ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOISE DAL'BO

MARC PEIGNÉ

Groupes du ping-pong et géodésiques fermées en courbure -1

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 3 (1996), p. 755-799

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_3_755_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 3 (1996), 755–799

GROUPES DU PING-PONG ET GÉODÉSIQUES FERMÉES EN COURBURE –1

par F. DAL'BO et M. PEIGNÉ

INTRODUCTION

Munissons la boule unité ouverte $\mathbb{B}^d$ de la métrique de Poincaré $\dfrac{4|dx|^2}{(1-|x|^2)^2}$ et choisissons N isométries $\alpha_1, \cdots \alpha_N$ de $\mathbb{B}^d$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. *Le groupe Γ engendré par $\alpha_1, \cdots \alpha_N$ contient des transformations paraboliques.*

2. *Il existe $2N$ demi-boules fermées euclidiennes*

$$\mathbb{B}_{\alpha_1}, \mathbb{B}_{\alpha_1^{-1}}, \cdots, \mathbb{B}_{\alpha_N}, \mathbb{B}_{\alpha_N^{-1}}$$

dans $\mathbb{B}^d$, orthogonales à $\mathbb{S}^{d-1}$, deux à deux tangentes ou disjointes et telles que pour tout $1 \leq i \leq N$ on ait

$$\alpha_i(\mathbb{B}_{\alpha_i}) = \overline{\mathbb{B}^d - \mathbb{B}_{\alpha_i^{-1}}}.$$

La condition 1 entraîne que les boules $\mathbb{B}_{\alpha_1}, \mathbb{B}_{\alpha_1^{-1}}, \cdots, \mathbb{B}_{\alpha_N}, \mathbb{B}_{\alpha_N^{-1}}$ ne sont pas toutes deux à deux disjointes. De la condition 2 et du lemme du Ping-Pong de Klein [9] on déduit que Γ est discret, libre et géométriquement fini; nous dirons que Γ est un **groupe du Ping-Pong**. La présence de transformations paraboliques dans Γ revient à supposer que l'ensemble

Mots-clés : Isométrie parabolique – Point cuspidal – Opérateur de transfert – Théorème du renouvellement harmonique.
Classification math. : 53C22 – 60K05.

des géodésiques fermées de la variété $M = \mathbb{B}^d/\Gamma$ n'est pas inclus dans un compact. Le groupe Γ étant géométriquement fini, le nombre de géodésiques primitives fermées de M de longueur inférieure à a est fini. Notons d_H la distance hyperbolique sur $\mathbb{B}^d$ et δ l'exposant critique de la série de Poincaré $\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd_H(0,\gamma 0)}$ associée à Γ; nous démontrons le

THÉORÈME A. — *Le nombre de géodésiques primitives orientées et fermées de M dont la longueur est inférieure à a est équivalent à $\frac{e^{a\delta}}{a\delta}$ quand a tend vers $+\infty$.*

De nombreux résultats dans ce sens ont déjà été publiés; citons par exemple [5], [10], [13], [15]. Si $d = 2$, le théorème A est une conséquence d'un résultat de L. Guillopé sur les surfaces géométriquement finies de courbure -1 ([6]). En revanche, lorsque $d > 2$, ce résultat est nouveau et généralise celui de S. Lalley [12] établi pour les groupes Γ purement loxodromiques; la méthode qu'il utilise pour établir ce théorème consiste à traduire le problème géométrique initial en un problème de dénombrement d'orbites périodiques pour un flot spécial sur un sous-décalage de type fini, puis à relier ce problème de dénombrement à la théorie du renouvellement pour une marche de Markov transiente sur $\mathbb{R}$. Deux propriétés essentielles permettent dans ce contexte d'appliquer la théorie des opérateurs de transfert de Ruelle : le caractère dilatant du décalage assuré par l'absence de transformation parabolique dans le groupe et la régularité höldérienne de la fonction plafond définissant le flot spécial. Nous adaptons ici cette méthode pour démontrer le théorème A; la présence de transformations paraboliques dans Γ nous amène pour coder les géodésiques de M à introduire un alphabet infini et donc à sortir du cadre du formalisme thermodynamique de Ruelle. Pour pallier à cette difficulté, nous utilisons fortement la géométrie du problème en nous appuyant sur une étude précise de la dynamique des éléments de Γ.

Nous remercions Y. Guivarc'h pour nous avoir souligné l'intérêt d'établir l'asymptotique du nombre de géodésiques fermées en présence de transformations paraboliques dans le groupe Γ. Nous avons également bénéficié d'une lecture détaillée de notre première rédaction par M. Babillot et des remarques de E. Le Page; nous les remercions tous les deux.

I. TRANSFORMATIONS PARABOLIQUES DE Γ ET $\mathcal{A}$-DÉVELOPPEMENT.

Fixons un entier $N \geq 2$ et choisissons N isométries orientées $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ de $\mathbb{B}^d$ satisfaisant les conditions 1 et 2 citées dans l'introduction.

NOTATIONS. — *Pour tout $1 \leq i \leq N$, on note B_{α_i} la trace de $\mathbb{B}_{\alpha_i}$ sur $\mathbb{S}^{d-1}$, S_{α_i} le bord de B_{α_i} et l'on pose $\mathcal{A} = \{\alpha_1^{\pm 1}, \cdots, \alpha_N^{\pm 1}\}$.*

On note Λ l'ensemble limite de Γ, D l'ensemble $\mathbb{B}^d - \bigcup_{a \in \mathcal{A}} (\mathbb{B}_a - B_a)$ et $\partial\Lambda = \Lambda \cap \overline{D}$ l'ensemble des points limites cuspidaux [15].

L'ensemble D est un domaine fondamental pour l'action du groupe Γ engendré par $\mathcal{A}$. Nous supposons désormais que l'origine 0 appartient à D; ainsi, pour toute suite $a_1, \cdots, a_l$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $a_{i+1} \neq a_i^{\pm 1}$ on a $a_1 \cdots a_l(0) \in \mathbb{B}_{a_1^{-1}}$. On déduit de cette propriété que $\mathcal{A}$ est un système libre de générateurs de Γ.

I.a. Transformations paraboliques de Γ et points limites cuspidaux.

L'ensemble $\mathcal{A}$ formant un système libre de générateurs de Γ, à tout élément γ de Γ on associe de façon unique une suite finie $\omega_{\mathcal{A}}(\gamma) = a_1, \cdots, a_l$ de $\mathcal{A}$ définie par $a_1 a_2 \cdots a_l = \gamma$ et $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$ pour tout $1 \leq i \leq l-1$.

NOTATION. — *On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des éléments p paraboliques et primitifs (i.e. $p \neq \gamma^n$ pour tout $\gamma \in \Gamma - \{\mathrm{Id}\}$ et pour tout $n \geq 1$) de Γ tels que*

$$\omega_{\mathcal{A}}(p) = a_1, \cdots, a_l \text{ avec } l \geq 2, a_1 \neq a_l^{\pm 1} \text{ et } a_{i+1} \neq a_i^{\pm 1} \text{ pour } 1 \leq i \leq l-1.$$

Nous avons le

LEMME I.1. — *Si γ est une transformation parabolique primitive de Γ, elle est conjuguée à un élément de $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}$.*

Démonstration. — Supposons que γ ne soit pas conjugué à un élément de $\mathcal{A}$; ainsi $\omega_{\mathcal{A}}(\gamma) = a_1, \cdots, a_l$ avec $l \geq 2$. S'il existe $1 \leq i < l$ tel que $a_i = a_{i+1}$, on peut, quitte à conjuguer γ, supposer que $a_1 = a_2$ et

$a_l \neq a_1^{\pm 1}$. Soit x_γ le point fixe de γ; on a $x_\gamma = \lim_{n \to +\infty} \gamma^n(0) = \lim_{n \to +\infty} \gamma^{-n}(0)$ d'où $x_\gamma \in S_{a_1^{-1}} \cap S_{a_l}$. En appliquant le même raisonnement à $a_1^{-1}\gamma a_1$ et en utilisant l'égalité $a_1 = a_2$, on obtient $a_1^{-1}(x_\gamma) \in S_{a_1} \cap S_{a_1^{-1}}$. Par conséquent, $x_\gamma \in S_{a_1} \cap S_{a_1^{-1}} \cap S_{a_l}$ ce qui est impossible car $a_l \neq a_1^{\pm 1}$. □

L'ensemble limite de Γ contient les points fixes de tous les éléments de Γ; comme Γ contient des transformations paraboliques, on a $\partial\Lambda \neq \emptyset$ d'après le lemme précédent.

LEMME I.2. — *Si $x \in \partial\Lambda$ il existe exactement deux transformations paraboliques (γ et γ^{-1}) de $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}$ fixant x. De plus si $\omega_{\mathcal{A}}(\gamma) = a_1, \cdots, a_l$ (avec $l \geq 1$ et $a_l \neq a_1^{\pm 1}$) alors $x \in S_{a_1^{-1}} \cap S_{a_l}$.*

Démonstration. — Ce lemme découle de l'étude des points cuspidaux d'un groupe discret ([17] théorème 12.3.4) et du fait que $\mathcal{A}$ forme un système libre de générateurs de Γ. □

COROLLAIRE I.3. — *L'ensemble $\mathcal{P}$ est non vide si et seulement si il existe a_1 et a_l dans $\mathcal{A}, a_l \neq a_1^{\pm 1}$, tels que $S_{a_1^{-1}} \cap S_{a_l} \cap \Lambda \neq \emptyset$.*

I.b. $\mathcal{A}$-développement des points de Λ^0.

NOTATION. — *On note Λ^0 l'ensemble Λ privé des orbites sous Γ des points fixes des éléments de $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}$.*

L'ensemble $\mathcal{A}$ formant un système libre de générateurs de Γ, nous avons la

PROPOSITION I.4. — *Soit $x \in \Lambda^0$. Il existe une unique suite $(a_i)_{i \geq 1}$ de $\mathcal{A}$, notée $\omega_{\mathcal{A}}(x)$ et appelée $\underline{\mathcal{A} - \text{développement}}$ de x telle que*

(i) *la suite $(a_1 \cdots a_n(0))_{n \geq 1}$ converge vers x en distance euclidienne;*

(ii) *$a_{i+1} \neq a_i^{-1}$ pour tout $i \geq 1$.*

NOTATION. — *On note $\Sigma_{\mathcal{A}}^+$ l'ensemble $\{(a_i)_{i \geq 1} : a_i \in \mathcal{A}, a_{i+1} \neq a_i^{-1}\}$.*

La proposition précédente établit une injection $\omega_{\mathcal{A}}$ de Λ^0 dans $\Sigma_{\mathcal{A}}^+$; $\omega_{\mathcal{A}}$ n'est pas surjective car Λ^0 ne contient pas les points fixes des éléments de

$\mathcal{A}\cup\mathcal{P}$. Munissons $\Sigma^+_{\mathcal{A}}$ de la métrique D définie par $\forall (a_i)_{i\geq 1}$, $\forall (c_i)_{i\geq 1} \in \Sigma^+_{\mathcal{A}}$ $D((a_i)_{i\geq 1},(c_i)_{i\geq 1}) = \dfrac{1}{N}$ avec $N = \inf\{n \geq 1 : a_n \neq c_n\}$. L'application ω_A de Λ^0 muni de la distance euclidienne sur $(\omega_{\mathcal{A}}(\Lambda^0), D)$ est bicontinue d'où le

LEMME I.5. — *Soient $x \in \partial\Lambda$ et γ l'un des deux éléments de $\mathcal{A}\cup\mathcal{P}$ fixant x. Posons $\omega_{\mathcal{A}}(\gamma) = a_1, \cdots, a_l$. Si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\Lambda^0 \cap B_{a_1^{-1}}$ convergeant vers x alors la suite $(\omega(x_n))_{n\geq 1}$ converge vers la suite ω de période $a_1, \cdots a_l$.*

Démonstration. — Posons $\omega_{\mathcal{A}}(x_n) = (a_{ni})_{i\geq 1}$ avec $a_{n1} = a_1$ pour tout $n \geq 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(\omega_{\mathcal{A}}(x_n))_{n\geq 1}$ ne converge pas vers ω; il existe donc un entier $k \geq 2$ et une sous-suite $(x_{n_p})_{p\geq 1}$ tels que $a_{n_p i} = a_i$ pour tout $1 \leq i < k$ et $a_{n_p k} \neq a_k$. La suite $(a_{k-1}^{-1} \cdots a_1^{-1} x_{n_p})_{p\geq 1}$ converge vers $y = a_{k-1}^{-1} \cdots a_1^{-1} x$, point fixe de la transformation $a_k \cdots a_l a_1 \cdots a_{k-1}$. On a $y \in S_{a_k^{-1}} \cap S_{a_{k-1}}$ et pour tout $p \geq 1$ la suite $\omega_{\mathcal{A}}(a_{k-1}^{-1} \cdots a_1^{-1} x_{n_p})$ commence par $a_{n_p k} \neq a_k$; ainsi, pour p assez grand on obtient $a_{n_p k} = a_{k-1}^{-1}$ ce qui est absurde, car $a_{n_p(k-1)}$ $= a_{k-1}$. □

II. CODAGE DES GÉODÉSIQUES FERMÉES DE M LORSQUE $\mathcal{P} = \emptyset$

II. a. Codage des points de Λ^0 et des géodésiques fermées de M.

NOTATIONS. — *On note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble $\{\alpha^n / \alpha \in \mathcal{A}, n \geq 1\}$ et $\Sigma^+_{\mathcal{A}^*}$ l'ensemble des suites $(a_i^{n_i})_{i\geq 1}$ de $\mathcal{A}^*$ telles que $a_{i+1} \neq a_i^{\pm 1}$.*

Soit $x \in \Lambda^0$; on note $\omega_{\mathcal{A}^*}(x)$ la suite $(\alpha_{i_p}^{n_{i_p}})_{p\geq 1}$ construite à partir de $\omega_{\mathcal{A}}(x) = (a_i)_{i\geq 1}$ de la façon suivante :

$\alpha_{i_1} = a_1$ *et* $n_1 = \max\{n \geq 1 / a_1 = \cdots = a_n\}$

$\alpha_{i_p} = a_{n_{p-1}+1}$ *et* $n_p = \max\{n \geq 1 / a_{n_{p-1}+1} = a_{n_{p-1}+2} = \cdots = a_{n_{p-1}+n}\}$.

La suite $\omega_{\mathcal{A}^*}(x)$ est appelée $\underline{\mathcal{A}^* - \text{développement de } x}$.

On obtient ainsi une bijection de Λ^0 sur $\Sigma^+_{\mathcal{A}^*}$. Notons $T_{\mathcal{A}^*}$ l'application sur Λ^0 induite par le décalage sur $\Sigma^+_{\mathcal{A}^*}$ et définie par $T_{\mathcal{A}^*}(x) = a_1^{-n_1} x$ où $a_1^{n_1}$ est le premier terme de $\omega_{\mathcal{A}^*}(x)$.

Soient x un point $T_{\mathcal{A}^*}$-périodique de Λ^0 et $p_{\mathcal{A}^*}(x)$ la plus petite puissance strictement positive de $T_{\mathcal{A}^*}$ fixant x. Si x est $T_{\mathcal{A}^*}$-périodique alors $\omega_{\mathcal{A}^*}(x)$ est périodique, de période $a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_{p_{\mathcal{A}^*}(x)}^{n_{p_{\mathcal{A}^*}(x)}}$, et l'on note

$$\omega_{\mathcal{A}^*}(x) = \overline{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_{p_{\mathcal{A}^*}(x)}^{n_{p_{\mathcal{A}^*}(x)}}}.$$

Dans ce qui suit, $\mathrm{Per}_{\mathcal{A}^*}(\Lambda^0)$ désigne l'ensemble des points $T_{\mathcal{A}^*}$-périodiques de Λ^0.

Soit γ une transformation loxodromique de Γ; la projection sur M de son axe, orienté du point répulsif vers le point attractif, est une géodésique fermée et orientée de M notée ξ_γ. Notons $\mathcal{G}_M$ l'ensemble des géodésiques fermées primitives orientées de M privé des géodésiques ξ_α avec $\alpha \in \mathcal{A}$; la démonstration du lemme suivant est laissée au lecteur.

LEMME II.1. — *Soit $\xi_{\mathcal{A}^*}$ l'application de $\mathrm{Per}_{\mathcal{A}^*}(\Lambda^0)$ sur $\mathcal{G}_M$ qui à x associe la géodésique $\xi_{\mathcal{A}^*}(x) = \xi_{a_1^{n_1}\cdots a_p^{n_p}}$ où $p = p_{\mathcal{A}^*}(x)$ et $\omega_{\mathcal{A}^*}(x) = \overline{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \cdots, a_p^{n_p}}$. Cette application est surjective; de plus, si $\xi_{\mathcal{A}^*}(x_1) = \xi_{\mathcal{A}^*}(x_2)$, alors $p_{\mathcal{A}^*}(x_1) = p_{\mathcal{A}^*}(x_2)$ et il existe $1 \leq k \leq p_{\mathcal{A}^*}(x_1)$ tel que $x_2 = T_{\mathcal{A}^*}^k(x_1)$.*

Si γ est une transformation loxodromique primitive de Γ, la longueur $l(\xi_\gamma)$ de la géodésique ξ_γ est donnée par $l(\xi_\gamma) = -\mathrm{Log}\,|\gamma'(x_\gamma)| = \mathrm{Log}\,|\gamma'(x_{\gamma^{-1}})|$ $(*)$ où $x_\gamma = \lim_{n\to+\infty} \gamma^n(0)$.

NOTATIONS. — *Notons $f_{\mathcal{A}^*}$ l' application de Λ^0 dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \Lambda^0 \quad f_{\mathcal{A}^*}(x) = -\mathrm{Log}\,|(a_1^{n_1})'(a_1^{-n_1}x)|$$

où $a_1^{n_1}$ est le premier terme de $\omega_{\mathcal{A}^*}(x)$ et posons $S_n f_{\mathcal{A}^*} = f_{\mathcal{A}^*} + f_{\mathcal{A}^*} \circ T_{\mathcal{A}^*} + \cdots + f_{\mathcal{A}^*} \circ T_{\mathcal{A}^*}^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Remarquons que $f_{\mathcal{A}^*}(x) = \mathrm{Log}\,|(a_1^{-n_1})'(x)| = \mathrm{Log}\,|T'_{\mathcal{A}^*}(x)|$ et donc $S_n f_{\mathcal{A}^*}(x) = \mathrm{Log}\ |(T_{\mathcal{A}^*}^n)'(x)|$. On déduit de $(*)$ que si $\xi \in \mathcal{G}_M$ et $x \in \mathrm{Per}_{\mathcal{A}^*}(\Lambda^0)$ sont tels que $\xi = \xi_{\mathcal{A}^*}(x)$ alors $l(\xi) = S_{p_{\mathcal{A}^*}(x)} f_{\mathcal{A}^*}(x)$.

COROLLAIRE II.2. — *Pour tout $a > 0$, le nombre $\pi_M(a)$ de géodésiques de $\mathcal{G}_M$ de longueur inférieure à a est donné par $\pi_M(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sharp\{x \in \mathrm{Per}_{\mathcal{A}^*}(\Lambda^0)/p_{\mathcal{A}^*}(x) = n$ et $S_n f_{\mathcal{A}^*}(x) \leq a\}$.*

Le groupe Γ étant géométriquement fini, $\pi_M(a)$ est fini.

II.b. Propriétés de $T_{\mathcal{A}^*}$.

