ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MOHAMED KRIR

Degré d'une extension de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ sur laquelle $J_0(N)$ est semi-stable

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 2 (1996), p. 279-291

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_2_279_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 2 (1996), 279–291

DEGRÉ D'UNE EXTENSION DE $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ SUR LAQUELLE $J_0(N)$ EST SEMI-STABLE

par Mohamed KRIR

Sommaire.

0. Introduction.

Soit N un entier ≥ 1. On note $J_0(N)$ la jacobienne de la courbe modulaire $X_0(N)$. Soit p un nombre premier. On note $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$. Supposons que p divise N et écrivons $N = p^v N'$ avec $\mathrm{pgcd}(p, N') = 1$. On se propose de déterminer le degré sur $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ d'une extension E_v sur laquelle $J_0(N)$ acquiert une réduction semi-stable. L'extension qu'on trouve n'est certainement pas minimale. Les résultats de Carayol [2] jouent un rôle essentiel dans la preuve du lemme 1

Mots-clés : Représentation – Unipotente – Corps de classes – Exposant – Caractère – Ramifié.
Classification math. : 11F70 – 11G10 – 11G18 – 11G25.

ci-dessous et par suite dans la détermination de l'extension E_v. Choisissons un nombre premier auxiliaire $\ell \neq p$. Posons

$$G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \quad \text{et} \quad V(N) = T_\ell(J_0(N) \underset{\mathbf{Z}_\ell}{\otimes} \overline{\mathbf{Q}}_\ell$$

où T_ℓ est le module de Tate associé à $J_0(N)$, et considérons la représentation

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V(N)).$$

D'après ([7], exp. IX, cor. 3.8), la variété abélienne $J_0(N)$ admet une réduction semi-stable sur une extension E_v de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ si et seulement si la restriction de ρ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/E_v)$ est unipotente. D'autre part, la représentation ρ peut se décomposer (*cf.* lemme 1 ci-dessous) en une somme $\oplus\rho_i$ de représentations de degré 2 telles que pour tout i, le déterminant de ρ_i est égal au caractère cyclotomique ω_ℓ par lequel G agit sur μ_{ℓ^∞} et l'exposant en p du conducteur d'Artin de ρ_i est $\leq v$. Pour rendre unipotente la représentation ρ il faut et il suffit de rendre unipotente chacune de ses composantes ρ_i. Ceci est possible grâce à la théorie du corps des classes et aux travaux d'Henniart [4], dont la source d'investigation est [8].

On va alors étudier en fonction de v le degré d'une telle extension E_v. Le cas $p = 2$ est particulièrement délicat. On l'étudiera séparément des autres cas. Les résultats de cet article ont été annoncés dans [5] et sont énoncés ici au §3, pour le cas $p \neq 2$ et au §5, pour le cas $p = 2$.

1. Décomposition de la représentation ρ.

On conserve les notations et les données du §0 à ceci près que p n'est pas forcément un diviseur de N. On va ramener l'étude de l'unipotence de la représentation ρ à celle de représentations de degré 2 de G sur $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$.

LEMME 1. — *Soient p et ℓ deux nombres premiers distincts et soit N un entier ≥ 1. Notons v la valuation de N en p. Alors la représentation*

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(T_\ell(J_0(N) \underset{\mathbf{Z}_\ell}{\otimes} \overline{\mathbf{Q}}_\ell\big)$$

peut se décomposer en une somme

$$\rho = \oplus\rho_i$$

de représentations de degré 2 telles que pour tout i on ait :

(i) *l'exposant en p, du conducteur d'Artin de ρ_i est $\leq v$,*

(ii) *le déterminant de ρ_i est égal au caractère cyclotomique ω_ℓ.*

Pour la définition du caractère cyclotomique, voir par exemple ([3], p. 67) et pour ce qui est du conducteur d'Artin voir par exemple ([6], chap. 5).

