$.

Démonstration. — Pour a, b, c dans $\mathrm{Lib}(X)$, on a

$$R(a,b,c) = J(a,b,c) - B(c,ab) - bB(a,c),$$

d'où le lemme. □

2.4.3. Soit S un ensemble d'éléments de $\mathrm{Lib}(X)$. On note W l'ensemble des éléments de $\mathrm{Lib}(X)$ de la forme :

$$(u_1(\ldots(u_n s)\ldots))u,$$

pour $u_1, \ldots, u_n, u$ dans $\mathrm{Lib}(X)$ (n quelconque) et pour s dans S. Évidemment, on a l'inclusion

$$\langle S\rangle_b \subset \langle S\rangle_g + \langle W\rangle_b.$$

On établit le lemme suivant :

LEMME. — *Si $S \subset T$, alors $\langle S\rangle_b \subset \langle S\rangle_g + \langle E\rangle_g$.*

Démonstration. — D'après 2.1.6, si $S \subset T$, on a $W \subset \langle E\rangle_g$. D'où, $\langle W\rangle_b \subset \langle E\rangle_b$. Comme $\langle E\rangle_b = \langle E\rangle_g$ (*cf.* 2.2.2), il résulte que $\langle W\rangle_b \subset \langle E\rangle_g$, et le lemme est démontré. □

2.4.4. THÉORÈME. — $\langle M\rangle_b = \langle M\rangle_g$.

Démonstration. — Comme $M \subset T$ (*cf.* 2.4.1), on a, d'après 2.4.3 avec $S = M$, $\langle M\rangle_b \subset \langle M\rangle_g + \langle E\rangle_g$. Mais, $\langle E\rangle_g \subset \langle M\rangle_g$. Donc $\langle M\rangle_b \subset \langle M\rangle_g$ d'où le théorème. □

2.4.5. THÉORÈME. — $\langle M\rangle_b = T$.

Démonstration. — Évidemment, $\langle M\rangle_b \subset T$. Réciproquement, soit s dans T. Pour tout u dans $\mathrm{Lib}(X)$, on a $\theta(su) = 0$ dans $A(X)$, d'où $\pi(s)\theta(u) = 0$. Si $u \in X$, alors $\pi(s)u = 0$. Donc $\pi(s) = 0$ dans $A(X)$, et par conséquent $s \in \langle M\rangle_b$, ce qui achève la démonstration du théorème. □

3. Le noyau de l'application $\Gamma : A^+(X) \to L(X)$.

Dans ce chapitre notre but est la construction d'un ensemble de générateurs du $A(X)$-module à gauche N.

3.1. Le $A(X)$-module à gauche $\langle M\rangle_g/\langle E\rangle_g$.

3.1.1. D'après Cohn ([3]), tout sous-module d'un $A(X)$-module à gauche libre est aussi libre. Il résulte de 2.3.8 que $\langle M\rangle_g/\langle E\rangle_g$ est $A(X)$-module à gauche libre.

On se propose de construire un ensemble de générateurs du $A(X)$-module à gauche libre $\langle M\rangle_g/\langle E\rangle_g$.

3.1.2. LEMME. — *Le $A(X)$-module à gauche gradué libre $\langle M\rangle_g/\langle E\rangle_g$ est engendré par les éléments homogènes de l'une des formes :*

$$Q(a)+\langle E\rangle_g,\ B(a,b)+\langle E\rangle_g$$

pour a,b dans $\mathrm{Lib}(X)$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de 2.4.2. □

3.1.3. Soit H un ensemble de Hall relatif à X ([2], p. 27, déf. 2). On sait que H est une partie de $M(X)$, qui a la propriété que son image par la projection canonique π est une base du module gradué $L(X)$. On pose $H_n = H\cap X_n$, $n\geq 1$.