NOTATIONS. — *On note $\Sigma_{\mathcal{A}^*}$ l'ensemble des suites bilatères $(a_i^{n_i})_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{A}^*$ telles que $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.*

Pour tous x_- et $x \in \Lambda^0$ avec $\omega_{\mathcal{A}^*}(x) = a_1^{n_1}, a_2^{n_2} \cdots$ et $\omega_{\mathcal{A}^*}(x_-) = a_0^{-n_0}, a_{-1}^{-n_{-1}} \cdots$, on note $\omega_{\mathcal{A}^*}(x_-, x)$ la suite bilatère $\cdots a_{-1}^{n_{-1}}, a_0^{n_0}, a_1^{n_1}, a_2^{n_2} \cdots$.

Posons $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0 = \{(x_-, x) \in \Lambda^0 \times \Lambda^0 / \omega(x_-, x) \in \Sigma_{\mathcal{A}^*}\}$; pour tout $a^n \in \mathcal{A}^*$ notons $(\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0)_{a^n}$ (resp. $\Lambda^0_{a^n}$) l'ensemble des points $(x_-, x) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0$ (resp. $x \in \Lambda^0$) tels que le premier terme de $\omega_{\mathcal{A}^*}(x)$ soit a^n.

Remarquons que $\omega_{\mathcal{A}^*}(x_-, x) \in \Sigma_{\mathcal{A}^*}$ si et seulement si $a_1 \neq a_0^{\pm 1}$. Le lemme qui suit est essentiel pour montrer que $T_{\mathcal{A}^*}$ est dilatante et construire sur Λ^0 une mesure de probabilité $T_{\mathcal{A}^*}$-invariante.

LEMME II.3. — *L'ensemble $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0$ est relativement compact dans $\Lambda^0 \times \Lambda^0$ privé de la diagonale.*

Démonstration. — Supposons que $\overline{\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0}$ contienne un couple de la forme (x, x) où $x \in \Lambda^0$ et considérons une suite $(y_n, x_n)_{n\geq 1}$ de $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0$ convergeant vers (x, x). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe deux éléments a_1 et a_2 de $\mathcal{A}$, $a_1 \neq a_2^{\pm 1}$, tels que pour tout $n \geq 1$ on ait $x_n \in \Lambda^0_{a_1}$ et $y_n \in \Lambda^0_{a_2}$. Le point x appartient donc à $S_{a_1} \cap S_{a_2} \cap \Lambda$ ce qui est absurde car $\partial\Lambda$ ne contient que les points fixes des transformations paraboliques de $\mathcal{A}$. □

COROLLAIRE II.4. — *Il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\inf\limits_{x\in\Lambda^0} |(T_{\mathcal{A}^*}^{N_1})'(x)| > 1$; en d'autres termes, l'application $T_{\mathcal{A}^*}$ est dilatante sur Λ^0.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et considérons un réel $\beta > 1$ et une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de Λ^0 tels que $|(T_{\mathcal{A}^*}^n)'(x_n)| \leq \beta$ pour tout $n \geq 1$; posons $\omega_{\mathcal{A}^*}(x_n) = (a_{ni}^{p_{ni}})_{i\geq 1}$ et $\gamma_n = a_{n1}^{p_{n1}} \cdots a_{nn}^{p_{nn}}$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que pour tout $n \geq 1$ on a $a_{n1} = a_1$ et $a_{nn} = a_2$.

Si $a_1 \neq a_2^{\pm 1}$ la transformation γ_n est loxodromique. Notons $x_{\gamma_n}^-$ le point répulsif de γ_n et posons $y_n = T_{\mathcal{A}^*}^n(x_n)$; on a $|x_{\gamma_n}^- - x_n| = \sqrt{|\gamma_n'(x_{\gamma_n}^-)||\gamma_n'(y_n)|}|x_{\gamma_n}^- - y_n|$. Puisque $a_1 \neq a_2^{\pm 1}$ le couple $(x_{\gamma_n}^-, y_n)$ appartient à $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0$ si bien que d'après le lemme II.3 il existe $A > 0$

tel que pour tout $n \geq 1$ on ait $2 \geq |x^-_{\gamma_n} - x_n| \geq \dfrac{A}{\beta}\sqrt{|\gamma'_n(x^-_{\gamma_n})|}$. Les axes des transformations γ_n se projettent sur M en des géodésiques fermées dont la longueur est $\operatorname{Log}|\gamma'_n(x^-_{\gamma_n})|$; comme le nombre $\pi_M(a)$ est fini pour tout $a > 0$ on a nécessairement $\lim_{n\to+\infty} |\gamma'_n(x^-_{\gamma_n})| = +\infty$ ce qui contredit l'inégalité précédente.

Si $a_1 = a_2^{\pm 1}$ choisissons $a \in \mathcal{A} - \{a_1^{\pm 1}\}$ et posons $X_{n+1} = ax_n$; on a $|(T^n_{\mathcal{A}^*})'(X_n)| \leq C\beta$ avec $C = \sup_{x\in\Lambda^0} |(a^{-1})'(x)|$. Le raisonnement précédent s'applique en remplaçant x_n par X_n. □

Le décalage sur $\Sigma_{\mathcal{A}^*}$ induit sur $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0$ l'application $\overline{T}_{\mathcal{A}^*}$ définie par $\overline{T}_{\mathcal{A}^*}(x_-, x) = (a_1^{-n_1}x_-, a_1^{-n_1}x)$ où $a_1^{n_1}$ désigne le premier terme de $\omega_{\mathcal{A}^*}(x)$. La famille $((\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0)_{a^n})_{a^n\in\mathcal{A}^*}$ forme une partition de $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0$ et l'action sur $(\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0)_{a^n}$ correspond à la multiplication par a^{-n} de chaque coordonnée. La mesure de Patterson-Sullivan ([16], [19]) $m(dx_-\, dx) = \dfrac{\sigma(dx_-)\sigma(dx)}{|x_- - x|^{2\delta}}$ sur $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0$ étant Γ-invariante, elle est aussi $\overline{T}_{\mathcal{A}^*}$-invariante. Comme l'ensemble $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0$ est relativement compact dans $\Lambda^0 \times \Lambda^0$ privé de la diagonale, la mesure $m(dx_-\, dx)$ est finie. Notons alors q l'application de $\Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0$ dans Λ^0 définie par $q(x_-, x) = x$; la mesure $q(m)$ est finie et $T_{\mathcal{A}^*}$-invariante sur Λ^0. On pose alors $q(m)(\Lambda^0) = 1/C_1$ et

$$h_{\mathcal{A}^*}(x) = C_1 \int_{\{x_-\in\Lambda^0/(x_-,x)\in\Lambda^0\times_{\mathcal{A}^*}\Lambda^0\}} \frac{\sigma(dx_-)}{|x_- - x|^{2\delta}}.$$

COROLLAIRE II.5. — *La mesure $\nu_{\mathcal{A}^*}(dx) = h_{\mathcal{A}^*}(x)\sigma(dx)$ est une mesure de probabilité $T_{\mathcal{A}^*}$-invariante sur Λ^0. De plus*

$$\sup_{a^n\in\mathcal{A}^*} \sup_{\substack{x,y\in\Lambda^0_{a^n}\\ x\neq y}} \frac{|h_{\mathcal{A}^*}(x) - h_{\mathcal{A}^*}(y)|}{|x-y|^{\delta_0}} < +\infty \quad \textit{avec} \quad \delta_0 = \inf(1,\delta).$$

Démonstration. — La première assertion découle des propriétés de m et du choix de la constante C_1. Fixons un élément $a^n \in \mathcal{A}^*$ et deux points distincts x et y de $\Lambda^0_{a^n}$; on a

$$
\begin{aligned}
&|h_{\mathcal{A}^*}(x) - h_{\mathcal{A}^*}(y)| \\
&\leq C_1 \int_{\{x_- \in \Lambda^0 / (x_-, x) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0\}} \left| \frac{1}{|x - x_-|^{2\delta}} - \frac{1}{|y - x_-|^{2\delta}} \right| \sigma(dx_-) \\
&\leq 2^{\delta+1} C_1 \int_{\{x_- \in \Lambda^0 / (x_-, x) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0\}} \frac{\left| |x - x_-|^\delta - |y - x_-|^\delta \right|}{|x - x_-|^{2\delta} |y - x_-|^{2\delta}} \sigma(dx_-) \\
&\leq \frac{2^{\delta+1} C_1}{\epsilon_0^{4\delta}} \int_{\{x_- \in \Lambda^0 / (x_-, x) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0\}} \left| |x - x_-|^\delta - |y - x_-|^\delta \right| \sigma(dx_-)
\end{aligned}
$$

avec $\epsilon_0 = \inf\{|z_- - z| / (z_-, z) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{A}^*} \Lambda^0\} > 0$ d'après le lemme II.3. Si $\delta \leq 1$, on a $||x - x_-|^\delta - |y - x_-|^\delta| \leq |x - y|^\delta$; sinon, il existe $A > 0$ tel que $||x - x_-|^\delta - |y - x_-|^\delta| \leq A|x - y|$. □

III. UN NOUVEAU SYSTÈME DE GÉNÉRATEURS

Dans ce paragraphe, nous supposons que Γ contient des transformations paraboliques primitives n'appartenant pas à $\mathcal{A}$. On rappelle que les transformations paraboliques primitives de Γ sont conjuguées à des éléments de $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}$. Fixons un sous-ensemble $\mathcal{P}_0$ de $\mathcal{P}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(1) si $p \in \mathcal{P}_0$ alors $p^{-1} \in \mathcal{P}_0$,

(2) si p_1 et p_2 appartiennent à $\mathcal{P}_0$ alors p_1 et p_2 ne sont pas conjugués.

En d'autres termes, $\mathcal{P}_0$ est un système symétrique de représentants des classes de conjugaison d'éléments paraboliques primitifs de Γ n'appartenant pas à $\mathcal{A}$. Posons $\mathcal{P}_0 = \{\pi_{-1}, \pi_1, \cdots, \pi_{-L}, \pi_L\}$ avec $\pi_{-i} = \pi_i^{-1}$.

La présence dans Γ de transformations paraboliques non conjuguées aux générateurs entraîne que $T_{\mathcal{A}^*}$ n'est plus dilatante; pour retrouver cette propriété de dilatation, il faut prendre en compte les puissances des éléments de $\mathcal{P}$.

III.a. Les chaînes.

NOTATION. — *Soient γ_1 et γ_2 deux éléments de Γ. On suppose que le dernier terme, noté a, de la suite $\omega_{\mathcal{A}}(\gamma_1)$ coïncide avec le premier terme de la suite $\omega_{\mathcal{A}}(\gamma_2)$. On note $\gamma_1 \vee_{\mathcal{A}} \gamma_2$ l'élément $\gamma_1 a^{-1} \gamma_2$ de Γ.*

DÉFINITION III.1. — *Soient $p_1, p_2, \cdots, p_l$ des éléments de $\mathcal{P}_0$; on pose $\omega_{\mathcal{A}}(p_i) = a_{i1}, \cdots, a_{il_i}$ et on suppose $a_{il_i} = a_{(i+1)1}$ pour tout $1 \le i < l$. La transformation $p_1 \vee_{\mathcal{A}} p_2 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_l$ est appelée chaîne d'éléments de $\mathcal{P}_0$ (ou plus simplement chaîne).*

Puisque $a_{i1} \neq a_{il_i}$, si $p_1 \vee_{\mathcal{A}} p_2 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_l$ est une chaîne alors $p_{i+1} \neq p_i$ pour $1 \le i \le l-1$. De même, comme $a_{il} \neq a_{il}^{-1}$ on a $p_{i+1} \neq p_i^{-1}$. Remarquons enfin que si $\gamma = p_1 \vee_{\mathcal{A}} p_2 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_l$ est une chaîne, il en est de même pour γ^{-1} et l'on a $\gamma^{-1} = p_l^{-1} \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_1^{-1}$.

NOTATION. — *On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des chaînes de Γ.*

PROPRIÉTÉ III.2. — *Soit γ une chaîne. Il existe une unique suite $p_1, \cdots, p_l$ de $\mathcal{P}_0$ telle que $\gamma = p_1 \vee_{\mathcal{A}} p_2 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_l$.*

Démonstration. — Cette propriété découle du fait que Γ est un groupe libre et du lemme suivant

LEMME III.3. — *Soient p_1 et p_2 deux éléments de $\mathcal{P}$. Posons $\omega_{\mathcal{A}}(p_1) = a_{11}, \cdots, a_{1k}$ et $\omega_{\mathcal{A}}(p_2) = a_{21}, \cdots, a_{2l}$. Si $(a_{11}, a_{12}) = (a_{21}, a_{22})$ alors $p_1 = p_2$.*

Démonstration du lemme. — Supposons $a_{11} = a_{21} = a_1$ et $a_{12} = a_{22} = a_2$. Notons respectivement x_1 et x_2 les points fixes de p_1 et p_2. Les points $a_1^{-1}(x_1)$ et $a_1^{-1}(x_2)$ sont fixés respectivement par $a_1^{-1} p_1 a_1$ et $a_1^{-1} p_2 a_1$; ces deux points appartiennent donc à $S_{a_2^{-1}} \cap S_{a_1}$ ce qui entraîne $x_1 = x_2$. Les points fixes des transformations paraboliques de Γ étant de rang 1, on a $p_1 = p_2$. □

III.b. Décomposition canonique des éléments de Γ.

Choisissons un ordre sur $\mathcal{P}_0 = \{\pi_{-1}, \pi_1, \cdots, \pi_{-L}, \pi_L\}$ en posant par exemple

$$\pi_i < \pi_j \quad \text{si et seulement si} \quad |i| < |j| \quad \text{où} \quad i = -j \quad \text{et} \quad i < 0.$$

On a donc $\pi_{-1} < \pi_1 < \pi_{-2} < \pi_2 < \cdots < \pi_{-L} < \pi_L$. Remarquons que si $\pi_i < \pi_j$ avec $|i| \neq |j|$, alors $\pi_{-i} < \pi_{-j}$.

DÉFINITION III.4. — *Soit $\gamma = p_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_l$ avec $l \ge 2$. On dit que γ est une chaîne élémentaire si et seulement si*

i) $p_1 < p_2 < \cdots < p_l$ *(i.e. γ est croissante),*

ii) $p_1 > p_2 > \cdots > p_l$ *(i.e. γ est décroissante),*

iii) *il existe* $1 < s < l$ *tel que* $p_1 > p_2 > \cdots > p_s$ *et* $p_s < p_{s+1} < \cdots < p_l$ *(i.e. γ est brisée).*

NOTATION. — *On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des chaînes élémentaires de Γ.*

De par le choix de l'ordre sur $\mathcal{P}_0$, on a :

PROPRIÉTÉ III.5. — *Si γ est une chaîne croissante (resp. décroissante), alors γ^{-1} est une chaîne décroissante (resp. croissante). Si γ est une chaîne brisée, il en est de même pour γ^{-1}.*

DÉFINITION III.6. — *Soient $\gamma \in \Gamma$ et $\omega_{\mathcal{A}^*}(\gamma) = (a_i^{n_i})_{1\leq i\leq l}$. Supposons qu'il existe $1 \leq k < r \leq l$ tels que $n_k = n_{k+1} = \cdots = n_r = 1$ et $a_k \cdots a_r \in \mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_0$). La chaîne $a_k \cdots a_r$ est une chaîne maximale de γ (resp. chaîne élémentaire maximale de γ) si pour tous entiers k' et r' tels que $(k', r') \neq (k, r)$ et $1 \leq k' \leq k < r \leq r' \leq l$, la transformation $a_{k'} \cdots a_{r'}$ n'appartient pas à $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_0$).*

Nous allons associer à chaque transformation $\gamma \in \Gamma$ deux suites, l'une $D(\gamma) = (D_i(\gamma))_{1\leq i\leq s}$ à valeurs dans $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{C}_0$ et l'autre $\epsilon(\gamma) = (\epsilon_i(\gamma))_{1\leq i\leq s-1}$ à valeurs dans l'ensemble de symboles $\{\vee, \nabla\}$ (la suite $\epsilon(\gamma)$ prendra toute sa signification dans la proposition III.8).

Posons $\omega_{\mathcal{A}^*}(\gamma) = (a_i^{n_i})_{1\leq i\leq l}$.

Construction de $D_1(\gamma)$.

On considère le plus grand entier $1 \leq s \leq l$ tel que $a_1^{n_1} \cdots a_s^{n_s} \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{C}_0$ et l'on pose $D_1(\gamma) = a_1^{n_1} \cdots a_s^{n_s}$.

Construction de $D_2(\gamma)$ et $\epsilon_1(\gamma)$.

Si $D_1(\gamma) = \gamma$, autrement dit si $\gamma \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{C}_0$, alors $D(\gamma) = (D_1(\gamma))$ et $\epsilon(\gamma)$ est la suite vide. Sinon, on pose $\gamma_1 = D_1(\gamma)$ et on distingue trois cas.

• $\gamma_1 \notin \mathcal{C}_0$: on pose alors $D_2(\gamma) = D_1(\gamma_1^{-1}\gamma)$ et $\epsilon_1(\gamma) = \nabla$.

• $\gamma_1 \in \mathcal{C}_0$ et *γ_1 est une chaîne maximale de γ* : on pose de même $D_2(\gamma) = D_1(\gamma_1^{-1}\gamma)$ et $\epsilon_1(\gamma) = \nabla$.

• $\gamma_1 \in \mathcal{C}_0$ et *γ_1 n'est pas une chaîne maximale de γ* : dans ce cas, γ_1 est soit une chaîne croissante, soit une chaîne brisée : $\gamma_1 = p_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_k$. On pose alors $D_2(\gamma) = D_1(p_k\gamma_1^{-1}\gamma)$ et $\epsilon_1(\gamma) = \vee$. Remarquons que $D_2(\gamma)$ est alors une chaîne élémentaire décroissante ou brisée : $D_2(\gamma) = q_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} q_r$ avec $q_1 = p_k$.

En réitérant ce procédé, on construit deux suites $D(\gamma)$ et $\epsilon(\gamma)$ associées à γ; ces deux suites constituent la *décomposition canonique de* γ.

Exemples. — 1. Si $\omega_{\mathcal{A}^*}(\gamma) = (a_i^{n_i})_{1\leq i\leq l}$ avec $n_i \geq 2$ pour tout $1 \leq i \leq l$ alors $D(\gamma) = \omega_{\mathcal{A}^*}(\gamma)$ et $\epsilon_j = \nabla$ pour $1 \leq j \leq l-1$.

2. Si $\gamma = p_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_k$ est une chaîne, on considère la suite d'entiers $k_1 = 1 < k_2 < \cdots < k_l = k$ telle que pour tout $1 \leq i \leq l-1$ la chaîne $p_{k_i} \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_{k_{i+1}}$ soit élémentaire et maximale dans γ. On obtient alors $D(\gamma) = (D_i(\gamma))_{1\leq i\leq l}$ avec $D_i(\gamma) = p_{k_i} \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_{k_{i+1}}$ et $\epsilon(\gamma) = (\epsilon_i(\gamma))_{1\leq i\leq l-1}$ avec $\epsilon_i(\gamma) = \vee$. Remarquons que $D(\gamma^{-1}) = D_l^{-1}(\gamma), \cdots, D_1^{-1}(\gamma)$ et $\epsilon(\gamma^{-1}) = \epsilon_{l-1}(\gamma), \epsilon_{l-2}(\gamma), \cdots, \epsilon_1(\gamma)$.