Démonstration. — Soit M un entier et soit $f = \sum_{n \geq 1} c_n q^n$ une newform de poids 2 et de niveau M au sens d'Atkin-Lehner ([1]) avec $c_n \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell$ pour tout n. Considérons l'espace de cohomologie ℓ-adique

$$H(M) := H^1(X_0(M) \otimes \overline{\mathbf{Q}}, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

c'est aussi le dual du module de Tate $V(M)$. L'espace $H(M)$ est muni des endomorphismes T_q^* déduits des correspondances de Hecke T_q (q ne divisant pas M) et de l'action (commutant aux T_q^*) du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. L'espace

$$H_f := \bigcap_q \ker(T_q^* - c_q)$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $H(M)$ et définit une représentation

$$\rho_\ell : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

telle que (*cf.* [2], §2, p. 36 et 37 et §4, p. 42) le déterminant de ρ_ℓ est égal à ω_ℓ^{-1} et pour tout nombre premier $p \neq \ell$ l'exposant en p du conducteur d'Artin de ρ_ℓ est égal à la valuation de M en p.

Posons

$$H(M)^{\mathrm{new}} = \bigoplus_f H_f$$

où la somme est étendue sur toutes les newforms de poids 2 et de niveau M.

Soient maintenant M et d deux entiers tels que dM divise N. L'application $\tau \mapsto d\tau$ de $X_0(N)$ dans $X_0(M)$ induit une application ψ_d de $H(M)$ dans $H(N)$. On note $\phi_{(M,d)}$ l'application de $H(M)^{\mathrm{new}}$ dans $H(N)$ déduite de ψ_d par restriction. Il résulte de la théorie des newforms, au sens d'Atkin-Lehner que l'application

$$\bigoplus_{(M,d)} \phi_{(M,d)} : \bigoplus_{(M,d)} H(M)^{\mathrm{new}} \longrightarrow H(N)$$

est un isomorphisme de modules galoisiens. D'où le lemme.

2. Unipotence d'une représentation de degré 2 dans le cas $p \neq 2$.

2.1. Notations. — On introduit ici des notations qui seront valables aussi bien dans le cas $p = 2$ que dans le cas $p \neq 2$. Pour toute extension finie $F/\mathbf{Q}_p$, d'idéal maximal $\mathcal{M}_F$ et pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$U_F^n = 1 + \mathcal{M}_F^n$$

et on note F^{nr} l'extension maximale non ramifée de F. Par la théorie du corps de classes, aux sous-groupes fermés de U_F correspondent les extensions abéliennes de F contenant F^{nr}. Si S est un sous-groupe fermé de U_F on notera dans **toute la suite**

$$Cl(S)$$

l'extension abélienne de F ainsi correspondante.

Considérons une représentation linéaire de degré 2

$$R : G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

avec pour déterminant ω_ℓ et un conducteur d'Artin d'exposant inférieur ou égal à un entier v. Étudions pour quel corps F, la restriction de R à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)$ est-elle unipotente? Nous dirons, pour simplifier, que R *est unipotente sur* F pour traduire cette propriété.

2.2. Étude d'une représentation R réductible.

LEMME 2. — *Une représentation réductible $R : G \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ dont le conducteur d'Artin est d'exposant $a(R) \leq v$ et dont le déterminant est égal au caractère cyclotomique ω_ℓ est unipotente sur le corps (cf. 2.1 pour les notations)*

$$M_0^v = Cl(U_{\mathbf{Q}_p}^{[v/2]}) \quad \textit{où} \quad [v/2] \textit{ désigne la partie entière de } v/2.$$

Démonstration. — Puisque R est réductible, sa semi-simplifiée est de la forme $\chi \oplus \omega_\ell \chi^{-1}$ où χ est un caractère abélien de G. On sait (*cf.* [6], Prop. 6.a, p. 111) que $a(R) \geq a(\chi) + a(\omega_\ell \chi^{-1})$. Or, $a(\omega_\ell \chi^{-1}) = a(\chi)$ car ω_ℓ est non ramifié. Et comme $a(R) \leq v$ on a alors $a(\chi) \leq [v/2]$ et le lemme.

2.3. Étude d'une représentation irréductible. — Supposons R irréductible. Il existe une extension finie F de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ sur laquelle R est unipotente et quitte à grossir F, on peut supposer F galoisienne sur $\mathbf{Q}_p$.