On améliore l'énoncé de 3.1.2 comme suit :

LEMME. — *Le $A(X)$-module à gauche gradué libre $\langle M\rangle_g/\langle E\rangle_g$ est engendré par les éléments homogènes de l'une des formes :*

$$Q(\omega)+\langle E\rangle_g,\ \omega\in H$$
$$B(\omega,\omega')+\langle E\rangle_g,\ \omega,\omega'\in H.$$

Démonstration. — Les générateurs de $\langle M\rangle_g/\langle E\rangle_g$ de longueur 2 sont les éléments

$$Q(x)+\langle E\rangle_g^2 \quad\text{et}\quad B(x,y)+\langle E\rangle_g^2,$$

pour x,y dans $H_1 = X$.

Soit u dans X_n. On a

$$u=\sum_i \alpha_i\omega_i+\langle M\rangle_g^n$$

pour $\omega_i\in H_n$ et pour $\alpha_i\in K$.

On en déduit la formule

$$\begin{aligned}Q(u) &= \sum_i \alpha_i^2 Q(\omega_i)+\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j B(\omega_i,\omega_j)\\ &\quad+\sum_i \alpha_i\omega_i\langle M\rangle_g^n+\langle E\rangle_g^{2n}.\end{aligned}$$

Soit u' dans X_m. On pose

$$u'=\sum_j \beta_j\omega_j+\langle M\rangle_g^m$$

pour $\omega_j \in H_m$ et pour $\beta_j \in K$.

Alors on a la formule

$$\begin{aligned} B(u,u') = &\sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j B(\omega_i, \omega_j) + \sum_i \alpha_i \omega_i \langle M \rangle_g^m \\ &+ \sum_j \beta_j \omega_j \langle M \rangle_g^n + \langle E \rangle_g^{n+m}. \end{aligned}$$

Les formules ci-dessus montrent que les générateurs d'une certaine longueur $k > 2$ sont des $A(X)$-combinaisons linéaires d'éléments du lemme si les générateurs de longueur $< k$ sont de la même forme. Ceci achève par récurrence la démonstration du lemme. □

De plus, on établit le théorème suivant :

3.1.4. THÉORÈME. — *Le $A(X)$-module à gauche libre $\langle M \rangle_g / \langle E \rangle_g$ est engendré par les éléments homogènes de l'une des formes :*

$$Q(\omega) + \langle E \rangle_g, \text{ pour } \omega \text{ dans } H_n$$

$$B(\omega, \omega') + \langle E \rangle_g, \text{ pour } \omega, \omega' \text{ dans } H_n$$

où ω dans H_n et ω' dans H_{n+1}.

Démonstration. — Notre assertion est vraie pour $n = 2$. Soient ω dans H_κ et ω' dans H_λ avec $\kappa + \lambda = n$. On suppose que $\kappa < n/2$ si n est pair, et que $\kappa < n - 1/2$ si n est impair. D'après 2.3.6, ω' s'écrit comme somme d'éléments de la forme :

$$x_1(\ldots(x_{\lambda-1}x_\lambda)\ldots) + \langle E \rangle_g^\lambda,$$

pour $x_1, \ldots, x_\lambda$ dans X. On a

$$\begin{aligned} B(\omega, x_1(\ldots(x_{\lambda-1}x_\lambda)\ldots)) = &B(\omega x_1, x_2(\ldots(x_{\lambda-1}x_\lambda)\ldots)) \\ &+ x_1 B(\omega, x_2(\ldots(x_{\lambda-1}x_\lambda)\ldots)) \\ &- x_2(\ldots(x_{\lambda-1}x_\lambda)\ldots)) B(\omega, x_1) \\ &+ \langle E \rangle_g^n. \end{aligned}$$

En utilisant cette formule successivement on obtient $l(\omega') - l(\omega) \leq 1$. Le théorème résulte alors aussitôt, d'après 3.1.3, par récurrence sur n. □

3.2. Passage à l'idéal N.

3.2.1. L'application $\Gamma : A^+(X) \to L(X)$ définie par $\Gamma(x_1 \ldots x_n) = [x_1, [\ldots [x_{n-1}, x_n] \ldots]$, pour $x_1, \ldots, x_n$ dans X, est graduée de degré 0. On munit $L(X)$ de sa structure de $A(X)$-module à gauche par la représentation adjointe de $L(X)$.