PROPOSITION III.7. — *Soit* $\gamma \in \Gamma$; *posons* $D(\gamma) = (\gamma_i)_{1\leq i\leq l}$ *et* $\epsilon(\gamma) = (\epsilon_i)_{1\leq i\leq l-1}$. *On a* $D(\gamma^{-1}) = \gamma_l^{-1}, \gamma_{l-1}^{-1} \cdots \gamma_1^{-1}$ *et* $\epsilon(\gamma^{-1}) = \epsilon_{l-1}, \epsilon_{l-2}, \cdots, \epsilon_1$.

Démonstration. — Si $\gamma \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{C}$, la proposition est facile à vérifier. Sinon, notons $\omega_{\mathcal{A}^*}(\gamma) = (a_i^{n_i})_{1\leq i\leq l}$ et considérons la suite $g_1, \cdots, g_p$ des chaînes maximales de γ ou des éléments de $\mathcal{P}_0$ (n'appartenant pas à une chaîne de γ) apparaissant dans la décomposition de γ et classés dans leur ordre d'apparition. Pour tout $1 \leq j \leq p$, on a $g_j = a_{k_j}^{n_{k_j}} \cdots a_{s_j}^{n_{s_j}}$ avec $1 \leq k_1 \leq s_1 < k_2 \leq s_2 < \cdots < k_p \leq s_p \leq l$. Notons $D(g_j) = (D_i(g_j))_{1\leq i\leq l_j}$ et $\epsilon(g_j) = (\epsilon_i(g_j))_{1\leq i\leq l_j-1}$ la décomposition canonique de chaque g_j. Les suites $D(\gamma)$ et $\epsilon(\gamma)$ sont construites à partir de la décomposition canonique $D(g_j), \epsilon(g_j)$ de chaque $g_j, 1 \leq j \leq p$ de la façon suivante :

$$D(\gamma) = a_1^{n_1}, \cdots, a_{k_1-1}^{n_{k_1-1}}, D_1(g_1), D_2(g_1), \cdots, D_{l_1}(g_1), a_{s_1+1}^{n_{s_1+1}}, \cdots, \\ a_{k_2-1}^{n_{k_2-1}}, D_1(g_2) \cdots$$

et

$$\epsilon_1(\gamma) = \cdots = \epsilon_{k_1-1}(\gamma) = \nabla, \epsilon_{k_1}(\gamma) = \epsilon_1(g_1), \epsilon_{k_1+1}(\gamma) \\ = \epsilon_2(g_1), \cdots, \epsilon_{k_1+l_1-2}(\gamma) = \epsilon_{l_1-1}(g_1)$$

$$\epsilon_{k_1+l_1-1}(\gamma) = \nabla \cdots.$$

Si on considère maintenant γ^{-1}, la suite des chaînes maximales de γ^{-1} ou d'éléments de $\mathcal{P}_0$ (n'appartenant pas à une chaîne de γ^{-1}) apparaissant dans la décomposition de γ^{-1}, et classés dans leur ordre d'apparition est

$g_p^{-1}, \cdots, g_1^{-1}$. La proposition III.7 résulte alors du fait que pour tout $1 \leq j \leq p$, on a $D(g_j^{-1}) = D_{l_j}^{-1}(g_j), \cdots, D_1^{-1}(g_j)$ et $\epsilon(g_j^{-1}) = \epsilon_{l_j-1}(g_j), \cdots, \epsilon_1(g_j)$.□

On se propose à présent de retrouver γ à partir de sa décomposition canonique.

NOTATION. — *Soient $\gamma_1 = p_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_r$ et $\gamma_2 = q_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} q_s$ deux chaînes telles que $p_r = q_1$. On note $\gamma_1 \vee_{\mathcal{P}} \gamma_2$ la chaîne $p_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_r \vee_{\mathcal{A}} q_2 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} q_s$.*

La proposition suivante découle directement de la construction des suites $D(\gamma)$ et $\epsilon(\gamma)$.

PROPOSITION III.8. — *Soit $\gamma \in \Gamma$; on pose $D(\gamma) = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq l}$ et $\epsilon(\gamma) = (\epsilon_i)_{1 \leq i \leq l-1}$. On a $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_r$, avec :*

$\gamma_i * \gamma_{i+1} = \gamma_i \gamma_{i+1}$ *si* $\epsilon_i = \nabla$,

$\gamma_i * \gamma_{i+1} = \gamma_i \vee_{\mathcal{P}} \gamma_{i+1}$ *si* $\epsilon_i = \vee$ *(dans ce cas γ_i est une chaîne élémentaire croissante ou brisée et γ_{i+1} est une chaîne élémentaire décroissante ou brisée).*

III.c. $\mathcal{B}$-développement des éléments de Γ.

NOTATION. — *On pose $\mathcal{B} = \mathcal{A}^* \cup \mathcal{P}_0$.*

Nous construisons ici un algorithme, basé sur la décomposition canonique des éléments de Γ, associant à chaque élément $\gamma \in \Gamma$ une suite finie de $\mathcal{B}$, notée $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = b_1, b_2, \cdots, b_l$ et appelée *$\mathcal{B}$-développement* de γ, vérifiant les propriétés suivantes :

1) $\gamma = b_1 \cdots b_l$ 2) $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma^{-1}) = b_l^{-1}, \cdots, b_1^{-1}$ 3) $\omega_{\mathcal{B}}(b_1^{-1}\gamma) = b_2, \cdots, b_l$.

Par convention $\omega_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ est la suite vide.

Commençons par construire le $\mathcal{B}$-développement d'un élément $\gamma \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{C}_0$.

Cas où $\gamma \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{P}_0$: on pose $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = \gamma$.

Cas où $\gamma \in \mathcal{C}_0$: il existe alors $p_1, \cdots, p_k \in \mathcal{P}_0$ et $k \geq 2$ tels que $\gamma = p_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_k$; pour tout $1 \leq i \leq k$, notons $\omega_{\mathcal{A}*}(p_i) = (a_{ij})_{1 \leq j \leq l_i}$.

Si γ est une chaîne décroissante, on pose

$$\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = p_1, a_{22}, \cdots, a_{2(l_2-1)}, p_3, a_{42}, \cdots, a_{4(l_4-1)}, p_5 \cdots .$$

Si γ est une chaîne croissante, γ^{-1} est une chaîne décroissante; on note $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma^{-1}) = b_1, \cdots, b_l$ et on pose $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = b_l^{-1}, \cdots, b_1^{-1}$.

Si γ est une chaîne brisée, il existe $1 < s < k$ tel que $p_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_s$ soit décroissante et $p_s \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_k$ soit croissante. Notons $C_1 = p_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_{s-1}, C_2 = p_{s+1} \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_k$ et $g = a_{s2} \cdots a_{s(l_s-1)}$; on a $\gamma = C_1 g C_2$. Remarquons que si $s = 2$ (resp. $s = k-1$) la transformation C_1 (resp. C_2) est un élément de $\mathcal{P}_0$ et sinon C_1 (resp. C_2) est une chaîne décroissante (resp. croissante). Les $\mathcal{B}$-développements de C_1 et de C_2 ont donc déjà été définis : notons-les respectivement $(b_{1i})_{1 \leq i \leq r_1}$ et $(b_{2i})_{1 \leq i \leq r_2}$. Deux cas se présentent selon la parité de s et de k.

1) Si s et k sont impairs, les décompositions canoniques des chaînes C_1 et C_2 font intervenir un nombre pair d'éléments de $\mathcal{P}_0$. On a donc $b_{1r_1} = a_{(s-1)l_{s-1}} = a_{s1}$ et $b_{21} = a_{sl_s} = a_{(s+1)1}$; on pose alors

$$\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = b_{11}, \cdots, b_{1(r_1-1)}, p_s, b_{22}, \cdots, b_{2r_2}.$$

2) Sinon, on a $b_{1r_1} = p_{s-1}$ ou $b_{21} = p_{s+1}$ et l'on pose

$$\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = b_{11}, \cdots, b_{1r_1}, a_{s2}, \cdots, a_{s(l_s-1)}, b_{21}, \cdots, b_{2r_2}.$$

Remarque. — Soit $\gamma \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{C}_0$; notons $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = b_1, \cdots, b_l$. Par construction de $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma)$, on a $\gamma = b_1 \cdots b_l$ et $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma^{-1}) = b_l^{-1}, \cdots, b_1^{-1}$.

Avant d'expliciter le $\mathcal{B}$-développement d'un élément quelconque γ de Γ, introduisons la

NOTATIONS. — *Soient $\omega_1 = (b_{1i})_{1 \leq i \leq l_1}$ et $\omega_2 = (b_{2i})_{1 \leq i \leq l_2}$ deux suites d'éléments de $\mathcal{B}$.*

On note $\omega_1 \nabla \omega_2$ la suite $b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1l_1}, b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2l_2}$.

Si $b_{1l_1} = b_{21}$, on note $\omega_1 \vee \omega_2$ la suite $b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1l_1}, b_{22}, \cdots, b_{2l_2}$.

DÉFINITION III.9. — *Soient $\gamma \in \Gamma$ et $D(\gamma) = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq r}, \epsilon(\gamma) = (\epsilon_i)_{1 \leq i \leq r-1}$ sa décomposition canonique. Pour $1 \leq i \leq r$ la transformation γ_i appartient à $\mathcal{A}^* \cup \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{C}_0$ et $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma_i)$ a déjà été définie; on pose alors*

$$\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = \omega_{\mathcal{B}}(\gamma_1) \epsilon_1 \omega_{\mathcal{B}}(\gamma_2) \epsilon_2 \cdots \epsilon_{r-1} \omega_{\mathcal{B}}(\gamma_r).$$

Nous avons le

LEMME III.10. — *Soient* $\gamma \in \Gamma$ *et* $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = b_1, \cdots, b_l$. *On a*

i) $\gamma = b_1 \cdots b_l$

ii) $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma^{-1}) = b_l^{-1}, \cdots, b_1^{-1}$

iii) $\omega_{\mathcal{B}}(b_1^{-1}\gamma) = b_2, \cdots, b_l$

iv) $\omega_{\mathcal{A}^*}(\gamma) = \omega_{\mathcal{A}^*}(b_1)\nabla \cdots \nabla\omega_{\mathcal{A}^*}(b_l)$.

Démonstration. — Les propriétés i), ii), et iv) découlent de la décomposition canonique de γ. Démontrons maintenant la propriété iii). Si $\gamma \in \mathcal{C}_0$, cette propriété est une conséquence directe de la construction de $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma)$. Sinon, on considère la décomposition canonique $D(\gamma) = (\gamma_i)_{1\leq i\leq r}, \epsilon(\gamma) = (\epsilon_i)_{1\leq i\leq r-1}$ de γ; pour alléger les notations, cette décomposition canonique est notée $\gamma_1\epsilon_1\gamma_2 \cdots \epsilon_{r-1}\gamma_r$.

– Si $\gamma_1 \in \mathcal{A}^* \cup \mathcal{P}_0$, alors $b_1 = \gamma_1$ et $\epsilon_1 = \nabla$; on a $\omega_{\mathcal{B}}(b_1^{-1}\gamma) = \omega_{\mathcal{B}}(b_1^{-1}\gamma_1)\nabla\omega_{\mathcal{B}}(\gamma_1^{-1}\gamma) = b_2, \cdots, b_k$.

– Si $\gamma_1 \in \mathcal{C}_0$, alors $\gamma_1 = p_1 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_k$ est une chaîne élémentaire, on pose $\omega_{\mathcal{A}}(p_i) = a_{i1}, \cdots a_{il_i}$. Deux cas se présentent :

1) si $b_1 = p_1$, alors γ_1 est soit une chaîne décroissante, soit une chaîne brisée, soit encore une chaîne croissante avec k impair; on a alors $b_1^{-1}\gamma_1 = a_{22} \cdots a_{2(l_2-1)}p_3 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_k$ et la décomposition canonique de $b_1^{-1}\gamma$ est $a_{22} \cdots a_{2(l_2-1)}\nabla(p_3 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_k)\epsilon_1\gamma_2 \cdots \gamma_r$. On obtient alors $\omega_{\mathcal{B}}(b_1^{-1}\gamma) = b_2, \cdots, b_l$.

2) si $b_1 = a_{11} \in \mathcal{A}$ alors la décomposition canonique de $b_1^{-1}\gamma$ est

$$a_{12}\nabla \cdots \nabla a_{1(l_1-1)}\nabla(p_2 \vee_{\mathcal{A}} \cdots \vee_{\mathcal{A}} p_k)\epsilon_1\gamma_2 \cdots \gamma_r$$

et on conclut de même, ce qui achève la démonstration du lemme. □

La propriété iv) montre que si $\omega_{\mathcal{B}}(g) = \omega_{\mathcal{B}}(h)$ alors $g = h$; par conséquent, la suite $\omega_{\mathcal{B}}(g)$ détermine de façon unique la transformation g. En appliquant les propriétés ii) et iii), on obtient le

COROLLAIRE III.11. — *Soit* $\gamma \in \Gamma$. *Si* $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = b_1, \cdots, b_k$ *avec* $k \geq 2$, *alors pour tout* $1 < s \leq l < k$ *on a* $\omega_{\mathcal{B}}(b_s \cdots b_l) = b_s, \cdots, b_l$.

NOTATIONS. — *Soit* $\gamma \in \Gamma$. *On note* $|\omega_{\mathcal{A}}(\gamma)|$ *(resp.* $|\omega_{\mathcal{A}^*}(\gamma)|$ *et* $|\omega_{\mathcal{B}}(\gamma)|$*) le nombre de termes de la suite* $\omega_{\mathcal{A}}(\gamma)$ *(resp.* $\omega_{\mathcal{A}^*}(\gamma)$ *et* $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma)$*). On pose* $l_0 = \sup_{\gamma\in\mathcal{P}_0\cup\mathcal{C}_0} |\omega_{\mathcal{A}}(\gamma)|$.

PROPRIÉTÉ III.12. — *Soient g et h deux éléments de Γ et k un entier ≥ 1.*

i) *Si les suites $\omega_{\mathcal{A}^*}(g)$ et $\omega_{\mathcal{A}^*}(h)$ coïncident jusqu'au rang kl_0, alors les suites $\omega_{\mathcal{B}}(g)$ et $\omega_{\mathcal{B}}(h)$ coïncident au moins jusqu'au rang k.*

ii) *Si les suites $\omega_{\mathcal{B}}(g)$ et $\omega_{\mathcal{B}}(h)$ coïncident jusqu'au rang k, alors les suites $\omega_{\mathcal{A}^*}(g)$ et $\omega_{\mathcal{A}^*}(h)$ coïncident au moins jusqu'au rang k.*

Démonstration. — i) Si $\omega_{\mathcal{A}^*}(g)$ et $\omega_{\mathcal{A}^*}(h)$ coïncident jusqu'au rang kl_0, les suites $D(g)$ et $D(h)$ (resp. $\epsilon(g)$ et $\epsilon(h)$) coïncident au moins jusqu'au rang k (resp. $k-1$). En revenant à la définition de $\omega_{\mathcal{B}}(g)$ et $\omega_{\mathcal{B}}(h)$ on vérifie alors que ces deux suites coïncident au moins jusqu'au rang k.

L'assertion (ii) découle directement du lemme III.10 (iv). □

DÉFINITION III.13. — *Une suite $b_1, \cdots, b_k$ d'éléments de $\mathcal{B}$ est dite $\underline{\mathcal{B}\text{-admissible}}$ s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma) = b_1, \cdots, b_k$.*

NOTATION. — *L'ensemble des suites finies $\mathcal{B}$-admissibles est noté $\Omega_{\mathcal{B}}$.*

Soit $\Omega_{\mathcal{A}^*}$ l'ensemble des suites finies $(a_i^{n_i})_{1\leq i\leq r}$, $r \geq 1$ de $\mathcal{A}^*$ telles que $a_i \neq a_{i+1}^{\pm 1}$. L'application f de $\Omega_{\mathcal{A}^*}$ dans $\Omega_{\mathcal{B}}$ définie par $f((a_i^{n_i})_{1\leq i\leq k}) = \omega_{\mathcal{B}}(a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k})$ est une bijection de $\Omega_{\mathcal{A}^*}$ sur $\Omega_{\mathcal{B}}$ et son application réciproque est définie par $f^{-1}((b_i)_{1\leq i\leq k}) = \omega_{\mathcal{A}^*}(b_1)\nabla \cdots \nabla\omega_{\mathcal{A}^*}(b_k)$.

IV. CODAGE DES GÉODÉSIQUES FERMÉES DE M LORSQUE $\mathcal{P} \neq \emptyset$

IV.a. $\mathcal{B}^*$-développement d'un point de Λ^0.

NOTATION. — *Notons $\Sigma_{\mathcal{B}}^+$ l'ensemble des suites $\omega = (b_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ dont tous les blocs finis $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ appartiennent à $\Omega_{\mathcal{B}}$; nous dirons qu'une telle suite est $\mathcal{B}$-admissible.*

Si $(b_i)_{1\leq i\leq l} \in \Omega_{\mathcal{B}}$ la suite décalée $(b_i)_{2\leq i\leq l}$ appartient aussi à $\Omega_{\mathcal{B}}$ d'après le lemme III.10 (iii); par conséquent, si $(b_i)_{i\geq 1}$ appartient à $\Sigma_{\mathcal{B}}^+$ il en est de même pour la suite $(b_i)_{i\geq 2}$.

Proposition IV.1. — *La bijection* $f : \Omega_{\mathcal{A}^*} \to \Omega_{\mathcal{B}}$ *définie par* $f((a_i^{n_i})_{1\leq i\leq k}) = \omega_{\mathcal{B}}(a_1^{n_1}\cdots a_k^{n_k})$ *s'étend de façon unique en une bijection* $\overline{f}$ *de* $\Sigma^+_{\mathcal{A}^*}$ *sur* $\Sigma^+_{\mathcal{B}}$ *définie de la façon suivante :*

$$\forall\omega = (a_i^{n_i})_{i\geq 1} \in \Sigma^+_{\mathcal{A}^*} \quad \overline{f}(\omega) = (b_j)_{j\geq 1}$$

où b_j *est le* j*-ième terme de la suite* $\omega_{\mathcal{B}}(a_1^{n_1}\cdots a_{jl_0}^{n_{jl_0}})$.

Démonstration. — Montrons que $\overline{f}$ est surjective sur $\Sigma^+_{\mathcal{B}}$. Fixons $(b_j)_{j\geq 1} \in \Sigma^+_{\mathcal{B}}$ et considérons la suite $\omega = (a_i^{n_i})_{i\geq 1} = \omega_{\mathcal{A}^*}(b_1)\nabla\omega_{\mathcal{A}^*}(b_2)\nabla\cdots$. Pour tout entier $i \geq 1$ on a $\omega_{\mathcal{A}^*}(b_1\cdots b_{il_0}) = \omega_{\mathcal{A}^*}(b_1)\nabla\cdots\nabla\omega_{\mathcal{A}^*}(b_{il_0})$ et $|\omega_{\mathcal{A}^*}(b_1\cdots b_{il_0})| \geq il_0$; les suites $a_1^{n_1},\cdots,a_{il_0}^{n_{il_0}}$ et $\omega_{\mathcal{A}^*}(b_1\cdots b_{il_0})$ coïncident ainsi jusqu'au rang il_0, ce qui entraîne d'après la propriété III.12 que $\omega_{\mathcal{B}}(a_1^{n_1}\cdots a_{il_0}^{n_{il_0}})$ et $b_1,\cdots,b_{il_0}$ coïncident au moins jusqu'au rang i. Par conséquent, le i-ième terme de $\overline{f}(\omega)$ est b_i; l'entier i étant arbitraire, on a finalement $\overline{f}(\omega) = (b_i)_{i\geq 1}$.