LEMME 3. — *Sous ces conditions, la restriction de* R *à* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)$ *est triviale, et il existe un caractère non ramifié* $\phi : \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p) \longrightarrow \overline{\mathbf{Q}}_\ell^*$ *tel que* $R \otimes \phi^{-1}$ *est d'image finie.*

Démonstration. — Considérons l'intersection des $\ker(R(\sigma)-1)$, avec σ dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F)$; c'est un sous-espace non nul, stable par G. Il s'ensuit que R se factorise par $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$; dans la suite nous considérons R comme représentation de $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$. On a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p) \longrightarrow \hat{\mathbf{Z}} \longrightarrow 0,$$

avec $H = \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}})$. Chaque commutateur de $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$ est donc dans H. On déduit facilement de la finitude de H que le quotient de $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$ par son centre C est fini. Comme R est irréductible, sa restriction à C est donnée par un caractère $\chi : C \longrightarrow \mathbf{Q}_\ell^*$. Notons $\overline{C}$ l'image de C dans $\hat{\mathbf{Z}}$. Il existe $n > 1$ tel que χ^n se factorise par $\overline{C}$. Soit ϕ un caractère de $\hat{\mathbf{Z}}$ tel que ϕ^n prolonge χ^n. Alors la restriction à C de $R \otimes \phi^{-1}$ est donnée par le caractère $\chi\phi^{-1}$, dont la restriction au sous-groupe $\{c^n / c \in C\}$ est triviale. Comme ce dernier sous-groupe est d'indice fini dans $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$, l'image de $R \otimes \phi^{-1}$ est finie. D'où le lemme.

Considérons les trois extensions quadratiques $\Omega_i/\mathbf{Q}_p$ $(i = 1, 2, 3)$ et désignons par Ω_1 celle qui est *non ramifiée*. Les représentations R et $R' := R \otimes \phi^{-1}$ où ϕ est comme dans le lemme 3, ont même restriction au sous-groupe d'inertie et on sait que si $p \neq 2$ alors R' est induite à partir de l'un des Ω_i. Quitte à remplacer R par R', on peut supposer R induite à partir de l'un des Ω_i et on écrit alors $R = \mathrm{Ind}_{H_i}^G(\chi_i)$ où $H_i = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\Omega_i)$ et χ_i est un caractère de H_i.

LEMME 4. — *Une représentation irréductible* $R : G \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *induite à partir de* Ω_i *et dont le conducteur d'Artin est d'exposant* $a(R) \leq v$ *est unipotente sur le corps* M_i^v *défini par :*

$$M_i^v = \begin{cases} Cl(U_{\Omega_i}^{[v/2]}) & si \;\; i = 1 \\ Cl(U_{\Omega_i}^{v-1}) & si \;\; i = 2, 3. \end{cases}$$

Démonstration. — a) Supposons R induite par un caractère χ_1 de H_1. D'après ([4], prop. 11.3, p. 65), on sait que $a(\mathrm{Ind}_{H_1}^G(\chi_1)) = 2a(\chi_1)$, donc puisque $a(R) \leq v$ on aura $a(\chi_1) \leq [v/2]$ et R sera unipotente sur M_1^v.

b) Supposons R induite à partir d'un caractère χ_i de H_i $(i = 2, 3)$. On sait d'après [*loc. cit.*] que $a(\mathrm{Ind}_{H_i}^G(\chi_i)) = a(\chi_i) + 1$, donc comme $a(R) \leq v$ on aura $a(\chi_i) \leq v - 1$ et R sera unipotente sur le corps M_i^v du lemme.

3. Le résultat dans le cas $p \neq 2$.

Soient N un entier et p un nombre premier $\neq 2$. Supposons que p divise N et notons v la valuation de N en p. Il est bien connu que si $v = 1$ la variété abélienne $J_0(N)$ admet une réduction semi-stable sur $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$. *On suppose donc dans toute la suite que* $v \geq 2$.

THÉORÈME 1. — *Soient N un entier et p un nombre premier $\neq 2$. Supposons que la valuation de N en p est $v \geq 2$. Notons Ω_1, Ω_2 et Ω_3 les trois extensions quadratiques de $\mathbf{Q}_p$ et posons $K = \Omega_1\Omega_2\Omega_3$. Alors la variété abélienne $J_0(N)$ est semi-stable sur le corps (voir 2.1 pour les notations)*

$$E_v = Cl(\pm U_K^{v-1}) \quad \text{où} \quad \pm U_K^{v-1} = \{\alpha \in U_K \,/\, \alpha \in U_K^{v-1} \ \text{ou} \ -\alpha \in U_K^{v-1}\}.$$