La relation $\Gamma(ab) = \operatorname{ad}(a)\Gamma(b)$, pour a, b dans $A^+(X)$ ([2], p. 34, prop. 1), montre que Γ est un homomorphisme de $A(X)$-modules à gauche gradués. Donc son noyau N est un sous-module gradué du $A(X)$-module à gauche gradué libre $A^+(X)$, et par conséquent est un $A(X)$-module à gauche gradué libre.

3.2.2. LEMME. — $\Gamma \circ \theta = \pi$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $(\Gamma \circ \theta)(\omega) = \pi(\omega)$ pour tout ω dans $M(X)$. La démonstration procède par récurrence sur la longueur n de ω. Si $n = 1$, notre assertion est vraie. On suppose donc $n > 1$ et notre assertion démontrée lorsque $l(\omega)$ est inférieure à n. Comme $\omega = \omega'\omega''$ avec ω', ω'' dans $M(X)$ et $l(\omega) = l(\omega') + l(\omega'')$, on a, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}(\Gamma \circ \theta)(\omega) &= (\Gamma \circ \theta)(\omega'\omega'') \\ &= \operatorname{ad}(\pi(\omega'))(\Gamma \circ \theta)(\omega'') \\ &= \operatorname{ad}(\pi(\omega'))\pi(\omega'') \\ &= \pi(\omega),\end{aligned}$$

d'où le lemme. □

3.2.3. LEMME. — $\theta(\langle M \rangle_g) = N$.

Démonstration. — L'inclusion $\theta(\langle M \rangle_g) \subset N$ résulte aussitôt de 3.2.2. D'autre part, l'inclusion $N \subset \theta(\langle M \rangle_g)$ découle facilement de 2.1.3. □

3.2.4. THÉORÈME. — *Le $A(X)$-module à gauche gradué libre N est engendré par les éléments homogènes de l'une des formes :*

$$\pi(\omega)\theta(\omega), \text{ pour } \omega \text{ dans } H_n$$
$$\pi(\omega)\theta(\omega') + \pi(\omega')\theta(\omega), \text{ pour } \omega, \omega' \text{ dans } H_n$$

ou ω dans H_n et ω' dans H_{n+1}.

Démonstration. — D'après 3.2.3, la restriction de l'application $\tilde{\theta}$ à $\langle M \rangle_g / \langle E \rangle_g$ induit un isomorphisme de $A(X)$-modules à gauche gradués libres : $\langle M \rangle_g / \langle E \rangle_g \cong N$. Les générateurs de 3.1.4 sont transformés par $\tilde{\theta}$ en les éléments du théorème, qui constituent alors un ensemble de générateurs du $A(X)$-module à gauche N. □

3.2.5. Remarque. — Il est naturel maintenant de se demander si on peut déterminer les éléments de l'ensemble de générateurs de 3.2.4 qui forment une $A(X)$-base de N. Cette question est ouverte. On suppose que X a deux éléments x et y. Les éléments d'une telle $A(X)$-base de N de longueur ≤ 8 figurent dans le tableau suivant :

$n = 1$ pas d'éléments

$n = 2$ $x^2,\ xy + yx,\ y^2$

$n = 3$ pas d'éléments

$n = 4$ $[x, y]xy$

$n = 5$ pas d'éléments

$n = 6$ $[x, [x, y]]xxy,\ [x, [x, y]]yxy + [y, [x, y]]xxy,\ [y, [x, y]]yxy$

$n = 7$ pas d'éléments

$n = 8$ $[x, [x, [x, y]]]xxxy,\ [x, [x, [x, y]]]yxxy + [y, [x, [x, y]]]xxxy$
$[y, [x, [x, y]]]yxxy,\ [x, [x, [x, y]]]yyxy + [y, [y, [x, y]]]xxxy$
$[y, [y, [x, y]]]yyxy,\ [y, [x, [x, y]]]yyxy + [y, [y, [x, y]]]yxxy.$

3.2.6. Remarque. — Labute dans ([4], th. 1) a démontré que les éléments de $A(X)$ de l'une des formes :

$$(\mathrm{ad}\,(u)x)ux, \quad \text{pour } u \text{ dans } A(X) \text{ et } x \text{ dans } X$$

$$(\mathrm{ad}\,(v)x)uy + (\mathrm{ad}\,(u)y)vx, \quad \text{pour } v, u \text{ dans } A(X) \text{ et } x, y \text{ dans } X,$$

forment un ensemble de générateurs de N.