Montrons maintenant que $\overline{f}$ est injective; si $\omega_1 = (a_i^{n_i})_{i\geq 1}$ et $\omega_2 = (c_i^{m_i})_{i\geq 1}$ sont des éléments de $\Sigma^+_{\mathcal{A}^*}$ tels que $\overline{f}(\omega_1) = \overline{f}(\omega_2)$, les suites $\omega_{\mathcal{B}}(a_1^{n_1}\cdots a_{il_0}^{n_{il_0}})$ et $\omega_{\mathcal{B}}(c_1^{m_1}\cdots c_{il_0}^{m_{il_0}})$ coïncident au moins jusqu'au rang i; il en est de même pour les suites $a_1^{n_1},\cdots,a_{il_0}^{n_{il_0}}$ et $c_1^{m_1},\cdots,c_{il_0}^{m_{il_0}}$ d'où $\omega_1 = \omega_2$. □

Corollaire IV.2. — *L'application* $\omega_{\mathcal{B}}$ *de* Λ^0 *dans* $\Sigma^+_{\mathcal{B}}$ *qui à* $x \in \Lambda_0$ *associe* $\omega_{\mathcal{B}}(x) = \overline{f}(\omega_{\mathcal{A}^*}(x))$ *est bijective.*

Notations. — *Soit* $\mathcal{B}^*$ *l'ensemble* $\{\beta^n/\beta \in \mathcal{B}$ *et* $n \geq 1\}$. *On note* $\Omega_{\mathcal{B}^*}$ *(resp.* $\Sigma^+_{\mathcal{B}^*}$*) l'ensemble des suites finies* $(b_i^{n_i})_{1\leq i\leq l}$ *de* $\mathcal{B}^*$ *(resp. des suites infinies* $(b_i^{n_i})_{i\geq 1}$*) telles que la suite*

$$\overbrace{b_1,\cdots,b_1}^{n_1\ fois},\overbrace{b_2,\cdots,b_2}^{n_2\ fois},\overbrace{b_3,\cdots,b_3}^{n_3\ fois}\cdots$$

appartienne à $\Omega_{\mathcal{B}}$ *(resp. à* $\Sigma^+_{\mathcal{B}}$*).*

Soit $x \in \Lambda^0$*; on note* $\omega_{\mathcal{B}^*}(x)$ *la suite* $(\beta_{i_k}^{n_{i_k}})_{k\geq 1}$ *de* $\Sigma^+_{\mathcal{B}^*}$ *construite à partir de* $\omega_{\mathcal{B}}(x) = (b_i)_{i\geq 1}$ *de la façon suivante :*

– $\beta_{i_1} = b_1$ *et* $n_1 = \max\{n \geq 1/b_1 = \cdots = b_n\}$

– $\beta_{i_k} = b_{n_{k-1}+1}$ *et* $n_k = \max\{n \geq 1/b_{n_{k-1}+1} = \cdots = b_{n_{k-1}+n}\}$.

La suite $\omega_{\mathcal{B}^*}(x)$ *est appelée* $\underline{\mathcal{B}^* - \textit{développement de } x}$.

Soit $\gamma \in \Gamma$*; on note* $\omega_{\mathcal{B}^*}(\gamma)$ *la suite de* $\Omega_{\mathcal{B}^*}$ *construite à partir de* $\omega_{\mathcal{B}}(\gamma)$ *par le procédé ci-dessus.*

Fixons $x \in \Lambda^0$ et posons $\omega_{\mathcal{B}^*}(x) = (b_k^{n_k})_{k\geq 1}$; on a $x = \lim_{k\to+\infty} g_k(0)$ avec $g_k = b_1^{n_1}\cdots b_k^{n_k}$. Ainsi $b_1^{-n_1}x = \lim_{k\to+\infty} b_1^{-n_1}g_k(0)$ avec $\omega_{\mathcal{B}^*}(b_1^{-n_1}g_k) = b_2^{n_2}\cdots b_k^{n_k}$; par conséquent $\omega_{\mathcal{B}^*}(b_1^{-n_1}x) = b_2^{n_2}b_3^{n_3}\cdots$. Notons $T_{\mathcal{B}^*}$ la transformation induite sur Λ^0 par le décalage sur $\Sigma^+_{\mathcal{B}^*}$ et définie pour tout $x \in \Lambda^0$ par $T_{\mathcal{B}^*}(x) = b_1^{-n_1}(x)$ où $b_1^{n_1}$ est le premier terme de la suite $\omega_{\mathcal{B}^*}(x)$.

IV.b. Points $T_{\mathcal{B}^*}$-périodiques et géodésiques fermées.

Soit $x \in \Lambda^0$ un point $T_{\mathcal{B}^*}$-périodique et $p_{\mathcal{B}^*}(x)$ la plus petite puissance non nulle de $T_{\mathcal{B}^*}$ fixant x.

LEMME IV.3. — *Soit γ une transformation primitive loxodromique de Γ non conjuguée à un élément de $\mathcal{A}$. Il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que*

i) *γ_0 soit conjugué à γ,*

ii) *$\omega_{\mathcal{B}^*}(x_{\gamma_0}) = (b_i^{n_i})_{i\geq 1}$ soit périodique et $\gamma_0 = b_1^{n_1}\cdots b_p^{n_p}$ avec $p = p_{\mathcal{B}^*}(x_{\gamma_0})$.*

De plus, si γ_1 satisfait également les conditions i) *et* ii), *alors il existe $1 \leq k \leq p$ tel que $\gamma_1 = b_k^{n_k}\cdots b_p^{n_p}b_1^{n_1}\cdots b_{k-1}^{n_{k-1}}$.*

Démonstration. — Notons x_γ le point attractif de γ et posons $\omega_{\mathcal{A}^*}(x_\gamma) = (a_i^{n_i})_{i\geq 1}$. Quitte à conjuguer γ on peut supposer que le premier terme de la suite $\omega_{\mathcal{A}}(\gamma)$ est différent du dernier terme de $\omega_{\mathcal{A}}(\gamma)$ et de son inverse; ainsi, la suite $\omega_{\mathcal{A}^*}(x_\gamma)$ est périodique. Notons p la période de $\omega_{\mathcal{A}^*}(x_\gamma)$; on a $\gamma = a_1^{n_1}\cdots a_p^{n_p}$. Considérons l'ensemble $\mathcal{P}_{x_\gamma} = \{g \in \mathcal{P}_0 \ /$ il existe $1 \leq s \leq p$ et $t > s$ tels que $n_s = n_{s+1} = \cdots = n_t$ et $\omega_{\mathcal{A}^*}(g) = a_s, \cdots, a_t\}$. Supposons $\mathcal{P}_{x_\gamma} = \emptyset$ (c'est le cas par exemple si $n_i \geq 2$ pour tout $1 \leq i \leq p$); on a alors $\omega_{\mathcal{A}^*}(x_\gamma) = \omega_{\mathcal{B}^*}(x_\gamma)$ et par conséquent γ satisfait les conditions i) et ii). Sinon, fixons $g \in \mathcal{P}_{x_\gamma}$ et notons $l = |\omega_{\mathcal{A}}(g)|$. Comme γ n'est pas conjugué à un élément de $\mathcal{P}_0$ on a $l \neq p$. En utilisant le lemme III.3, on vérifie que pour tout $s \leq i < j \leq t-1$ on a $(a_i, a_{i+1}) \neq (a_j, a_{j+1})$ si bien que $l \leq p-1$; il s'ensuit que si $a_s\cdots a_t \in \mathcal{P}_0$ alors $0 < t-s < p-1$. Soit $p_0 = a_{s_0}\cdots a_{t_0}$ le plus grand élément (au sens de l'ordre mis sur $\mathcal{P}_0$) de $\mathcal{P}_{x_\gamma}$: comme $t_0 < s_0 - 1 + p_0$ on peut supposer $t_0 = p$ quitte à conjuguer γ. Posons $\omega_{\mathcal{B}^*}(\gamma) = (b_i^{n_i})_{1\leq i\leq r}$; de par le choix de p_0 on a $b_r^{n_r} = p_0^{n_r}$ et $\omega_{\mathcal{B}^*}(\gamma^n) = \omega_{\mathcal{B}^*}(\gamma)\nabla\cdots\nabla\omega_{\mathcal{B}^*}(\gamma)$ pour tout $n > 0$. On en déduit que $\omega_{\mathcal{B}^*}(x)$ est périodique de période r et que les r premiers termes de $\omega_{\mathcal{B}^*}(x)$ sont $b_1^{n_1}\cdots b_r^{n_r}$.

Supposons à présent que γ_0 et γ_1 satisfassent les conditions i) et ii). Notons $\omega_{\mathcal{A}^*}(\gamma_0) = (a_i^{n_i})_{1\leq i\leq q}$; il existe $1 \leq k \leq q$ tel que $\omega_{\mathcal{A}^*}(\gamma_1) = \overline{a_k^{n_k}, \cdots, a_q^{n_q}, a_1^{n_1}, \cdots, a_{k-1}^{n_{k-1}}}$. Notons $\omega_{\mathcal{B}^*}(\gamma_0) = b_1^{n_1}, \cdots, b_p^{n_p}$; par hypothèse $\omega_{\mathcal{B}^*}(x_{\gamma_0}) = \overline{b_1^{n_1}, \cdots, b_p^{n_p}}$. Si $\mathcal{P}_{x_{\gamma_0}} = \emptyset$ alors $\omega_{\mathcal{A}^*}(x_{\gamma_0}) = \omega_{\mathcal{B}^*}(x_{\gamma_0})$ et donc $\omega_{\mathcal{B}^*}(\gamma_1) = b_k^{n_k}, \cdots, b_p^{n_p}, b_1^{n_1}, \cdots, b_{k-1}^{n_{k-1}}$. Sinon, considérons le plus grand élément p_0 de $\mathcal{P}_{x_{\gamma_0}}$; on peut supposer $b_p^{n_p} = p_0^{n_p}$. De par le choix de p_0, le terme $p_0^{n_p}$ apparaît nécessairement dans la suite $\omega_{\mathcal{B}^*}(x_{\gamma_1})$. Notons $\omega_{\mathcal{A}^*}(p_0^{n_p}) = a_s, \cdots, a_q$; puisque $\omega_{\mathcal{B}^*}(x_{\gamma_1})$ est périodique, on a $\gamma_1 = a_k^{n_k} \cdots a_q^{n_q} a_1^{n_1} \cdots a_{k-1}^{n_{k-1}}$ avec $k \leq s-1$ et donc $\omega_{\mathcal{B}^*}(x_{\gamma_1}) = \omega_{\mathcal{B}^*}(a_k^{n_k} \cdots a_{s-1}^{n_{s-1}}) \nabla p_0^{n_p} \nabla \overline{b_1^{n_1} \cdots b_p^{n_p}}$. Comme $\omega_{\mathcal{B}^*}(x_{\gamma_1})$ est périodique, on obtient $\omega_{\mathcal{B}^*}(a_k^{n_k} \cdots a_{s-1}^{n_{s-1}}) = b_t^{n_t} \cdots b_{p-1}^{n_{p-1}}$ avec $1 \leq t \leq p-1$ et donc $\gamma_1 = b_t^{n_t} \cdots b_p^{n_p} b_1^{n_1} \cdots b_{t-1}^{n_{t-1}}$. □

Notons $\mathrm{Per}_{\mathcal{B}^*}(\Lambda^0)$ l'ensemble des points $T_{\mathcal{B}^*}$-périodiques de Λ^0 et rappelons que $\mathcal{G}_M$ est l'ensemble des géodésiques fermées orientées primitives de M privé des projections sur M des axes des transformations de $\mathcal{A}$. On déduit du lemme précédent le

COROLLAIRE IV.4. — *Soit $\xi_{\mathcal{B}^*}$ l'application de* $\mathrm{Per}_{\mathcal{B}^*}(\Lambda^0)$ *dans $\mathcal{G}_M$ qui à x associe la géodésique $\xi_{b_1^{n_1}\cdots b_p^{n_p}}$ où $p = p_{\mathcal{B}^*}(x)$ et $\omega_{\mathcal{B}^*}(x) = \overline{b_1^{n_1} \cdots b_p^{n_p}}$. Cette application est surjective; de plus, si $\xi_{\mathcal{B}^*}(x_1) = \xi_{\mathcal{B}^*}(x_2)$, alors $p_{\mathcal{B}^*}(x_1) = p_{\mathcal{B}^*}(x_2)$ et il existe $1 \leq k \leq p_{\mathcal{B}^*}(x_1)$ tel que $x_2 = T^k_{\mathcal{B}^*}(x_1)$.*

On rappelle que si $x \in \mathrm{Per}_{\mathcal{B}^*}(\Lambda^0)$, la longueur $l(\xi_{\mathcal{B}^*}(x))$ de la géodésique $\xi_{\mathcal{B}^*}(x)$ est $l(\xi_{\mathcal{B}^*}(x)) = -\mathrm{Log}\,|\gamma'(\gamma^{-1}x)| = \mathrm{Log}\,|(\gamma^{-1})'(x)|$. Notons $f_{\mathcal{B}^*}$ l'application de Λ^0 dans $\mathbb{R}$ définie par $f_{\mathcal{B}^*}(x) = \mathrm{Log}\,|(T_{\mathcal{B}^*})'(x)|$ et $S_n f_{\mathcal{B}^*} = f_{\mathcal{B}^*} + \cdots + f_{\mathcal{B}^*} \circ T^{n-1}_{\mathcal{B}^*}$; on a donc $S_n f_{\mathcal{B}^*}(x) = \mathrm{Log}\;|(T^n_{\mathcal{B}^*})'(x)|$.

COROLLAIRE IV.5. — *Pour tout $a > 0$ on a $\pi_M(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sharp\{x \in$ $\mathrm{Per}_{\mathcal{B}^*}(\Lambda^0)/p_{\mathcal{B}^*}(x) = n$ et $S_n f_{\mathcal{B}^*}(x) \leq a\}$.*

IV.c. Propriétés de $T_{\mathcal{B}^*}$.

NOTATIONS. — *On note $\Sigma_{\mathcal{B}^*}$ l'ensemble des suites bilatères $(b_i^{n_i})_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{B}^*$ telles que pour tous entiers $s < t$ la suite $b_s^{n_s}, \cdots, b_t^{n_t}$ appartienne à $\Omega_{\mathcal{B}^*}$.*

Pour tous x_- et $x \in \Lambda^0$ avec $\omega_{\mathcal{B}^*}(x) = b_1^{n_1}, b_2^{n_2} \cdots$ et $\omega_{\mathcal{B}^*}(x_-) = b_0^{-n_0}, b_{-1}^{-n-1} \cdots$, on note $\omega_{\mathcal{B}^*}(x_-, x)$ la suite bilatère $\cdots b_{-1}^{n-1}, b_0^{n_0}, b_1^{n_1}, b_2^{n_2} \cdots$.

Posons $\Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0 = \{(x_-, x) \in \Lambda^0 \times \Lambda^0 / \omega(x_-, x) \in \Sigma_{\mathcal{B}^*}\}$; *pour tout* $b^n \in \mathcal{B}^*$ *notons* $(\Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0)_{b^n}$ *(resp.* $\Lambda^0_{b^n}$*) l'ensemble des points* $(x_-, x) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0$ *(resp.* $x \in \Lambda^0$*) tels que le premier terme de* $\omega_{\mathcal{B}^*}(x)$ *soit* b^n.

Le décalage sur $\Sigma_{\mathcal{B}^*}$ induit une transformation $\overline{T}_{\mathcal{B}^*}$ sur $\Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0$ définie par : $\forall (x_-, x) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0 \quad \overline{T}_{\mathcal{B}^*}(x_-, x) = (b_1^{-n_1} x_-, b_1^{-n_1} x)$ où $b_1^{-n_1}$ désigne le premier terme de $\omega_{\mathcal{B}^*}(x)$.

LEMME IV.6. — *L'ensemble* $\Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0$ *est relativement compact dans* $\Lambda^0 \times \Lambda^0$ *privé de la diagonale.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $(y_n, x_n)_{n \geq 1}$ de $\Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0$ convergeant vers un point (z, z). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $a_1 \in \mathcal{A}$ (resp. $a_2 \in \mathcal{A}$) tel que pour tout $n \geq 1$ le premier terme de la suite $\omega_{\mathcal{A}}(x_n)$ (resp. $\omega_{\mathcal{A}}(y_n)$) soit a_1 (resp. a_2). Puisque $(y_n, x_n) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0$, on a $a_1 \neq a_2^{\pm 1}$; de plus, les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ convergent vers z d'où $z \in S_{a_1^{-1}} \cap S_{a_2^{-1}} \cap \Lambda$. On déduit du lemme I.2 l'existence d'un élément $p \in \mathcal{P}$ fixant z et vérifiant donc $p = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_l}$ avec $\alpha_{i_1} = a_1$ et $\alpha_{i_l} = a_2^{-1}$. Soit π l'unique élément de $\mathcal{P}_0$ conjugué à p; il existe $1 \leq q \leq l$ tel que $\pi = \alpha_{i_q} \cdots \alpha_{i_l} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_{q-1}}$. Considérons $r_1, r_2 \in \mathbb{N}, r_2 < l$ tels que $l_0 + 1 = l r_1 + r_2$. La suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge vers z et le premier terme de $\omega_{\mathcal{A}}(x_n)$ est α_{i_1}; d'après le lemme I.5 pour n assez grand, les $l_0 + 1$ premiers termes de $\omega_{\mathcal{A}}(x_n)$ sont $\overbrace{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_l}}^{r_1 \text{ fois}}, \alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{r_2}}$. Si $q = 1$, autrement dit si $p = \pi$, le premier terme de $\omega_{\mathcal{B}^*}(x_n)$ est une puissance de π; sinon, les $q - 1$ premiers termes de $\omega_{\mathcal{B}^*}(x)$ sont $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_{q-1}}$, le $q^{ième}$ étant une puissance de π. Le même raisonnement appliqué à y_n entraîne que si $q = 1$ le premier terme de $\omega_{\mathcal{B}^*}(y_n)$ est une puissance de π^{-1} et sinon les $l - q + 1$ premiers termes de $\omega_{\mathcal{B}}(x_n)$ sont $\alpha_{i_l}^{-1}, \alpha_{i_{l-1}}^{-1}, \cdots, \alpha_{i_q}^{-1}$, le $(l-q)^{ième}$ étant une puissance de π^{-1} ce qui contredit le fait que $(y_n, x_n) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0$. □

COROLLAIRE IV.7. — *Il existe* $N_2 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\inf_{x \in \Lambda^0} |(T_{\mathcal{B}^*}^{N_2})'(x)| > 1$.

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde et considérons un réel $\beta > 1$ et une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de Λ^0 tels que $|(T_{\mathcal{B}^*}^n)'(x_n)| \leq \beta$ pour tout $n \geq 1$; posons $\omega_{\mathcal{B}^*}(x_n) = (b_{ni}^{p_{ni}})_{i \geq 1}$ et $\gamma_n = b_{n1}^{p_{n1}} \cdots b_{nn}^{p_{nn}}$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que pour tout $n \geq 1$ on a $b_{n1} = b_1$ et $b_{nn} = b_2$; notons $\omega_{\mathcal{A}}(b_1) = a_{11}, \cdots, a_{1l_1}$ et $\omega_{\mathcal{A}}(b_2) = a_{21}, \cdots, a_{2l_2}$.