THÉORÈME 2. — *Soient N un entier et p un nombre premier $\neq 2$. Supposons que la valuation de N en p est $v \geq 2$. Alors la variété abélienne $J_0(N)$ est semi-stable sur une extension E de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ de degré*

$$[E : \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}] = p^{2(v-2)}(p^2 - 1).$$

Le théorème 2 est une conséquence du théorème 1. En effet, on peut prendre $E = E_v$. Posons $L = Cl(U_K^{v-1})$. On a alors $[K^{\mathrm{nr}} : \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}] = 2$ et $[L : E] = 2$ donc

$$[E : \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}] = [L : K^{\mathrm{nr}}] = [U_K : U_K^{v-1}] = p^{2(v-2)}(p^2 - 1).$$

Preuve du Théorème 1. — Soit E une extension de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$. La restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/E)$ de la représentation ρ du lemme 1 est unipotente si et seulement si chacune des restrictions de ses composantes ρ_i l'est. Posons

$$M_v = M_1^v M_2^v M_3^v$$

où M_i^v est le corps défini au lemme 4 et revenons à la représentation ρ du lemme 1. Par le lemme 4, les composantes irréductibles de ρ sont unipotentes sur M_v et ses composantes non irréductibles sont unipotentes sur le corps M_0^v défini en lemme 2. Donc la variété abélienne $J_0(N)$ est semi-stable sur le corps $M_0^v M_v$. Il reste à montrer que $M_0^v M_v$ est égal à l'extension E_v du théorème.

Reprenons les notations : $K = \Omega_1\Omega_2\Omega_3$ où Ω_1, Ω_2 et Ω_3 sont les trois extensions quadratiques de $\mathbf{Q}_p$. On a supposé que Ω_1 est non ramifiée. On note N_i la norme de K/Ω_i et on définit les groupes S_i^v $(i = 0,1,2,3)$ par :

$$\begin{aligned} S_0^v &= \{\alpha \in U_{\Omega_1} \,/\, N_{\Omega_1/\mathbf{Q}_p}(\alpha) \in U_{\mathbf{Q}_p}^{[v/2]}\} \\ S_1^v &= \{\alpha \in U_K \,/\, N_1(\alpha) \in U_{\Omega_1}^{[v/2]}\} \\ S_2^v &= \{\alpha \in U_K \,/\, N_2(\alpha) \in U_{\Omega_2}^{v-1}\} \\ S_3^v &= \{\alpha \in U_K \,/\, N_3(\alpha) \in U_{\Omega_3}^{v-1}\}. \end{aligned}$$

Le corps K est une extension quadratique ramifiée de Ω_1 et non ramifiée de Ω_i pour $i = 2,3$. Le corps M_0^v contient $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et par suite contient Ω_1. Donc $M_0^v = Cl(S_0^v)$. De même, pour $i = 2,3$, les corps M_i^v contiennent Ω_i^{nr} donc contiennent K. Enfin $N_1(K^*) \supseteq U_{\Omega_1}^{[v/2]}$ pour $v \geq 2$, donc M_1^v contient aussi K. Par conséquent, pour tout $i = 1,2,3$ on a $M_i^v = Cl(S_i^v)$ et donc

$$M_v = Cl(S_1^v \cap S_2^v \cap S_3^v).$$

D'autre part, $N_{\Omega_1/\mathbf{Q}_p}(U_{\Omega_1}^{[v/2]}) = U_{\mathbf{Q}_p}^{[v/2]}$, donc $U_{\Omega_1}^{[v/2]} \subseteq S_0^v$ et par suite $M_0^v \subseteq M_1^v$ et $M_0^v M_v = M_v$. Pour montrer que $E_v = M_v$ il suffit alors de montrer que

$$\pm U_K^{v-1} = S_1^v \cap S_2^v \cap S_3^v.$$

a) Montrons que $\pm U_K^{v-1} \subseteq S_1^v \cap S_2^v \cap S_3^v$. Pour $i = 2,3$ on a $N_i(\pm U_K^{v-1}) = U_{\Omega_i}^{v-1}$ car K est non ramifié sur Ω_i. Donc $S_i^v \supseteq \pm U_K^{v-1}$. D'autre part, la fonction de Herbrand ψ de K/Ω_1 est définie par (*cf.* [6], p. 91) :