On constate que ces derniers éléments peuvent se mettre sous la forme :

$$(\mathrm{ad}\,(u)x)ux = \theta(Q(a))$$

$$(\mathrm{ad}\,(v)x)uy + (\mathrm{ad}\,(u)y)vx = \theta(B(a, b)),$$

où a est l'élément de $\mathrm{Lib}(X)$ qui résulte de $\mathrm{ad}\,(u)x$ en remplaçant dans son écriture tous les crochets par des parenthèses et b est l'élément de $\mathrm{Lib}(X)$ qui résulte de $\mathrm{ad}\,(v)y$ de la même manière.

Il en résulte que l'ensemble de générateurs de 3.2.2 est strictement contenu dans l'ensemble de générateurs proposé par Labute par des méthodes différentes.

3.2.7. Remarque. — Dans [5] nous avons déterminé une $A(X)$-base de N. Avec les notations du présent article le théorème de [5] peut être reformulé comme suit :

THÉORÈME. — *Soit X un ensemble. Si A_n est le sous-module de* $\mathrm{Lib}(X)$ *engendré par l'ensemble* $\bigcup_{x\in X} xH_{n-1}$, *pour tout $n \geq 2$, alors les images par l'application θ des éléments d'une base du module $A_n \cap \langle M\rangle_g^n$, pour tout $n \geq 2$, forment une $A(X)$-base de N.* □

En plus, dans le cas où X est fini avec $\mathrm{Card}(X) = r$, une conséquence importante du théorème précédent (corollaire de [5]) est que le nombre des éléments de longueur n d'une $A(X)$-base de N est $r\dim_K(L^{n-1}(X)) - \dim_K(L^n(X))$.

Nous revenons aux générateurs du théorème 3.1.4. Tout ce générateur de longueur n peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{x\in X} \alpha_x x\omega_x + \sum_{x\in X} x\langle M\rangle_g^{n-1} + \langle E\rangle_g^n$$

pour $\alpha_x \in K$ et $\omega_x \in H_{n-1}$, où la somme $\sum_{x\in X} \alpha_x x\omega_x$ est uniquement déterminée.

Les éléments

$$\sum_{x\in X} \alpha_x x\omega_x,$$

associés à tous les générateurs du théorème 3.1.4 de longueur n, forment un ensemble de générateurs du module $A_n \cap \langle M\rangle_g^n$, pour tout $n \geq 2$.

De plus, il est facile à vérifier que les éléments de longueur n des deux ensembles de générateurs de N, introduits par le théorème 3.2.4 et par le théorème de [5], ne coïncident qu'à $N_n / \bigoplus_{x\in X} xN_{n-1}$, où $N_n = N \cap A^n(X)$ pour tout $n \geq 2$.

Remerciement. — Je tiens à remercier D. Wigner dont l'aide m'a été précieuse au cours de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Eléments de mathématiques, Algèbre I, chapitres 1 à 3, Herman, Paris, 1972.

[2] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, chapitre 2, Algèbres de Lie libres, Herman, Paris, 1972.

[3] P.M. COHN, Free rings and their relations, Academic Press, 1971.

[4] J.P. LABUTE, Free Lie algebras as modules over their enveloping algebras, Proceedings of the American Mathematical Society, 68 (1978), 135–138.

[5] A. PATSOURAKOS, Sur la représentation adjointe d'une algèbre de Lie libre, Communications in Algebra, 15–10 (1987), 2199–2207.

Manuscrit reçu le 2 mars 1993.

Alexandros PATSOURAKOS,
Département de Mathématiques
Ecole de l'Air Hellénique
Dekelia, Attiki (Grèce).