Si $a_{11} \neq a_{2l_2}^{\pm 1}$ posons $g_n = a_{11}^2 a_{2l_2}^2 \gamma_n$ et $X_n = a_{11}^2 a_{2l_2}^2 x_n$. Les transformations g_n sont loxodromiques et le $\mathcal{B}^*$-développement de leur point répulsif $x_{g_n}^-$ est périodique de période $\omega_{\mathcal{B}^*}(g_n)$. Par conséquent, si $y_n = T_{\mathcal{B}^*}^n(X_n)$, le couple $(x_{g_n}^-, y_n)$ appartient à $\Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0$ et l'on a

$$|g_n'(y_n)| = |(a_{11}^2 a_{2l_2}^2)'(x_n)||\gamma_n'(y_n)| \geq \frac{1}{\beta} \inf_{z \in \Lambda^0} |(a_{11}^2 a_{2l_2}^2)'(z)|.$$

D'après le lemme IV.8 il existe donc une constante $B > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait $|x_{g_n}^- - X_n| \geq \sqrt{|g_n'(x_{g_n}^-)|\frac{B}{\beta}}$. Le groupe Γ étant géométriquement fini on a $\lim_{n \to +\infty} |g_n'(x_{g_n}^-)| = +\infty$ ce qui contredit l'inégalité $|x_{g_n}^- - X_n| \leq 2$.

Si $a_{11} = a_{2l_2}^{\pm 1}$ on choisit $\alpha \in \mathcal{A} - \{a_{11}^{\pm 1}\}$ et on applique de nouveau le raisonnement précédent en remplaçant g_n par $\alpha^2 \gamma_n$ et X_n par $\alpha^2 x_n$. □

Pour tout $x \in \Lambda^0$ posons

$$h_{\mathcal{B}^*}(x) = C_2 \int_{\{x_- \in \Lambda^0 / (x_-, x) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0\}} \frac{\sigma(dx_-)}{|x_- - x|^{2\delta}}$$

avec $C_2^{-1} = \int_{\Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0} \frac{\sigma(dx)\sigma(dx_-)}{|x_- - x|^{2\delta}}$. En reprenant les arguments de la démonstration du corollaire II.5 on obtient le

COROLLAIRE IV.8. — *La mesure $\nu_{\mathcal{B}^*}(dx) = h_{\mathcal{B}^*}(x)\sigma(dx)$ est une mesure de probabilité $T_{\mathcal{B}^*}$-invariante sur Λ^0. De plus*

$$\sup_{b^n \in \mathcal{B}^*} \sup_{\substack{x,y \in \Lambda^0_{b^n} \\ x \neq y}} \frac{|h_{\mathcal{B}^*}(x) - h_{\mathcal{B}^*}(y)|}{|x - y|^{\delta_0}} < +\infty$$

avec $\delta_0 = \inf(1, \delta)$.

V. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME A

Dans ce paragraphe, nous montrons que $\pi_M(a)$ est équivalent à $\dfrac{e^{a\delta}}{a\delta}$ lorsque a tend vers $+\infty$. Nous utilisons le codage des points $x \in \Lambda^0$ par les suites $\omega_{\mathcal{B}^*}(x)$ introduites dans le paragraphe précédent; lorsque $\mathcal{P} = \emptyset$ on a $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^*$ et $\omega_{\mathcal{B}^*}(x) = \omega_{\mathcal{A}^*}(x)$. Pour alléger le texte, introduisons les

NOTATIONS. — *On note $\omega_{\mathcal{B}^*} = \omega$, $T_{\mathcal{B}^*} = T$, $h_{\mathcal{B}^*} = h$, $f_{\mathcal{B}^*} = f$ et $\nu_{\mathcal{B}^*} = \nu$.*

Posons $N(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sharp\{x \in \Lambda^0 \ / \ T^n(x) = x \text{ et } S_n f(x) \leq a\}$; on a $N(a) - N(a/2) \leq \pi_M(a) \leq N(a)$. Pour établir le théorème A, il suffit de montrer que $N(a)$ est équivalent à $\frac{e^{a\delta}}{a\delta}$. Nous reprenons ici une idée de S. Lalley et approchons $N(a)$ par des quantités de la forme

$$N_{(x,a)}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sharp\{y \in A / T^n(y) = x \text{ et } S_n f(y) \leq a\}$$

où $(x,a) \in \Lambda^0 \times \mathbb{R}^+$ et A est un ouvert de Λ^0. En exprimant $N_{(x,a)}$ comme potentiel d'un certain opérateur positif et en utilisant un théorème du renouvellement harmonique, on montre le

THÉORÈME B. — *Soit σ la mesure de Patterson-Sullivan sur Λ.*

Si $\sharp\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_0 \geq 5$ alors, pour tout ouvert $A \subset \Lambda^0$ de σ-mesure strictement positive, $N_{(x,a)}(A)$ est équivalent à $h(x)\frac{e^{a\delta}}{a\delta}\sigma(A)$ lorsque a tend vers $+\infty$, uniformément par rapport à $x \in \Lambda^0$.

Si $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 = 4$ on pose $\Lambda^0_\epsilon = \{x \in \Lambda^0 /$ le premier terme de $\omega_{\mathcal{A}}(x)$ est $\alpha_\epsilon^{\pm 1}\}$ avec $\epsilon \in \{1,2\}$. Pour tout ouvert $A_\epsilon \subset \Lambda^0_\epsilon$ de σ-mesure strictement positive, $N_{(x,a)}(A_\epsilon)$ est équivalent à $h(x)\frac{e^{a\delta}}{a\delta}\sigma(A_\epsilon)$ lorsque a tend vers $+\infty$, uniformément par rapport à $x \in \Lambda^0_\epsilon$.

Dans les paragraphes V et VII, nous utiliserons de façon essentielle la

PROPRIÉTÉ V.1 ([14]). — *Soit G un groupe discret non élémentaire d'isométries de $\mathbb{B}^d$. Si G contient des transformations paraboliques, l'exposant critique de la série de Poincaré associée à G est strictement supérieur à $1/2$.*

V.a. Perturbation des points T-périodiques.

NOTATIONS. — *Soient $x \in \Lambda^0$ et $(b_i^{n_i})_{i\geq 1}$ son $\mathcal{B}^*$-développement. Pour tout $k \geq 1$, on note $\omega_k(x)$ la suite finie $(b_i^{n_i})_{1\leq i\leq k}$. De même, si $\gamma \in \Gamma$ et $\omega(\gamma) = (b_i^{n_i})_{1\leq i\leq l}$, pour tout $1 \leq k \leq l$ on note $\omega_k(\gamma)$ la suite $(b_i^{n_i})_{1\leq i\leq k}$.*

Nous reprenons ici des arguments de [2] et [11]. Soit $k_0 \geq l_0$. Notons $\Omega_{k_0} = \{\omega_{k_0}(x)/x \in \Lambda^0\}$ et fixons une suite $(\gamma_i)_{i\geq 1}$ d'éléments distincts de

Γ telle que $\Omega_{k_0} = \{\omega(\gamma_i)/i \geq 1\}$. Posons $\Lambda^0_{\gamma_i} = \{x \in \Lambda^0/\omega_{k_0}(x) = \omega(\gamma_i)\}$; la famille $(\Lambda^0_{\gamma_i})_{i\geq 1}$ forme une partition de Λ^0. Dans chaque ensemble $\Lambda^0_{\gamma_i}$ on se fixe un point x_i. Soit $x \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ tel que $T^n(x) = x$. On associe à x le point $\tilde{x} \in \Lambda^0$ dont le $\mathcal{B}^*$-développement est $\omega(\tilde{x}) = \omega_n(x)\nabla\omega(x_i)$; on a $\tilde{x} \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ et $\omega_{n+k_0}(x) = \omega_{n+k_0}(\tilde{x})$. Notons alors $\mathrm{Fix}(T^n)$ l'ensemble $\{x \in \Lambda^0/T^n(x) = x\}$. L'application qui à $x \in \mathrm{Fix}(T^n)$ associe $\tilde{x}$ établit une bijection entre les ensembles $\mathrm{Fix}(T^n) \cap \Lambda^0_{\gamma_i}$ et $T^{-n}(x_i) \cap \Lambda^0_{\gamma_i}, i \geq 1$.

LEMME V.2. — *Il existe $N_0 \in \mathbb{N}, A, B \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\rho \in]0,1[$ tels que pour tout entier $s \geq N_0$ et pour tous $x, y \in \Lambda^0$ vérifiant $\omega_s(x) = \omega_s(y)$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq A|Tx - Ty| \leq B\rho^s$.*

Démonstration. — Voir paragraphe V.d.

Ajustons le choix de k_0 en supposant $k_0 \geq N_0$; si $x \in \mathrm{Fix}(T^n)$ alors $\omega_{n+k_0}(x) = \omega_{n+k_0}(\tilde{x})$ d'où $|S_nf(x) - S_nf(\tilde{x})| \leq \theta_{k_0}$ avec $\theta_{k_0} = B \sum_{s=k_0}^{+\infty} \rho^s$ d'après le lemme V.2. On a d'une part

$\sharp\{y \in \Lambda^0_{\gamma_i}/T^n y = x_i$ et $S_nf(y) \leq a - \theta_{k_0}\} \leq \sharp\{x \in \mathrm{Fix}(T^n) \cap \Lambda^0_{\gamma_i}/S_nf(x) \leq a\}$

et d'autre part

$\sharp\{x \in \mathrm{Fix}(T^n) \cap \Lambda^0_{\gamma_i}/S_nf(x) \leq a\} \leq \sharp\{y \in \Lambda^0_{\gamma_i}/T^n y = x_i$ et $S_nf(y) \leq a + \theta_{k_0}\}$.

On en déduit les

INÉGALITÉS V.3. — *Pour tout $k_0 \geq N_0$, on a*

i) $\sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x_i, a-\theta_{k_0})}(\Lambda^0_{\gamma_i}) \leq N(a)$

ii) $N(a) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} N_{(x_i, a+\theta_{k_0})}(\Lambda^0_{\gamma_i})$.

V.b. Le théorème A se déduit du théorème B.

Commençons par le cas où $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 \geq 5$. D'après le théorème B, $N_{(x_i, a-\theta_{k_0})}(\Lambda^0_{\gamma_i})$ est équivalent à $h(x_i)\dfrac{e^{a\delta}}{a\delta}\sigma(\Lambda^0_{\gamma_i})$ lorsque a tend vers $+\infty$. En appliquant le lemme de Fatou dans l'inégalite V.3.i), on obtient

$$e^{-\delta\theta_{k_0}} \sum_{i=1}^{+\infty} h(x_i)\sigma(\Lambda^0_{\gamma_i}) \leq \liminf_{a\to+\infty} \frac{a\delta}{e^{a\delta}} N(a).$$

Le passage à la limite dans l'inégalité V.3.ii) est plus délicat et nécessite l'utilisation du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, d'où le

LEMME V.4. — *Il existe une série à termes positifs convergente $(C_i)_{i\geq 1}$ telle que pour tout $a > 0$ on ait $N_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) \leq C_i \frac{e^{a\delta}}{a\delta}$.*

Démonstration. — Voir paragraphe V.d.

Nous obtenons donc $\limsup_{a\to+\infty} \frac{a\delta}{e^{a\delta}} N(a) \leq e^{\delta\theta_{k_0}} \sum_{i=1}^{+\infty} h(x_i)\sigma(\Lambda^0_{\gamma_i})$. Finalement, pour tout $k_0 \geq N_0$, on a

$$e^{-\delta\theta_{k_0}} \sum_{i=1}^{+\infty} h(x_i)\sigma(\Lambda^0_{\gamma_i}) \leq \liminf_{a\to+\infty} \frac{a\delta}{e^{a\delta}} N(a) \leq \limsup_{a\to+\infty} \frac{a\delta}{e^{a\delta}} N(a)$$
$$\leq e^{\delta\theta_{k_0}} \sum_{i=1}^{+\infty} h(x_i)\sigma(\Lambda^0_{\gamma_i}).$$

On achève alors la démonstration du théorème A en remarquant que $\lim_{k_0\to\infty} \theta_{k_0} = 0$ et que

$$\lim_{k_0\to\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} h(x_i)\sigma(\Lambda^0_{\gamma_i}) = \int_{\Lambda^0} h(x)\sigma(dx) = 1$$

car la mesure σ n'a pas d'atome ([19]).

Considérons maintenant le cas où $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 = 4$. On pose $\pi_M(a) = \pi_1(a) + \pi_2(a)$ avec

$$\pi_\epsilon(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sharp\{x \in \mathrm{Per}(\Lambda^0_\epsilon)/p(x) = n \ \text{ et } \ S_n f(x) \leq a\}, \quad \epsilon = 1, 2.$$

On a $T(\Lambda^0_1) = \Lambda^0_2$ et $T(\Lambda^0_2) = \Lambda^0_1$; si $x \in \Lambda^0_\epsilon$ est T-périodique, la période $p(x)$ est donc paire d'où $\pi_\epsilon(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \sharp\{x \in \mathrm{Per}(\Lambda^0_\epsilon)/p(x) = 2n$ et $S_{2n}f(x) \leq a\}$, $\epsilon = 1, 2$. De la même façon si A_ϵ est un borélien de Λ^0_ϵ et $x \in \Lambda^0_\epsilon$, on a $N_{(x,a)}(A_\epsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \sharp\{y \in \Lambda^0_\epsilon/T^{2n}(y) = x$ et $S_{2n}f(y) \leq a\}$, $\epsilon = 1, 2$. Le reste de la démonstration se calque alors sur le cas précédent. □

Il reste à démontrer les lemmes V.2 et V.4; pour cela, nous avons besoin de contrôler précisément la dynamique des éléments de $\mathcal{B}$.

V.c. Dynamique des éléments de $\mathcal{B}$.

NOTATION. — *Soit $b^n \in \mathcal{B}$; on note $\Lambda^0_{b^n}$ l'ensemble des points $x \in \Lambda^0$ dont le $\mathcal{B}^*$-développement commence par b^n.*

LEMME V.5. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $b \in \mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0$, pour tous $n \geq 1$ et $x \in \Lambda^0_{b^n}$ on ait*

$$|Tx - x_b| \geq C \quad \text{et} \quad |Tx - x_{b^{-1}}| \geq C$$

où $x_b = \lim\limits_{k \to +\infty} b^k(x)$.

En d'autres termes, l'ensemble $\bigcup\limits_{n \geq 1} T(\Lambda^0_{b^n})$ est inclus dans un compact ne contenant ni x_b ni $x_{b^{-1}}$.

Démonstration. — Soit $b \in \mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0$. Supposons qu'il existe une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ de $\bigcup\limits_{n \geq 1} \Lambda^0_{b^n}$ telle que $y_k = Tx_k$ converge vers x_b. D'après le lemme I.5 pour k assez grand le $\mathcal{B}^*$-développement des points y_k commence alors par une puissance de b ce qui contredit l'égalité $Tx_k = y_k$. □

LEMME V.6 (Lemme P). — *Soit b une transformation parabolique de $\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0$. Il existe une constante $C_b > 0$ telle que*

i) $\forall n \geq 1, \forall x \in \Lambda^0_{b^n} \qquad \dfrac{1}{C_b n^2} \leq |(b^n)'(Tx)| \leq \dfrac{C_b}{n^2}.$

ii) $\forall n \geq 1, \forall x, y \in \Lambda^0_{b^n} \qquad \big||(b^n)'(Tx)| - |(b^n)'(Ty)|\big| \leq \dfrac{C_b}{n^2}|Tx - Ty|.$

Démonstration. — En utilisant le lemme V.5 et en faisant un calcul explicite sur $\mathbb{H}^d$ on établit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\forall n \geq 1, \forall x \in \Lambda^0_{b^n} \quad \dfrac{1}{Cn} \leq |x - x_b| \leq \dfrac{C}{n}$. La double inégalité i) s'en déduit grâce à la relation $|(b^n)'(Tx)| = \dfrac{|x - x_b|^2}{|Tx - x_b|^2}$. Pour établir l'inégalité ii), fixons $x, y \in \Lambda^0_{b^n}$; on a

$$\big||(b^n)'(Tx)| - |(b^n)'(Ty)|\big| = \left| \frac{|x - x_b|^2}{|Tx - x_b|^2} - \frac{|y - x_b|^2}{|Ty - x_b|^2} \right|$$

d'où

$$\big||(b^n)'(Tx)| - |(b^n)'(Ty)|\big| \leq \left| \frac{|x - x_b|^2}{|Tx - x_b|^2} - \frac{|x - x_b|^2}{|Ty - x_b|^2} \right| + \left| \frac{|x - x_b|^2}{|Ty - x_b|^2} - \frac{|y - x_b|^2}{|Ty - x_b|^2} \right|.$$

On conclut alors en utilisant la relation

$$|x-y| = \sqrt{|(b^n)'(Tx)||(b^n)'(Ty)|}|Tx-Ty|. \qquad \square$$

De la même façon on établit le

LEMME V.7 (Lemme L). — *Soit b une transformation loxodromique de $\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_0$. Il existe $C_b>0$ et $0<r_b<1$ tels que*

i) $\forall n\geq 1, \forall x\in\Lambda^0_{b^n}\quad \frac{1}{C_b}r_b^n \leq |(b^n)'(Tx)| \leq C_b r_b^n.$

ii) $\forall n\geq 1, \forall x,y\in\Lambda^0_{b^n}\quad \big||(b^n)'(Tx)|-|(b^n)'(Ty)|\big| \leq C_b r_b^n|Tx-Ty|.$

V.d. Démonstrations des lemmes V.2 et V.4.