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et on sait (*cf.* [6], p. 93, Cor. 3) que si v est pair, soit $v = 2m$ alors

$$N_1(\pm U_K^{v-1}) = N_1(\pm U_K^{\psi(m-1)+1}) = U_{\Omega_1}^m = U_{\Omega_1}^{[v/2]}$$

et si v est impair, soit $v = 2m+1$ alors

$$N_1(\pm U_K^{v-1}) = N_1(\pm U_K^{\psi(m)}) = U_{\Omega_1}^m = U_{\Omega_1}^{[v/2]}.$$

Dans tous les cas $S_1^v \supseteq \pm U_K^{v-1}$.

b) Montrons que $\pm U_K^{v-1} \supseteq S_1^v \cap S_2^v \cap S_3^v$. Notons $\tilde{K}$ et $\tilde{\Omega}_i$ les corps résiduels respectifs de K et de Ω_i et par $(\tilde{\ })$ les éléments de ces corps résiduels. Soit $\alpha \neq 1$ un élément de $S_1^v \cap S_2^v \cap S_3^v$. On a en particulier $(N_{\tilde{K}/\tilde{\Omega}_1}(\tilde{\alpha}))^2 = 1$. Or, $\tilde{K} = \tilde{\Omega}_1$, donc $\tilde{\alpha} = \pm 1$. C'est-à-dire $\alpha \in \pm U_K^1$. Quitte à remplacer α par $-\alpha$, on peut supposer $\alpha \in U_K^1$. Il existe donc un entier $n \geq 1$ tel que $\alpha \in U_K^n - U_K^{n+1}$.

Si $n \geq v-1$ alors la démonstration est finie.

Si $1 \leq n \leq v-2$ et n est pair, on sait (*cf.* [6], p. 92-93) que N_1 définit par passage au quotient un isomorphisme de U_K^n/U_K^{n+1} sur $U_{\Omega_1}^{n/2}/U_{\Omega_1}^{(n/2)+1}$, donc $N_1(\alpha) \notin U_{\Omega_1}^{[v/2]}$ et ceci est absurde car $\alpha \in S_1^v$.

Si $1 \leq n \leq v-2$ et n est impair. Soit u une unité qui n'est pas un carré de $\mathbf{Q}_p$. On a alors :

$$\Omega_1 = \mathbf{Q}_p(\sqrt{u}), \quad \Omega_2 = \mathbf{Q}_p(\sqrt{p}), \quad \Omega_3 = \mathbf{Q}_p(\sqrt{up}) \quad \text{et} \quad K = \mathbf{Q}_p(\sqrt{u}, \sqrt{p}).$$

Notons σ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/\mathbf{F}_p)$ et T_i la trace de K/Ω_i et prenons $\sqrt{p}$ comme uniformisante de K. L'élément α s'écrit sous la forme :

$$\alpha = 1 + (\sqrt{p})^n \beta = 1 + (\sqrt{up})^n \Big(\frac{\beta}{\sqrt{u^n}}\Big) \quad \text{avec} \quad \beta \in U_K.$$

D'où

$$\begin{aligned} N_2(\alpha) &= 1 + (\sqrt{p})^n\, T_2(\beta) + p^n\, N_2(\beta) \\ N_3(\alpha) &= 1 + (\sqrt{up})^n\, T_3\Big(\frac{\beta}{\sqrt{u^n}}\Big) + (up)^n\, N_3\Big(\frac{\beta}{\sqrt{u^n}}\Big) \end{aligned}$$

et puisque $\alpha \in S_i^v$ $(i = 2,3)$ alors $T_2(\beta) \equiv 0 \pmod{\sqrt{p}}$ et $T_3\Big(\frac{\beta}{\sqrt{u^n}}\Big) \equiv 0 \pmod{\sqrt{p}}$. Donc comme n est impair on a $\tilde{\beta}+\sigma(\tilde{\beta}) = 0$ et $\tilde{\beta}-\sigma(\tilde{\beta}) = 0$ c'est-à-dire $\tilde{\beta} = 0$ et ceci est absurde car $\beta \in U_K$. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

4. Étude préliminaire dans le cas $p = 2$.

Dans ce paragraphe on considère un entier $v \geq 2$, un nombre premier $\ell \neq 2$ et une représentation

$$R : G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_2/\mathbf{Q}_2) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$$

de déterminant ω_ℓ et de conducteur d'Artin d'exposant $a(R) \leq v$ et on se propose de déterminer un corps F sur lequel R est unipotente *i.e.* la restriction de R à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_2/F)$ est unipotente.

Auparavant on va préciser certaines notations qui resteront valables dans toute la suite.

4.1. Notations et terminologie. — Le corps $\mathbf{Q}_2$ admet une extension quadratique non ramifiée Ω_1 et six extensions quadratiques ramifiées $(\Omega_i)_{(2\leq i\leq 7)}$. On note d_i l'exposant différentiel de Ω_i c'est-à-dire l'exposant en 2 du discriminant de $\Omega_i/\mathbf{Q}_2$. On a $d_1 = 0$ et on peut numéroter les Ω_i de telle sorte que $d_2 = d_3 = 2$ et $d_i = 3$ pour $i \geq 4$. Soit j une racine cubique primitive de l'unité. On pose

$$\Omega_1 = \mathbf{Q}_2(j)\,, \quad \Omega_2 = \mathbf{Q}_2(i)\,, \quad \Omega_3 = \mathbf{Q}_2(\sqrt{3})\,, \quad \Omega_4 = \mathbf{Q}_2(\sqrt{2})$$
$$\Omega_5 = \mathbf{Q}_2(\sqrt{-2})\,, \quad \Omega_6 = \mathbf{Q}_2(\sqrt{6})\,, \quad \Omega_7 = \mathbf{Q}_2(\sqrt{-6})$$
$$M_i^v = \begin{cases} Cl(U_{\Omega_i}^{[v/2]}) & \text{si } i = 1 \\ Cl(U_{\Omega_i}^{v-d_i}) & \text{si } 2 \leq i \leq 7 \end{cases}$$

(voir 2.1 pour ces notations).

Soit η une racine primitive 7-ième de l'unité dans $\overline{\mathbf{Q}}_2$ telle que $\eta^3+\eta+1$ soit de valuation positive et posons

$$L = \mathbf{Q}_2(\eta)(\sqrt{1+2\eta}) \quad \text{et} \quad L' = \mathbf{Q}_2(\eta)(\sqrt{1+2\eta}, \sqrt{1+2\eta^2}).$$

Le corps L' est l'unique extension de $\mathbf{Q}_2$ dont le groupe de Galois est isomorphe au groupe alterné A_4 (*cf.* [8]). On pose

$$A = Cl(U_L^3).$$

Enfin soit π une racine cubique de 2. Notons σ l'élément de $\mathrm{Gal}(\Omega_1(\pi)/\Omega_1)$ tel que $\pi^\sigma = j\pi$. Pour $(a,b) = (1,1), (1,0), (0,1)$ on pose $x(a,b) = (1+\pi)\,(1+\pi^2)^b\,(1+\pi^3)^a$ et on considère les corps

$$L(a,b) = \Omega_1(\pi)(\sqrt{x(a,b)}) \quad \text{et} \quad L'(a,b) = \Omega_1(\pi)(\sqrt{x(a,b)}, \sqrt{x(a,b)^\sigma}).$$

Les corps $L'(a,b)$ sont les seules extensions de $\mathbf{Q}_2$ dont le groupe de Galois est isomorphe au groupe symétrique S_4 (*loc. cit.*). Posons

$$M(a,b) = Cl(U_{L(a,b)}^{n(a,b)}) \quad \text{avec} \quad n(a,b) = \begin{cases} 3 & \text{si } (a,b) = (0,1) \\ 11 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La représentation R peut être irréductible ou non. Si elle est irréductible alors comme au §2.3, on peut au besoin remplacer R par R' et utiliser la classification de ces représentations donnée par Henniart dans [4]. La représentation R peut être alors *simplement induite* c'est-à-dire induite d'une seule extension quadratique de $\mathbf{Q}_2$; elle peut être aussi *triplement induite* c'est-à-dire induite de trois extensions quadratiques distinctes de $\mathbf{Q}_2$. Enfin elle peut être *non induite* d'aucune extension quadratique de $\mathbf{Q}_2$. Dans ce dernier cas le noyau de la représentation projective r associée à R fixe une extension de $\mathbf{Q}_2$ de groupe de Galois sur $\mathbf{Q}_2$ isomorphe au groupe alterné A_4 ou au groupe symétrique S_4. Suivant le cas, on dira alors que R est du *type* A_4 ou du type S_4. Puisque les seules extensions de $\mathbf{Q}_2$ de groupe de Galois isomorphe à S_4 sont les corps $L'(a,b)$ définis en 4.1, on dira alors que R est du *type* (a,b) si le noyau de r fixe $L'(a,b)$.