Démonstration du lemme V.2. — Pour tout entier $s\geq 1$ et tous $x,y\in\Lambda^0$ tels que $\omega_s(x)=\omega_s(y)$, on a

$$|T^s(x)-T^s(y)| = \sqrt{|(T^s)'(x)||(T^s)'(y)|}|x-y|.$$

Comme $\inf\limits_{z\in\Lambda^0}|(T^{N_1})'(z)|>1$, il existe $0<\rho<1$ et $K_1>0$ tels que pour tous $x,y\in\Lambda^0$ satisfaisant $\omega_s(x)=\omega_s(y)$ on ait $|x-y|\leq K_1\rho^s$ $(*)$. Par ailleurs, d'après les lemmes P et L, il existe $K_2>0$ tel que si $x,y\in\Lambda^0_{b^n}$ alors

$$\frac{\big||(b_n)'(Tx)|-|(b_n)'(Ty)|\big|}{|(b_n)'(Ty)|} \leq K_2|Tx-Ty|.$$

Le lemme découle alors de la majoration $|\operatorname{Log}(1+u)|\leq 2|u|$ pour $|u|$ assez petit. $\square$

Démonstration du lemme V.4. — Supposons $\sharp\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_0\geq 5$. On a

$$N_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{y/T^ny=x_i} 1_{\Lambda^0_{\gamma_i}}(y)1_{[0,a]}(S_nf(y)).$$

En combinant les lemmes P et L, on établit l'existence d'une constante $K_1\geq 1$ telle que pour tout $b^n\in\mathcal{B}^*$ et tout point $y\in T(\Lambda^0_{b^n})$ on ait $|(b^n)'(y)|\leq\frac{K_1}{n^2}$; ainsi, si $\omega(y)=(b_j^{p_j})_{j\geq 1}$ alors $S_nf(y)\geq 2\operatorname{Log}(p_1\cdots p_n)-n\operatorname{Log}\,K_1$. Posons $N_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i})=N'_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i})+N''_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i})$ avec

$$N'_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) = \sum_{n=1}^{k_0}\frac{1}{n}\sum_{y/T^ny=x_i} 1_{\Lambda^0_{\gamma_i}}(y)1_{[0,a]}(S_nf(y))$$

et

$$N''_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) = \sum_{n=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{y/T^n y = x_i} 1_{\Lambda^0_{\gamma_i}}(y) 1_{[0,a]}(S_n f(y)).$$

Fixons $i \geq 1$ et posons $\omega(\gamma_i) = (b_l^{p_l})_{1 \leq l \leq k_0}$; pour tout $1 \leq n \leq k_0$, si $y \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ et $T^n(y) = x_i$ alors $\omega(y) = (b_l^{p_l})_{1 \leq l \leq n} \nabla \omega(x_i)$ et donc $S_n f(y) \geq 2 \operatorname{Log}(p_1 \cdots p_n) - n \operatorname{Log}\ K_1$. Par conséquent

$$N'_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) \leq \sum_{n=1}^{k_0} \frac{1}{n} 1_{[0, a+n \operatorname{Log}\ K_1]}(2 \operatorname{Log} p_1 \cdots p_n).$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a pour tout réel A positif

$$1_{[0,A]}(x) \leq 1_{[0, \frac{e^{A\delta}}{1+A\delta}]}\left(\frac{e^{x\delta}}{1+x\delta}\right) \leq \frac{e^{A\delta}}{1+A\delta} \frac{1+x\delta}{e^{x\delta}}$$

d'où $N'_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) \leq C'_i \dfrac{e^{a\delta}}{a\delta}$ avec $C'_i = \sum\limits_{n=1}^{k_0} \dfrac{K_1^{n\delta}}{n} \dfrac{1 + 2\delta \operatorname{Log}(p_1 \cdots p_n)}{(p_1 \cdots p_n)^{2\delta}}$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} &N''_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) \\ &= \sum_{n=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{z/T^{n-k_0} z = x_i} \ \sum_{y/T^{k_0} y = z} 1_{\Lambda^0_{\gamma_i}}(y) 1_{[0,a]}(S_{n-k_0} f(z) + S_{k_0} f(y)). \end{aligned}$$

Si $y \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ alors $\omega_{k_0}(y) = \omega(\gamma_i)$ d'où $S_{k_0} f(y) \geq A_i$ avec $A_i = 2 \operatorname{Log}(p_1 \cdots p_{k_0}) - k_0 \operatorname{Log} K_1$. Remarquons que A_i est strictement positif sauf peut-être pour un nombre fini d'indices. En minorant $S_{k_0} f(y)$ par A_i dans l'expression de $N''_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i})$ on obtient

$$N''_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) \leq N_{(x_i, a-A_i)}(\Lambda^0).$$

Ainsi $N''_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) = 0$ si $a \leq A_i$; de plus, d'après le théorème B, il existe $K_2 > 0$ tel que pour tout $i \geq 1$ et tout $a > A_i$ on ait $N''_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) \leq K_2 \dfrac{e^{\delta(a-A_i)}}{1+\delta(a-A_i)}$. Comme $1 - \delta A_i \geq 0$ sauf peut-être pour un nombre fini d'indices i, on obtient $N''_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) \leq C''_i \dfrac{e^{a\delta}}{a\delta}$ avec $C''_i = K_2 e^{-A_i \delta}$.

Comme $\delta > 1/2$, les sommes

$$\sum_{p_1, \cdots, p_n \geq 1} \frac{1}{(p_1 \cdots p_n)^{2\delta}} \quad \text{et} \quad \sum_{p_1, \cdots, p_n \geq 1} \frac{\operatorname{Log}(p_1 \cdots p_n)}{(p_1 \cdots p_n)^{2\delta}}$$

sont finies et les séries $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} C'_i$ et $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} C''_i$ sont donc convergentes.

Supposons maintenant $\sharp \mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 \geq 4$. Les $N_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i})$ s'expriment alors de la façon suivante :

$$N_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \sum_{y/T^{2n}y=x_i} 1_{\Lambda^0_{\gamma_i}}(y) 1_{[0,a]}(S_{2n}f(y)).$$

Soulignons que si $\Lambda^0_{\gamma_i} \subset \Lambda^0_\epsilon$ avec $\epsilon = 1, 2$ et $T^{2n}y = x_i$ alors $y \in \Lambda^0_\epsilon$. En reprenant la démonstration précédente, on obtient en particulier $N''_{(x_i,a)}(\Lambda^0_{\gamma_i}) \leq N_{(x_i,a-A_i)}(\Lambda^0_\epsilon)$ et on peut alors appliquer le théorème B pour obtenir la majoration souhaitée. □

VI. THÉORIE DU POTENTIEL ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B.

VI. a. Un théorème du renouvellement harmonique pour une marche de Markov transiente sur $\mathbb{R}$.

Soient (X, d) un espace métrique, $\mathcal{X}$ la tribu des boréliens de X et $\mathcal{B}_\infty(X, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées de X dans $\mathbb{C}$. On considère une probabilité de transition sur X, c'est-à-dire une application Q de $X \times \mathcal{X}$ dans $[0, 1]$ telle que :

– pour tout $A \in \mathcal{X}$, l'application $x \mapsto Q(x, A)$ soit borélienne,

– pour tout $x \in X$, l'application $A \mapsto Q(x, A)$ soit une mesure de probabilité sur X.

On associe à Q l'opérateur (noté encore Q) défini, pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_\infty(X, \mathbb{C})$, par

$$\forall x \in X \quad Q\varphi(x) = \int_X \varphi(y) Q(x, dy).$$

Fixons une fonction borélienne g de X dans $\mathbb{R}$ et introduisons le noyau de transition $\tilde{Q}$ sur $X \times \mathbb{R}$ dont l'opérateur associé est défini, pour toute fonction borélienne bornée ψ sur $X \times \mathbb{R}$, par

$$\forall (x, t) \in X \times \mathbb{R} \quad \tilde{Q}\psi(x, t) = \int_X \psi(y, t + g(y)) Q(x, dy).$$

Pour étudier $\tilde{Q}$, nous introduisons la famille d'opérateurs de Fourier $(Q_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ définis par $Q_\lambda \varphi = Q(e^{i\lambda g}\varphi)$. On note $C_c(X)$ l'espace des fonctions continues à support compact de X dans $\mathbb{C}$ et $|.|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur X. Nous introduisons un espace de Banach $(E, \|.\|_E)$ formé de fonctions boréliennes bornées sur X et vérifiant les propriétés suivantes :

1) $1 \in E$.

2) $\forall \varphi \in E \quad |\varphi|_\infty \leq \|\varphi\|_E$.

3) $E \cap C_c(X)$ est dense dans $(C_c(X), |.|_\infty)$.

Nous avons le

THÉORÈME VI.1. (Théorème du renouvellement harmonique [3]). — *On suppose que le couple (Q, g) vérifie les hypothèses suivantes :*

H1) *Q opère sur $(E, \|.\|_E)$.*

H2) *Il existe sur X une unique mesure de probabilité Q-invariante μ et le rayon spectral sur $(E, \|.\|_E)$ de l'opérateur $R = Q - \mu$ est strictement inférieur à 1.*

H3) *Les opérateurs $Q_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, opèrent sur $(E, \|.\|_E)$ et pour tout $\lambda \neq 0$ le rayon spectral sur $(E, \|.\|_E)$ de Q_λ est strictement inférieur à 1.*

H4) $\sup_{x \in X} Qg^3(x) < +\infty$ *et* $0 < \mu(g) < +\infty$.

H5) *L'application $\lambda \mapsto Q_\lambda$ est de classe C^3 de $(\mathbb{R}, |.|)$ dans l'espace de Banach $(\mathcal{L}(E), \|.\|_{\mathcal{L}(E)})$ des applications linéaires continues sur $(E, \|.\|_E)$ muni de la norme usuelle.*

Sous ces hypothèses, lorsque a tend vers $+\infty$, la famille de mesures $\left(a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{Q}^n((x, a), dy\, dt)\right)_{a>0}$ converge vaguement et uniformément par rapport à $x \in X$ vers la mesure produit $\mu \otimes l$ sur $X \times \mathbb{R}$ où l désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

En particulier si u est une fonction non nulle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ continue et croissante et si φ est une fonction borélienne de E dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est μ-négligeable telle que $\mu(\varphi) > 0$, on a

$$\lim_{a \to +\infty} \sup_{x \in X} \left| \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{Q}^n(\varphi \otimes u1_{[0,a]})(x, 0)}{\frac{\mu(\varphi)}{a} \int_0^a u(t)dt} - 1 \right| = 0.$$

VI.b. Construction de l'opérateur de Perron-Frobenius associé à T.

Rappelons que la mesure $\nu(dx) = h(x)\sigma(dx)$ est une mesure de probabilité T-invariante sur Λ^0 et que pour toute fonction φ borélienne bornée de Λ^0 dans $\mathbb{R}$ et tout $\gamma \in \Gamma$ on a

$$(*) \qquad \int_{\Lambda^0} \varphi(\gamma^{-1}(x))\sigma(dx) = \int_{\Lambda^0} \varphi(y)|\gamma'(y)|^\delta \sigma(dy).$$

Notons $\mathbb{L}^2(\Lambda^0, \nu)$ l'espace des fonctions boréliennes de Λ^0 dans $\mathbb{R}$ de carré ν-intégrable. La mesure ν étant T-invariante, la transformation T agit isométriquement sur $\mathbb{L}^2(\Lambda^0, \nu)$ de la façon suivante :

$$\forall \varphi \in \mathbb{L}^2(\Lambda^0, \nu) \quad T(\varphi) = \varphi \circ T.$$

Soit P l'opérateur adjoint de T dans $\mathbb{L}^2(\Lambda^0, \nu)$ ([2], [3], [6], [16]); pour toutes fonctions boréliennes bornées φ et ψ ce $\mathbb{L}^2(\Lambda^0, \nu)$, on a

$$\int_{\Lambda^0} T(\varphi)(x)\psi(x)\nu(dx) = \int_{\Lambda^0} \varphi(x)P\psi(x)\nu(dx).$$

En revenant à la définition de T et de ν, on obtient pour ν-presque tout x

$$P\psi(x) = \sum_{y \in \Lambda^0 / Ty = x} \frac{h(y)}{h(x)}\, e^{-\delta f(y)}\psi(y).$$

A priori, $P\psi$ est défini dans $\mathbb{L}^2(\Lambda^0, \nu)$; nous étendons l'action de P à l'espace des fonctions boréliennes bornées sur Λ^0 en posant la

DÉFINITION VI.2. — *Pour toute fonction borélienne bornée φ sur Λ^0 et tout point $x \in \Lambda^0$, on pose*

$$P\varphi(x) = \sum_{y \in \Lambda^0 / Ty = x} \frac{h(y)}{h(x)}\, e^{-\delta f(y)}\varphi(y).$$

Notons que la fonction $P\varphi$ est clairement définie (dans $\overline{\mathbb{R}^+}$) lorsque φ est positive; le fait que cette définition reste valable lorsque φ n'est pas de signe constant est une conséquence de l'étude qui suit.

Les itérés de P sont donnés par la formule

$$P^n\varphi(x) = \sum_{y \in \Lambda^0 / T^n y = x} \frac{h(y)}{h(x)} e^{-\delta S_n f(y)}\varphi(y)$$

pour tout $n \geq 1$.

Associons maintenant au couple (P, f) l'opérateur $\tilde{P}$ défini par

$$\tilde{P}\psi(x,t) = \sum_{y\in\Lambda^0/Ty=x} \frac{h(y)}{h(x)} e^{-\delta f(y)} \psi(y, t + f(y)).$$

Pour tout $n \geq 1$ on a $\tilde{P}^n\psi(x,t) = \sum_{y\in\Lambda^0/T^n y=x} \frac{h(y)}{h(x)} e^{-\delta S_n f(y)} \psi(y, t+S_n f(y))$.

VI.c. Démonstration du théorème B.

Cas où $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 \geq 5$. Remarquons que

$$N_{(x,a)}(A) = h(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tilde{P}^n (g_A \otimes \chi_a)(x, 0)$$

avec $g_A(y) = \dfrac{1_A(y)}{h(y)}$ pour tout $y \in \Lambda^0$ et $\chi_a(t) = 1_{[0,a]}(t)e^{\delta t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour pouvoir utiliser le théorème du renouvellement harmonique, nous montrons dans le paragraphe VII qu'il existe un espace de Banach $(L, \|.\|)$ de fonctions de Λ^0 dans $\mathbb{C}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1) $1 \in L$,

2) $\forall \varphi \in L \quad |\varphi|_\infty \leq \|\varphi\|$,

3) $L \cap C_c(\Lambda^0)$ est dense dans $(C_c(\Lambda^0), |.|_\infty)$

et que le couple (P, f) satisfait sur $(L, \|.\|)$ les hypothèses du théorème VI.1 (avec en particulier la mesure ν comme unique mesure de probabilité T-invariante sur Λ^0). Nous pouvons donc appliquer ce théorème aux fonctions $\varphi = g_A(x)$ et $u(t) = e^{\delta t}$ d'où la première assertion du théorème B.

Cas où $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 = 4$. L'hypothèse H2 est satisfaite par le couple $(P^2, f + f \circ T)$ sur chacun des ensembles Λ^0_1 et Λ^0_2. Le reste de la démonstration se calque sur le cas précédent. □

VII. ÉTUDE SPECTRALE DES OPÉRATEURS P_λ

Rappelons que k_0 est un entier fixé supérieur à l_0 et N_0 (voir Lemme V.2). Remarquons que pour toute fonction borélienne bornée φ sur Λ^0 et tout $x \in \Lambda^0$ on a

$$P\varphi(x) = \sum_{b^n\in\mathcal{B}^*} p_{b^n}(x)\varphi(b^n x) \quad \text{avec} \quad p_{b^n}(x) = 1_{\Lambda^0_{b^n}}(b^n x)\frac{h(b^n x)}{h(x)}|(b^n)'(x)|^\delta.$$

Le lemme suivant permet d'expliciter la condition $b^n x \in \Lambda^0_{b^n}$.

LEMME VII.1. — *Soit $b^n \in \mathcal{B}^*$; on a* $T\Lambda^0_{b^n} = \bigcup_{\{\gamma_i / b^n \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}\}} \Lambda^0_{\gamma_i}$.

Démonstration. — Soit $x \in T(\Lambda^0_{b^n})$; on a $\omega(b^n x) = b^n \nabla\omega(x)$. Comme x appartient à $\Lambda^0_{\gamma_i}$ on a $\omega(x) = \omega(\gamma_i)\nabla\omega(\gamma_i^{-1}x)$ d'où $\omega(b^n x) = b^n \nabla\omega(\gamma_i)\nabla\omega(\gamma_i^{-1}x)$ et par conséquent $b^n\nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$.

Réciproquement, soient γ_i tel que $b^n\nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$ et $x \in \Lambda^0_{\gamma_i}$. Comme $|\omega_{\mathcal{A}^*}(b^n\gamma_i)| \geq l_0$, les suites $\omega_{\mathcal{B}}(b^n x)$ et $\omega_{\mathcal{B}}(b^n\gamma_i)$ ont le même premier terme d'après la proposition III.12. En revenant à la construction du $\mathcal{B}^*$-développement d'un point de Λ^0, on obtient $\omega(b^n x) = b^n\nabla\omega(x)$ et donc $x \in T\Lambda^0_{b^n}$. □

On déduit du lemme précédent que la fonction $x \mapsto 1_{\Lambda^0_{b^n}}(b^n x)$ ne dépend que des k_0 premiers termes du $\mathcal{B}^*$-développement de x; ainsi, pour tout $i \geq 1$, tout $b_n \in \mathcal{B}^*$ et tout $x \in \Lambda^0_{\gamma_i}$, on a $p_{b^n}(x) = \dfrac{h(b^n x)}{h(x)}|(b^n)'(x)|^\delta$ si $b^n\nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$ et $p_{b^n}(x) = 0$ sinon.

Introduisons maintenant la

NOTATION. — *Soit L_{k_0} l'espace des fonctions φ de Λ^0 dans $\mathbb{C}$ telles que*

$$\|\varphi\| = |\varphi|_\infty + m(\varphi) < +\infty$$

où $|.|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur Λ^0 et

$$m(\varphi) = \sup_{i\geq 1} \sup_{\substack{x,y\in\Lambda^0_{\gamma_i}\\ x\neq y}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\delta_0}} \quad \textit{avec} \quad \delta_0 = \inf(1,\delta).$$

On a $1 \in L_{k_0}$, $\forall\varphi \in L_{k_0}$ $|\varphi|_\infty \leq \|\varphi\|_{L_{k_0}}$ et $L_{k_0} \cap C_c(\Lambda^0)$ est dense dans $C_c(\Lambda^0)$. De plus $(L_{k_0}, \|.\|)$ est un espace de Banach et que, par le théorème d'Ascoli, l'injection canonique de $(L_{k_0}, \|.\|)$ dans $(L_{k_0}, |.|_\infty)$ est compacte.

VII.a. Hypothèse H1.

Rappelons que $\forall x \in \Lambda^0$ $h(x) = \displaystyle\int_{\{x_- \in\Lambda_0/(x_-,x)\in\Lambda^0\times_{\mathcal{B}^*}\Lambda^0\}} \frac{\sigma(dx_-)}{|x-x_-|^{2\delta}}$.

Nous avons le

LEMME VII.2. — *La fonction h appartient à l'espace L_{k_0}. De plus, il existe $K > 1$ tel que*

$$\forall x \in \Lambda^0 \quad \frac{1}{K} \leq h(x) \leq K.$$

Démonstration. — En revenant à la définition de $\Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0$, pour tout $i \geq 1$ et tout $x \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ on a $\{x_- \in \Lambda_0 / (x_-, x) \in \Lambda^0 \times_{\mathcal{B}^*} \Lambda^0\} = \gamma_i(\Lambda^0_{\gamma_i^{-1}})$. Par conséquent, si $x \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ on a $h(x) = \displaystyle\int_{\gamma_i(\Lambda^0_{\gamma_i^{-1}})} \frac{\sigma(dx_-)}{|x - x_-|^{2\delta}}$. Pour tous $x, y \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ on obtient donc

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq \int_{\gamma_i(\Lambda^0_{\gamma_i^{-1}})} \left| \frac{1}{|x-z|^{2\delta}} - \frac{1}{|y-z|^{2\delta}} \right| \sigma(dz) \\ &\leq 2^{\delta+1} \int_{\gamma_i(\Lambda^0_{\gamma_i^{-1}})} \frac{\big||x-z|^\delta - |y-z|^\delta\big|}{|x-z|^{2\delta}|y-z|^{2\delta}} \sigma(dz). \end{aligned}$$

On déduit du lemme IV.8 l'existence de $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$|h(x) - h(y)| \leq \frac{2^{\delta+1}}{\epsilon_0^{4\delta}} \int_{\gamma_i(\Lambda^0_{\gamma_i^{-1}})} \big||x-z|^\delta - |y-z|^\delta\big| \, \sigma(dz).$$

Si $\delta \leq 1$, on a alors $|h(x) - h(y)| \leq \dfrac{2^{\delta+1}}{\epsilon_0^{4\delta}} |x-y|^\delta$ et si $\delta > 1$ on obtient $|h(x) - h(y)| \leq \dfrac{\delta 4^\delta}{\epsilon_0^{4\delta}} |x-y|$. Ceci montre que $m(h)$ est fini. Par ailleurs, pour tout $x \in \Lambda^0$ on a $|h(x)| \leq \dfrac{C}{\epsilon_0^{2\delta}}$ et donc $h \in L_{k_0}$.

La deuxième assertion de la proposition découle de l'encadrement $\epsilon_0^{2\delta} \leq |x_- - x|^{2\delta} \leq 4^\delta$. □

Ce lemme va nous permettre de contrôler les poids p_{b^n}.

PROPOSITION VII.3. — *Pour tout $b^n \in \mathcal{B}^*$, la fonction p_{b^n} appartient à L_{k_0}. De plus, la série $\sum_{b^n \in \mathcal{B}^*} \|p_{b^n}\|$ est convergente.*

COROLLAIRE VII.4 (Hypothèse H1). — *L'opérateur P opère continûment sur $(L_{k_0}, \|.\|)$ et $P1_{\Lambda^0} = 1_{\Lambda^0}$.*

Démonstration de la proposition VII.3. — Les lemmes P, L et VII.2 entraînent l'existence d'une constante $K > 1$ telle que

1) $\forall x \in \Lambda^0 \quad \dfrac{1}{K} \leq h(x) \leq K,$

2) $\forall b^n \in \mathcal{B}^*, \forall y \in \Lambda^0_{b^n} \quad |(b^n)'(Ty)| \leq \dfrac{K}{n^2}.$

Fixons $i \geq 1$ et $b^n \in \mathcal{B}^*$ tels que $b^n \nabla \omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$; si $x \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ on a $|(b^n)'(x)| = |(b^n)'(Ty)|$ avec $y = b^n x$ si bien qu'en combinant les inégalités 1) et 2) on obtient $|p_{b^n}|_\infty \leq \dfrac{K^{2+\delta}}{n^{2\delta}}$. Ceci implique que $|p_{b^n}|_\infty$ est fini et que la série $\sum\limits_{b^n \in \mathcal{B}^*} |p_{b^n}|_\infty$ est convergente puisque $\delta > 1/2$. Par ailleurs, pour tous $x, y \in \Lambda^0_{\gamma_i}$, on a

$$\begin{aligned}|p_{b^n}(x) - p_{b^n}(y)| \leq & \frac{|h(b^n x) - h(b^n y)|}{h(x)} |(b^n)'(x)|^\delta \\ & + \left| \frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(y)} \right| h(b^n y) |(b^n)'(x)|^\delta + \frac{h(b^n y)}{h(y)} \left| |(b^n)'(x)|^\delta - |(b^n)'(y)|^\delta \right|.\end{aligned}$$

Les points $b^n(x)$ et $b^n(y)$ appartenant à un même ensemble $\Lambda^0_{\gamma_j}$ on a

$$\begin{aligned}|p_{b^n}(x) - p_{b^n}(y)| \leq & m(h) \frac{|b^n(x) - b^n(y)|^{\delta_0}}{h(x)} |(b^n)'(x)|^\delta \\ & + \frac{m(h)}{h(x)h(y)} |x-y|^{\delta_0} h(b^n y) |(b^n)'(x)|^\delta + \frac{h(b^n y)}{h(y)} \left| |(b^n)'(x)|^\delta - |(b^n)'(y)|^\delta \right|.\end{aligned}$$

On a $|b^n(x) - b^n(y)| = \sqrt{|(b^n)'(x)||(b^n)'(y)|}\,|x-y|$ et d'après les lemmes P et L il existe $K > 0$ tel que $\left| |(b^n)'(x)|^\delta - |(b^n)'(y)|^\delta \right| \leq \dfrac{K}{n^{2\delta_0}} |x-y|^{\delta_0}$; on montre ainsi l'existence de deux constantes strictement positives A et B telles que $|p_{b^n}(x) - p_{b^n}(y)| \leq \dfrac{Am(h) + B}{n^{2\delta_0}} |x-y|^{\delta_0}$ ce qui montre que $m(p_{b^n})$ est finie et que la série $\sum\limits_{b^n \in \mathcal{B}^*} m(p_{b^n})$ est convergente. □

VII.b. Hypothèse H2.

L'étude du spectre de P sur $(L_{k_0}, \|.\|)$ repose sur le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu dont nous donnons ici un énoncé dû à H. Hennion [11].

THÉORÈME (IONESCU-TULCEA et MARINESCU). — *Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach sur $\mathbb{C}$ et Q un opérateur linéaire continu sur $(E, \|.\|_E)$ de rayon spectral égal à 1. On suppose qu'il existe sur E une norme $|.|$ telle que*

i) *l'opérateur Q soit compact de $(E, \|.\|_E)$ dans $(E, |.|)$,*

ii) *il existe $0 < r < 1$ et $R > 0$ tels que Q satisfasse l'inégalité de Doeblin-Fortet $DF(r)$ suivante :*

$$\forall \varphi \in E \quad \|Q\varphi\|_E \leq r\|\varphi\|_E + R|\varphi|.$$

Sous ces hypothèses, Q admet un nombre fini de valeurs propres de module 1, les espaces caractéristiques correspondants sont égaux aux espaces propres et sont de dimension finie. De plus, le reste du spectre de Q sur $(E, \|.\|_E)$ est inclus dans un disque de rayon strictement inférieur à 1.

Montrons que l'opérateur P satisfait les hypothèses de ce théorème sur $(L_{k_0}, \|.\|)$. Puisque P opère continûment sur $(L_{k_0}, \|.\|)$ et que l'injection canonique de $(L_{k_0}, \|.\|)$ dans $(L_{k_0}, |.|_\infty)$ est compacte, l'opérateur P est compact de $(L_{k_0}, \|.\|)$ dans $(L_{k_0}, |.|_\infty)$. Rappelons que pour toute fonction $\varphi \in L_{k_0}$ on a $|P\varphi|_\infty \leq |\varphi|_\infty$. Par conséquent, si P satisfait l'inégalité de Doeblin-Fortet $DF(r)$ ses puissances sont bornées sur $(L_{k_0}, \|.\|)$ et son rayon spectral $\rho(P)$ sur cet espace est inférieur ou égal à 1; de l'égalité $P1_{\Lambda^0} = 1_{\Lambda^0}$, on déduit que $\rho(P) = 1$. Il nous reste donc à montrer le

LEMME VII.5. — *Il existe $0 < r < 1$, $R > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que*

$$\forall \varphi \in L_{k_0} \qquad \|P^N\varphi\| \leq r\|\varphi\| + R|\varphi|_\infty.$$

Démonstration. — Comme T est dilatante sur Λ^0 il existe $\beta > 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $x \in \Lambda^0$ on ait $|(T^N)'(x)| \geq \beta$. Fixons $i \geq 1$ et considérons des éléments $b_1^{n_1}, \cdots, b_N^{n_N}$ de $\mathcal{B}^*$ tels que la suite $b_1^{n_1}, \cdots, b_N^{n_N}\nabla\omega(\gamma_i)$ appartienne à $\Omega_{\mathcal{B}^*}$; pour tous $x, y \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ on a $T^N(b_1^{n_1} \cdots b_N^{n_N} x) = x$ et $T^N(b_1^{n_1} \cdots b_N^{n_N} y) = y$ d'où $|b_1^{n_1} \cdots b_N^{n_N} x - b_1^{n_1} \cdots b_N^{n_N} y| \leq \dfrac{1}{\beta}|x - y|$ $(*)$. Notons alors $p_{b_1^{n_1} \cdots b_N^{n_N}}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \Lambda^0_{\gamma_i} \quad p_{b_1^{n_1} \cdots b_N^{n_N}}(x) = p_{b_1^{n_1}}(b_2^{n_2} \cdots b_N^{n_N} x) p_{b_2^{n_2}}(b_3^{n_3} \cdots b_N^{n_N} x) \cdots p_{b_N^{n_N}}(x).$$

Pour toute fonction $\varphi \in L_{k_0}$ on a

$$\forall x \in \Lambda^0_{\gamma_i}\ P^N\varphi(x) = \sum_{\substack{b_1^{n_1}, \cdots, b_N^{n_N} \in \mathcal{B}^* \\ b_1^{n_1}, \cdots, b_N^{n_N} \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}}} \varphi(b_1^{n_1} \cdots b_N^{n_N} x) p_{b_1^{n_1} \cdots b_N^{n_N}}(x).$$

En particulier $\displaystyle\sum_{\substack{b_1^{n_1}, \cdots, b_N^{n_N} \in \mathcal{B}^* \\ b_1^{n_1}, \cdots, b_N^{n_N} \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}}} p_{b_1^{n_1} \cdots b_N^{n_N}}(x) = 1$ car $P^N 1 = 1$. Ainsi, pour tous $x, y \in \Lambda^0_{\gamma_i}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&|P^N\varphi(x) - P^N\varphi(y)| \\
&\leq \sum_{\substack{b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \in \mathcal{B}^* \\ b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}}} p_{b_1^{n_1}\dots b_N^{n_N}}(x) |\varphi(b_1^{n_1}\cdots b_N^{n_N}x) - \varphi(b_1^{n_1}\cdots b_N^{n_N}y)| \\
&\quad + |\varphi|_\infty \sum_{\substack{b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \in \mathcal{B}^* \\ b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}}} |p_{b_1^{n_1}\dots b_N^{n_N}}(x) - p_{b_1^{n_1}\dots b_N^{n_N}}(y)| \\
&\leq m(\varphi) \sum_{\substack{b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \in \mathcal{B}^* \\ b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}}} p_{b_1^{n_1}\dots b_N^{n_N}}(x) |b_1^{n_1}\cdots b_N^{n_N}x - b_1^{n_1}\cdots b_N^{n_N}y|^{\delta_0} \\
&\quad + |\varphi|_\infty \sum_{\substack{b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \in \mathcal{B}^* \\ b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}}} |p_{b_1^{n_1}\dots b_N^{n_N}}(x) - p_{b_1^{n_1}\dots b_N^{n_N}}(y)|.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $(*)$ on obtient

$$\sum_{\substack{b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \in \mathcal{B}^* \\ b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}}} p_{b_1^{n_1}\dots b_N^{n_N}}(x) |b_1^{n_1}\cdots b_N^{n_N}x - b_1^{n_1}\cdots b_N^{n_N}y|^{\delta_0} \leq \frac{1}{\beta^{\delta_0}}|x-y|^{\delta_0}.$$

Par ailleurs, d'après les lemmes P et L, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $i \geq 1$, pour tout $b^n \in \mathcal{B}^*$ vérifiant $b^n \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$ et tous $x, y \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ on ait $|b^n x - b^n y|^{\delta_0} \leq C|x-y|^{\delta_0}$; par conséquent

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \in \mathcal{B}^* \\ b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}}} |p_{b_1^{n_1}\dots b_N^{n_N}}(x) - p_{b_1^{n_1}\dots b_N^{n_N}}(y)| \\
&\qquad\qquad \leq \sum_{\substack{b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \in \mathcal{B}^* \\ b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N} \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}}} \sum_{r=1}^{N} M_{b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N}}(r, x, y)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&M_{b_1^{n_1},\dots,b_N^{n_N}}(r, x, y) \\
&= p_{b_1^{n_1}\dots b_{r-1}^{n_{r-1}}}(b_r^{n_r}\cdots b_N^{n_N}x) |p_{b_r^{n_r}}(b_{r+1}^{n_{r+1}}\cdots b_N^{n_N}x) - p_{b_r^{n_r}}(b_{r+1}^{n_{r+1}}\cdots b_N^{n_N}y)| \\
&\qquad \times p_{b_{r+1}^{n_{r+1}}\dots b_N^{n_N}}(y) \\
&\leq p_{b_1^{n_1}\dots b_{r-1}^{n_{r-1}}}(b_r^{n_r}\cdots b_N^{n_N}x) p_{b_{r+1}^{n_{r+1}}\dots b_N^{n_N}}(y) m(p_{b_r^{n_r}}) C^{N-r}|x-y|^{\delta_0}.
\end{aligned}$$

En prenant $C > 1$ on obtient donc

$$m(P^N\varphi) \leq \frac{1}{\beta^{\delta_0}} m(\varphi) + \frac{C^{N+1}}{C-1} \sum_{b^n \in \mathcal{B}^*} \|p_{b^n}\| |\varphi|_\infty.$$

L'inégalité $DF(r)$ du lemme VII.5 est donc bien satisfaite avec $r = \dfrac{1}{\beta^{\delta_0}}$ et $R = \dfrac{C^{N+1}}{C-1} \sum_{b^n \in \mathcal{B}^*} \|p_{b^n}\| + 1.$ □

Ainsi, d'après le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, l'opérateur P sur $(L_{k_0}, \|.\|)$ a un nombre fini de valeurs propres de module 1, les sous-espaces propres associés sont de dimension finie et le reste du spectre est inclus dans un disque de rayon strictement inférieur à 1.

LEMME VII.6. — *Soient $\varphi \in L_{k_0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $P\varphi = e^{i\theta}\varphi$.*

Si $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 \geq 5$, alors $e^{i\theta} = 1$ et φ est constante sur Λ^0.

Si $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 = 4$ (i.e. si $\mathcal{A} = \{\alpha_{-1}, \alpha_1, \alpha_{-2}, \alpha_2\}$ et $\mathcal{P}_0 = \emptyset$), alors deux cas se présentent :

1) $e^{i\theta} = 1$ et φ est constante sur Λ^0,

2) $e^{i\theta} = -1$ et $\varphi = C(1_{\Lambda_1^0} - 1_{\Lambda_2^0})$ où $C \in \mathbb{C}, \Lambda_1^0 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*} \Lambda^0_{\alpha_1^n}$ et $\Lambda_2^0 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*} \Lambda^0_{\alpha_2^n}$.

Démonstration. — Voir fin du paragraphe.

On déduit de ce lemme que si $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 \geq 5$, il existe sur $(L_{k_0}, \|.\|)$ un opérateur Q de rayon spectral strictement inférieur à 1 tel que $P = E_1 + Q$ avec $E_1 Q = QE1 = 0$ où E_1 désigne le projecteur (de rang 1) associé à la valeur propre 1. L'égalité $\nu P = \nu$ impose alors $E_1(\varphi) = \nu(\varphi) 1_{\Lambda 0}$ pour tout $\varphi \in L_{k_0}$; en particulier $(P^n\varphi)_{n\geq 1}$ converge dans $(L_{k_0}, \|.\|)$ vers $\nu(\varphi)$ ce qui entraîne que ν est l'unique mesure de probabilité P-invariante.

Si $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 = 4$, on note L_1 (resp. L_2) l'espace des restrictions à Λ_1^0 (resp. Λ_2^0) des fonctions de L_{k_0}. Dans ce cas, l'opérateur P^2 opère sur L_1 et se décompose en $P^2_{|L_1} = \nu_1 + Q_1$ où ν_1 est la restriction de ν à Λ_1^0 et Q_1 un opérateur de rayon spectral sur $(L_1, \|.\|)$ strictement inférieur à 1. De même, P^2 opère sur L_2 et admet la même décomposition spectrale. Nous avons donc le

COROLLAIRE VII.7 (Hypothèse H2). — *Si $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 \geq 5$, l'opérateur P vérifie l'hypothèse H2 sur L_{k_0}.*

Si $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 = 4$, l'opérateur P^2 opère sur L_1 et L_2 et vérifie l'hypothèse H2 sur chacun de ces espaces.

Il nous reste à démontrer le lemme VII.6.

Démonstration du lemme VII.6. — **Cas où** $\sharp\mathcal{A}\cup\mathcal{P}_0 \geq 5$. Soient $\varphi \in L_{k_0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $P\varphi = e^{i\theta}\varphi$. Les égalités $P\varphi = e^{i\theta}\varphi$ et $\nu P = \nu$ entraînent $P|\varphi|(x) = |\varphi(x)|$ $\nu(dx)p.s$; les fonctions φ et $P\varphi$ appartenant à L_{k_0} et le support de ν étant égal à Λ, cette égalité est en fait vérifiée pour tous les points x de Λ^0.

Posons $I = \inf\limits_{x\in\Lambda^0} |\varphi(x)|$; comme φ est continue sur Λ^0, il existe $i \geq 1$ et une suite convergente $(y_l)_{l\geq 1}$ de $\Lambda^0_{\gamma_i}$ telle que $\lim\limits_{l\to+\infty} |\varphi(y_l)| = I$. Pour tout $l \geq 1$, on a

$$(*) \qquad |\varphi(y_l)| = P|\varphi|(y_l) = \sum_{\substack{b^n\in\mathcal{B}^*\\ b^n\nabla\omega(\gamma_i)\in\Omega_{\mathcal{B}^*}}} p_{b^n}(y_l)|\varphi(b^n y_l)|.$$

Soit $b^n \in \mathcal{B}^*$ tel que $b^n\nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$. La suite $(b^n y_l)_{l\geq 1}$ appartient à un ensemble $\Lambda^0_{\gamma_s}$ et la fonction p_{b^n} est continue sur cet ensemble; par conséquent, la suite $(p_{b^n}(y_l))_{l\geq 1}$ converge et, de par l'expression de p_{b^n} et les propriétés de h, sa limite $\overline{p}_{b^n}$ est strictement positive. De même, la suite $(\varphi(b^n y_l))_{l\geq 1}$ converge et l'on note $\overline{\varphi}_{b^n}$ sa limite. Faisons tendre l vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$; la série $\sum\limits_{b^n\in\mathcal{B}^*} \|p_{b^n}\|$ étant convergente, on obtient

$$I = \sum_{\substack{b^n\in\mathcal{B}^*\\ b^n\nabla\omega(\gamma_i)\in\Omega_{\mathcal{B}^*}}} \overline{p}_{b^n}\overline{\varphi}_{b^n}.$$

Comme $\sum\limits_{\substack{b^n\in\mathcal{B}^*\\ b^n\nabla\omega(\gamma_i)\in\Omega_{\mathcal{B}^*}}} \overline{p}_{b^n} = 1$ et $\overline{\varphi}_{b^n} \geq I$, on obtient par un argument de convexité $\overline{\varphi}_{b^n} = I$ pour tout $b^n \in \mathcal{B}^*$ tel que $b^n\nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$. Considérons alors un élément γ de Γ tel que $\omega(\gamma)\nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$ et posons $\omega(\gamma) = (b_j^{n_j})_{1\leq j\leq s}$; en appliquant le raisonnement précédent aux suites $(b_s^{n_s}y_l)_{l\geq 1}, (b_{s-1}^{n_{s-1}}b_s^{n_s}y_l)_{l\geq 1}, \cdots$ et $(\gamma y_l)_{l\geq 1}$ on obtient $\lim\limits_{l\to+\infty} |\varphi(\gamma y_l)| = I$.

Notons maintenant $S = \sup\limits_{x\in\Lambda^0} |\varphi(x)|$ et considérons une suite $(z_l)_{l\geq 1}$ de $\Lambda^0_{\gamma_j}$ où $j \geq 1$ est fixé, telle que $\lim\limits_{l\to+\infty} |\varphi(z_l)| = S$. En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on montre que pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\omega(\gamma)\nabla\omega(\gamma_j) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$, on a $\lim\limits_{l\to+\infty} |\varphi(\gamma z_l)| = S$.

Nous allons maintenant montrer que $|\varphi|$ est de module constant sur Λ^0; pour cela, utilisons la propriété suivante dont la démonstration est donnée en fin de paragraphe.