Les lemmes 5, 6, 7 et 8 qui suivent précisent le corps d'unipotence de R selon son type. On va utiliser les notations introduites ci-dessus.

4.2. Unipotence de la représentation R.

LEMME 5. — *Une représentation* **réductible** $R : G \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *dont le conducteur d'Artin est d'exposant* $a(R) \leq v$ *et dont le déterminant est égal au caractère cyclotomique* ω_ℓ *est unipotente sur le corps (cf. 2.1 pour les notations)*

$$M_0^v = Cl(U_{\mathbf{Q}_2}^{[v/2]}) \quad \text{où} \quad [v/2] \text{ désigne la partie entière de } v/2.$$

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 2.

LEMME 6. — *Une représentation irréductible* $R : G \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *qui est* **simplement induite** *à partir de* Ω_i *et dont le conducteur d'Artin est d'exposant* $a(R) \leq v$ *est unipotente sur le corps* M_i^v *(voir 4.1).*

Démonstration. — Posons $H_i = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_2/\Omega_i)$ et supposons que $R = \mathrm{Ind}_{H_i}^G(\chi_i)$ pour un certain caractère χ_i de H_i. On sait alors (*cf.* [4], p. 65 et p. 74) que

$$\begin{cases} 2 \leq a(R) = 2a(\chi_i) \leq v & \text{si } i = 1 \\ d_i + 1 \leq a(R) = a(\chi_i) + d_i \leq v & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

(voir 4.1 pour la définition de d_i). D'où

$$a(\chi_i) \leq \begin{cases} [v/2] & \text{si } i = 1 \\ v - d_i & \text{si } i \neq 1. \end{cases}$$

Donc R est triviale sur M_i^v.

LEMME 7. — *Si une représentation* $R : G \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ *est* **triplement induite** *(voir 4.1) et de conducteur d'Artin d'exposant* $a(R) \leq v$ *alors* $a(R) \geq 4$ *et*

a) *Si* $v = 4, 5$ *ou* 6 *alors* R *est unipotente sur* M_1^v.

b) *Si* $v \geq 7$ *alors* R *est unipotente sur* $M_1^v\, M_4^v\, M_5^v$.

Démonstration. — Ici la représentation R s'écrit $R = R' \otimes \xi$ où R' est l'une des représentations décrites par Henniart dans ([4], Tab. VI, p. 98) et ξ est un caractère non ramifié de G. Donc R et R' ont même restriction au groupe d'inertie.

D'autre part, on a dans tous les cas $a(R') \geq 4$ et $R' = \mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ où $H = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_2/\Omega)$ et Ω est l'une des trois extensions quadratiques par où

R est induite et χ est un caractère de H dont on connaît l'exposant. On choisira alors l'extension Ω et le caractère χ dont le conducteur d'Artin est d'exposant minimal parmi les trois choix possibles en se servant de la table [*loc. cit.*]. La représentation R est alors triviale sur le corps $F = Cl(U_\Omega^{a(\chi)})$.

En examinant la table citée ci-dessus, on s'aperçoit que si $v = 4, 5, 6$ alors on peut prendre $F = M_1^v$ et si $v \geq 7$, on peut prendre pour F le corps $M_1^v M_4^v M_5^v$.

LEMME 8. — *Si une représentation $R : G \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ est* **non induite** *(voir 4.1) et de conducteur d'Artin d'exposant $a(R) \leq v$ alors*

a) *Si R est du type A_4, on a $a(R) \geq 5$ et R est unipotente sur A.*

b) *Si R est du type $(0,1)$, on a $a(R) \geq 3$ et R est unipotente sur $M(0,1)$.*

c) *Si R est du type $(a,b) = (1,0)$ ou $(1,1)$, on a $a(R) \geq 7$ et R est unipotente sur $M(a,b)$.*

Démonstration. — a) Supposons R du type A_4. Alors $R = R' \otimes \xi$ où R' est une représentation de G d'exposant $a(R') = 5$, (*cf.* [4], p. 112) et ξ est un caractère de G, que l'on peut supposer non ramifié comme au §2.3, de sorte que $a(\xi) = 0$. D'autre part, la restriction de R' à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_2/\mathbf{Q}_2(\eta))$ est de la forme $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ où $H = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_2/L)$ et χ est un caractère de H d'exposant égal à 3, (*cf.* [*loc. cit*], p. 113). La représentation R', donc aussi R, est alors triviale sur A.

b) On fait le même raisonnement que dans le a). D'après Henniart ([*loc. cit.*], p. 117 et 121), la représentation R' a pour exposant 3 et sa restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_2/\Omega_1(\pi))$ a pour exposant 5 et est induite par un caractère χ d'exposant 3 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_2/L(0,1))$. Donc R est triviale sur $M(0,1)$.

c) Ici la représentation R' a pour exposant 7 et sa restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_2/\Omega_1(\pi))$ a pour exposant 17 et est induite par un caractère χ d'exposant 11 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_2/L(a,b))$. Donc R est triviale sur $M(a,b)$.

5. Le résultat dans le cas $p = 2$.

THÉORÈME 3. — *Soit N un entier ≥ 1 et soit v la valuation de N en 2. Alors la variété abélienne $J_0(N)$ est semi-stable sur l'extension E_v de*

$\mathbf{Q}_2^{\mathrm{nr}}$ *définie (voir 4.1 pour les notations) par*

$$E_v = \begin{cases} \mathbf{Q}_2^{\mathrm{nr}} & \textit{si} \;\; v \leq 1 \\ M_1^v & \textit{si} \;\; v = 2 \\ M_1^v M(0,1) & \textit{si} \;\; v = 3,4 \\ M_1^v M_2^v M_3^v M(0,1) A & \textit{si} \;\; v = 5,6 \\ \prod_{i=1}^{7} M_i^v \prod_{(a,b)} M(a,b)\, A & \textit{si} \;\; v \geq 7. \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer les lemmes 4 à 7 aux différentes composantes de la représentation ρ du lemme 1. On remarque en particulier qu'une composante de ρ ne peut être simplement induite de Ω_i $(i = 2,3)$ que si $v \geq 5$ et ne peut être simplement induite des autres Ω_i que si $v \geq 7$.

Remarque. — On peut montrer que le degré sur $\mathbf{Q}_2^{\mathrm{nr}}$ de l'extension E_v du théorème 3 est tel que

$$[E_v : \mathbf{Q}_2^{\mathrm{nr}}] \begin{cases} = 1 & \text{si} \;\; v \leq 1 \\ = 3 & \text{si} \;\; v = 2 \\ = 2^{2v-1}.3^2 & \text{si} \;\; v = 3,4 \\ \leq 2^{2v+6}.3^3.7 & \text{si} \;\; v = 5,6 \\ \leq 2^{4v+29}.3^3.7 & \text{si} \;\; v \geq 7. \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.O.L. Atkin et J. Lehner, Hecke operators on $\Gamma_0(M)$, Math. Ann., 185 (1970), 134–160.

[2] H. Carayol, Formes modulaires et représentations $\ell-$ adiques, Astérisque, 147–148 (1987), 33–47.

[3] G. Cornell et J.H. Silverman, Arithmetic Geometry, Springer Verlag, 1986.

[4] G. Henniart, Représentations du groupe de Weil d'un corps local, Thèse de 3e cycle, Orsay, (1978). Les résultats sont parus dans : Représentations de degré 2 de Gal$(\overline{\mathbf{Q}}_2/\mathbf{Q}_2)$, C.R. Acad. Sci. Paris, 284, série I (1977), 1329–1332.

[5] M. Krir, Une extension de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ sur laquele $J_0(N)$ est semi-stable, C.R. Acad. Sci. Paris, 316, série I (1993), 403–405.

[6] J.-P. Serre, Corps locaux, Hermann, Paris, 1968.

[7] S.G.A. 7, Séminaire de Géométrie Algébrique, Lecture Notes in Math., 288, Springer Verlag, (1972).

[8] A. WEIL, Exercices dyadiques, Inv. Math., 27 (1974), 1–22.

Manuscrit reçu le 16 mars 1995,
révisé le 21 septembre 1995,
accepté le 21 novembre 1995.

Mohamed KRIR,
Université de Versailles
Département de Mathématiques
Bât. Fermat
45, avenue des États-Unis
78035 Versailles Cedex (France).