PROPRIÉTÉ DE PROXIMALITÉ. — *Pour tous $i, j \geq 1$, il existe deux suites $(g_{ip})_{p\geq 1}$ et $(g_{jp})_{p\geq 1}$ de Γ telles que pour tout $p \geq 1$ on ait*

i) $\omega_{k_0}(g_{ip}) = \omega_{k_0}(g_{jp})$ *et* $|\omega(g_{ip})| = |\omega(g_{jp})|$ *ne dépend pas de* p.

ii) $\omega(g_{ip})\nabla\omega(\gamma_i)$ *et* $\omega(g_{jp})\nabla\omega(\gamma_j)$ *appartiennent à* $\Omega_{\mathcal{B}^*}$.

iii) *Il existe* $K > 0$ *tel que* $\forall x \in \Lambda^0_{\gamma_i}, \forall y \in \Lambda^0_{\gamma_j}$ $|g_{ip}(x) - g_{jp}(y)| \leq \frac{K}{p^2}$.

On déduit des propriétés i) et ii) que pour tout $p \geq 1$ les ensembles $g_{ip}(\Lambda^0_{\gamma_i})$ et $g_{jp}(\Lambda^0_{\gamma_j})$ sont inclus dans un même ensemble $\Lambda^0_{\gamma_l}$ où $l = l(p)$. On obtient alors

$$||\varphi(g_{ip}y_l)| - |\varphi(g_{jp}z_l)|| \leq m(\varphi)|g_{ip}(y_l) - g_{jp}(z_l)|^{\delta_0} \leq K\frac{m(\varphi)}{p^{2\delta_0}};$$

par ailleurs, d'après ii) et iii) on a $\lim_{l\to+\infty} |\varphi(g_{ip}y_l)| = I$, $\lim_{l\to+\infty} |\varphi(g_{jp}z_l)| = S$ et $|g_{ip}(y_l) - g_{jp}(z_l)| \leq \frac{K}{p^{2\delta_0}}$. En faisant tendre l puis p vers $+\infty$ dans l'inégalité

$$|I - S| \leq |I - |\varphi(g_{ip}y_l)|| + |S - |\varphi(g_{jp}z_l)|| + ||\varphi(g_{ip}y_l)| - |\varphi(g_{jp}z_l)||,$$

on obtient $I = S$, ce qui prouve que $|\varphi|$ est constante sur Λ^0.

Montrons à présent que φ est constante sur Λ^0. En supposant $\varphi \not\equiv 0$, l'égalité $P\varphi = e^{i\theta}\varphi$ nous donne

$$\forall x \in \Lambda^0_{\gamma_i} \quad e^{i\theta} = \sum_{\substack{b^n \in \mathcal{B}^* \\ b^n\nabla\omega(\gamma_i)\in\Omega_{\mathcal{B}^*}}} p_{b^n}(x)\frac{\varphi(b^n x)}{\varphi(x)}.$$

Comme $\left|\frac{\varphi(b^n x)}{\varphi(x)}\right| = 1$ et $\sum_{\substack{b^n \in \mathcal{B}^* \\ b^n\nabla\omega(\gamma_i)\in\Omega_{\mathcal{B}^*}}} p_{b^n}(x) = 1$, on obtient par un argument de convexité $\varphi(b^n x) = e^{i\theta}\varphi(x)$ pour tout $b^n \in \mathcal{B}^*$ tel que $b^n\nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$; en réitérant cet argument, on montre que pour tout $\gamma \in \Gamma$ tel que $\omega(\gamma)\nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$ et $|\omega(\gamma)| = s$ on a $\varphi(x) = e^{is\theta}\varphi(\gamma x)$.

Soient alors deux points x et y de Λ^0. Il existe i et j tels que $x \in \Lambda^0_{\gamma_i}$ et $y \in \Lambda^0_{\gamma_j}$; considérons les suites $(g_{ip})_{p\geq1}$ et $(g_{jp})_{p\geq1}$ données par la propriété de proximalité. On a d'une part $\varphi(g_{ip}x) = e^{is\theta}\varphi(x)$ et $\varphi(g_{jp}y) = e^{is\theta}\varphi(y)$ avec $s = |\omega(g_{ip})| = |\omega(g_{jp})|$ et d'autre part $|\varphi(g_{ip}x) - \varphi(g_{jp}y)| \leq m(\varphi)|g_{ip}(x) - g_{jp}(y)|$. En faisant tendre p vers $+\infty$, on montre alors que φ est constante sur Λ^0.

Considérons à présent le cas où $\mathcal{A} = \{\alpha_1^{\pm1}, \alpha_2^{\pm2}\}$ et $\mathcal{P} = \emptyset$. On a alors $\omega_{\mathcal{A}^*}(x) = \omega_{\mathcal{B}^*}(x)$. Considérons les ensembles Λ^0_1 et Λ^0_2 introduits dans le lemme VII.6; on a $P(1_{\Lambda^0_1}) = 1_{\Lambda^0_2}$ et $P(1_{\Lambda^0_2}) = 1_{\Lambda^0_1}$. De plus, si $\varphi \in L_{k_0}$ et si φ_1 est sa restriction à Λ^0_1, on a

$$\forall x \in \Lambda^0_1 \quad P^2\varphi_1(x) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}^*} p_{\alpha_2^n}(x)p_{\alpha_1^m}(\alpha_2^n x)\varphi(\alpha_1^m\alpha_2^n x).$$

Soit $\varphi \in L_{k_0}$ telle que $P\varphi = e^{i\theta}\varphi$; on a donc $P^2\varphi_1 = e^{2i\theta}\varphi_1$. En appliquant le raisonnement précédent à la fonction φ_1 et en remplaçant la suite $(g_{ip})_{p\geq 1}$ par $(g_p)_{p\geq 1}$ avec $g_p = \alpha_1^p(\alpha_2^2\alpha_1^2)^{k_0}\alpha_2^2$, on obtient $\varphi_1 = C_1 1_{\Lambda_1^0}$ où C_1 est une constante. De même, si φ_2 désigne la restriction de φ à Λ_2^0, on obtient $\varphi_2 = C_2 1_{\Lambda_2^0}$ où C_2 est une constante. L'égalité $P\varphi = e^{i\theta}\varphi$ impose alors $C_1 = C_2$ et $e^{i\theta} = 1$ ou $C_1 = -C_2$ et $e^{i\theta} = -1$. □

Démonstration de la propriété de proximalité. — Notons respectivement a_i et a_j le premier terme du $\mathcal{A}$-développement de γ_i et γ_j. Si $a_i \in \{a_j^{\pm 1}\}$ ou si $\sharp\mathcal{A} \geq 5$, il existe $a \in \mathcal{A} - \{a_i^{\pm 1}, a_j^{\pm 1}\}$ et on pose $g_{ip} = g_{jp} = a^p(a_i^2 a^2)^{k_0}$. Les propriétés i) et ii) résultent de la construction du $\mathcal{B}^*$-développement de g_{ip}, quant à la propriété iii) elle provient des lemmes L et P.

Sinon $\mathcal{A} = \{a_i^{\pm 1}, a_j^{\pm}\}$ et comme $\sharp\mathcal{A} \cup \mathcal{P}_0 \geq 5$, il existe $\pi \in \mathcal{P}_0$. Posons $\pi = \alpha_1 \cdots \alpha_l$ avec $\alpha_s \in \mathcal{A}$ et $\alpha_1 \neq \alpha_l^{\pm 1}$. Quitte à changer π en π^{-1}, on peut supposer que $\alpha_1 \in \{a_i^{\pm 1}\}$ et $\alpha_l \in \{a_j^{\pm 1}\}$. On pose alors $g_{ip} = \pi^p(a_i^2 a_j^2)^{k_0+1}$ et $g_{jp} = \pi^p(a_i^2 a_j^2)^{k_0}\pi a_i^2$; pour les mêmes raisons que précédemment, les propriétés i), ii) et iii) sont vérifiées. □

VII.c. Hypothèse H3.

NOTATION. — *Soit $b^n \in \mathcal{B}^*$; on note f_{b^n} la restriction de $f \circ b^n$ à l'ensemble $T(\Lambda_{b^n}^0)$.*

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur P_λ est défini par $\forall x \in \Lambda^0 \;\; P_\lambda\varphi(x) = \sum_{b^n \in \mathcal{B}^*} p_{b^n}(x) e^{i\lambda f(b^n x)}\varphi(b^n x)$ pour toute fonction φ borélienne bornée de Λ^0 dans $\mathbb{C}$. L'étude de P_λ nécessite un contrôle très précis des fonctions f_{b^n}. Nous avons le

LEMME VII.8. — *Il existe $K > 0$ tel que pour tout $b^n \in \mathcal{B}^*$ on ait $m(f_{b^n}) \leq K$ avec de plus*

$|f_{b^n}|_\infty \leq K \operatorname{Log} n$ *lorsque b est parabolique,*

$|f_{b^n}|_\infty \leq Kn$ *lorsque b est loxodromique.*

Démonstration. — En utilisant les lemmes P et L, on montre qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $b^n \in \mathcal{B}^*$ les inégalités suivantes soient vérifiées :

– si b est parabolique alors $\sup\limits_{x\in\Lambda^0_{b^n}} |f(x)| \leq K \operatorname{Log} n$,

– si b est loxodromique alors $\sup\limits_{x\in\Lambda^0_{b^n}} |f(x)| \leq K\, n$.

Afin de contrôler $m(f_{b^n})$, on rappelle que, d'après le lemme V.2, il existe $A > 0$ tel que, pour tout $i \geq 1$, tout $b^n \in \mathcal{B}^*$ satisfaisant $b^n \nabla\omega(\gamma_i) \in \Omega_{\mathcal{B}^*}$ et pour tous $x, y \in \Lambda^0_{\gamma_i}$, on ait

$$|f_{b^n}(x) - f_{b^n}(y)| = |f(b^n x) - f(b^n y)| \leq A|x-y|$$

(l'hypothèse $k_0 \geq N_0$ est nécessaire ici pour pouvoir appliquer le lemme V.2). On en déduit $m(f_{b^n}) \leq 2A$ ce qui achève la démonstration du lemme. □

Nous avons alors la

PROPOSITION VII.9 (Hypothèse H3). — *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur P_λ opère sur L_{k_0}; de plus, pour $\lambda \neq 0$, le rayon spectral sur L_{k_0} de P_λ est strictement inférieur à* 1.

Démonstration. — Soit λ un réel fixé; pour tout $b^n \in \mathcal{B}^*$, on a

$$\|e^{i\lambda f_{b^n}}\| \leq |\lambda| m(f_{b^n}) + 1$$

et donc $e^{i\lambda f_{b^n}} \in L_{k_0}$ d'après le lemme VII.8. Comme pour toutes fonctions φ_1 et φ_2 de L_{k_0} on a $\|\varphi_1\varphi_2\| \leq \|\varphi_1\|\ \|\varphi_2\|$, on obtient

$$\|P_\lambda \varphi\| \leq \sum_{b^n \in \mathcal{B}^*} \|p_{b^n}\|\ \|e^{i\lambda f_{b^n}}\|\ \|\varphi\|.$$

Cette dernière série est convergente d'après la proposition VII.3 et le lemme VII.8; par conséquent P_λ opère sur L_{k_0}.

Pour contrôler le spectre de P_λ, nous allons tout d'abord montrer que P_λ vérifie les hypothèses du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu sur $(L_{k_0}, \|.\|)$; pour ce faire, on reprend la démonstration du lemme VII.5 en remplaçant p_{b^n} par $p_{b^n} e^{i\lambda f_{b^n}}$ et l'on montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $0 < r < 1$ et deux constantes A, B positives telles que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute fonction $\varphi \in L_{k_0}$ on ait l'inégalité $DF(r)$

$$\|P_\lambda^N \varphi\| \leq r\|\varphi\| + (A|\lambda| + B)|\varphi|_\infty.$$

En itérant cette inégalité, on voit que les puissances de P_λ sont bornées sur L_{k_0}; ainsi, son rayon spectral $\rho(P_\lambda)$ sur L_{k_0} est inférieur ou égal à 1. D'après le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu, si $\rho(P_\lambda) = 1$ alors P_λ possède nécessairement une valeur propre de module 1, ce qui est absurde d'après le lemme suivant.

LEMME VII.10. — *Pour $\lambda \neq 0$, l'opérateur P_λ sur L_{k_0} n'admet pas de valeur propre de module 1.*

Démonstration. — L'égalité $P_\lambda \varphi = e^{i\theta}\varphi$ donne en passant aux modules $P|\varphi| = |\varphi|$; la fonction $|\varphi|$ est donc une fonction propre de P pour la valeur propre 1 et, comme elle est positive, elle est constante sur Λ^0 d'après le lemme VII.8. Supposons que φ ne soit pas nulle sur Λ^0; par convexité, pour tout point $x \in \Lambda^0$ et tout $b^n \in \mathcal{B}^*$ tel que $b^n \nabla\omega(x) \in \Sigma_{\mathcal{B}^*}$, on a

$$e^{i\theta}\varphi(x) = e^{i\lambda f(b^n x)}\varphi(b^n x)$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{i\lambda f(b^n x)} = e^{i\theta}\dfrac{\varphi(x)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(b^n x)}$ avec $x_b = \lim\limits_{n\to+\infty} b^n x$. Comme le groupe Γ n'est pas purement loxodromique, on peut choisir $x \in \Lambda^0$ et $b \in \mathcal{B}$ tels que la transformation b soit parabolique; on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b^n x) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b^{n+1}x) - f(b^n x) = 0$. Par conséquent, pour tout réel $A > 0$ il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} f(b^{n_{k+1}}x) - f(b^{n_k}x) = A$. On a alors

$$\lim_{k\to+\infty} e^{i\lambda f(b^{n_k}x) - i\lambda f(b^{n_{k+1}}x)} = e^{i\lambda A} = 1.$$

Le réel A étant quelconque, on obtient finalement $\lambda = 0$ d'où une contradiction. □

VII.d. Hypothèses H4 et H5.

PROPOSITION VII.11 (Hypothèses H4 et H5). — *La fonction f satisfait les propriétés suivantes :*

1) $\sup\limits_{x\in\Lambda^0} P(f^3)(x) < +\infty$.

2) $0 < \nu(f) < +\infty$.

De plus, la fonction $\lambda \mapsto P_\lambda$ est de classe C^3 de $\mathbb{R}$ dans l'espace $(\mathcal{L}(L_{k_0}), \|.\|_{\mathcal{L}(L_{k_0})})$ des applications linéaires continues $(L_{k_0}, \|.\|)$ muni de la norme usuelle.

Démonstration. — En utilisant les lemmes P, L et VII.2 on montre qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $b^n \in \mathcal{B}^*$ les inégalités suivantes soient vérifiées :

$|p_{b^n}|_\infty \leq \dfrac{K}{n^{2\delta}}$ et $\sup_{x\in\Lambda^0_{b^n}} |f(x)| \leq K \operatorname{Log} n$ lorsque b est parabolique.

$|p_{b^n}|_\infty \leq K\rho^n$ avec $1 < \rho < 1$ et $\sup_{x\in\Lambda^0_{b^n}} |f(x)| \leq K\, n$ lorsque b est loxodromique.

Pour tout $l \geq 1$, les séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(\operatorname{Log} n)^l}{n^{2\delta}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n^l \rho^n$ sont convergentes car $\delta > 1/2$; la fonction $P(f^l)$ est donc bornée sur Λ^0. Comme $\nu P = \nu$ et Pf est bornée, on a $\nu(f) < +\infty$; le fait que $\nu(f) > 0$ provient du caractère dilatant de T.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P_{\lambda_0+t}\varphi = P\Big(\sum_{l=0}^{+\infty} \dfrac{(it)^l}{l!}\; e^{i\lambda_0 f} f^l \varphi\Big)$. Supposons que pour $|t|$ assez petit, la série $\sum_{l=0}^{+\infty} \dfrac{(it)^l}{l!}\; P(e^{i\lambda_0 f} f^l)$ soit normalement convergente dans $(L_{k_0}, \|.\|)$; pour toute fonction $\varphi \in L_{k_0}$ on a $\|P_{\lambda_0+t}(\varphi) - \sum_{l=0}^{N} \dfrac{(it)^l}{l!} P(e^{i\lambda_0 f} f^l \varphi)\| \leq \sum_{l=N+1}^{+\infty} \dfrac{|t|^l}{l!} \|P(e^{i\lambda_0 f} f^l)\|\, \|\varphi\|$ avec $\lim_{N\to+\infty} \sum_{l=N+1}^{+\infty} \dfrac{|t|^l}{l!} \|P(e^{i\lambda_0 f} f^l)\| = 0$. Posons alors $\forall \varphi \in L_{k_0}$ $S_N(\lambda_0, t)(\varphi) = \sum_{l=0}^{N} \dfrac{(it)^l}{l!} P(e^{i\lambda_0 f} f^l \varphi)$; l'inégalité précédente prouve que la suite d'opérateurs $(S_N(\lambda_0, t))_{N\geq 1}$ converge vers P_{λ_0+t} dans $(\mathcal{L}(L_{k_0}), \|.\|_{\mathcal{L}(L_{k_0})})$. La fonction $\lambda \mapsto P_\lambda$ est donc développable en série entière au voisinage de λ_0 et l'on a

$$\forall l \geq 1,\ \forall \varphi \in L_{k_0} \quad \frac{d^l P_\lambda}{d\lambda^l}_{|\lambda=\lambda_0}(\varphi) = i^l P(e^{i\lambda_0 f}\ f^l\ \varphi).$$

Il nous suffit donc de montrer que la série $\sum_{l=0}^{+\infty} \dfrac{(it)^l}{l!} P(e^{i\lambda_0 f} f^l)$ est normalement convergente dans $(L_{k_0}, \|.\|)$. D'après la proposition VII.3 et le lemme VII.8 il existe $C > 0$ tel que pour tout $b^n \in \mathcal{B}^*$ et tout entier $l \geq 1$ on ait :

$\|p_{b^n} e^{i\lambda f_{b^n}} f^l\| \leq C(|\lambda| + 1)\, \dfrac{(\operatorname{Log} n)^l}{n^{2\delta}}$ lorsque b est parabolique.

$\|p_{b^n} e^{i\lambda f_{b^n}} f^l\| \leq C(|\lambda| + 1)\, n^l \rho^n$ avec $0 < \rho < 1$ lorsque b est loxodromique.

Notons que la somme $\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|t|^l}{l!}\, \dfrac{(\operatorname{Log} n)^l}{n^{2\delta}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^{|t|}}{n^{2\delta}}$ est finie si $|t| <$

$2\delta - 1$; de même, la somme $\sum\limits_{l=0}^{+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{|t|^l}{l!} n^l \rho^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{n|t|} \rho^n$ est finie si $e^{|t|} < \frac{1}{\rho}$. Par conséquent, pour $|t|$ assez petit, la série $\sum\limits_{l=0}^{+\infty} \frac{|t|^l}{l!} \| P(e^{i\lambda_0 f} f^l) \|$ converge. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AHLFORS, Möbius transformations in several dimensions, School of Mathematics, University of Minnesota (1981).

[2] A.F. BEARDON, The exponent of convergence of Poincaré series, Proc. London Math. Soc., (3) 18 (1968), 461–483.

[3] R. BOWEN, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics, 470.

[4] A. BROISE, F. DAL'BO & M. PEIGNÉ, Méthode des opérateurs de transfert : transformations dilatantes de l'intervalle et géodésiques fermées, à paraître à Astérisque.

[5] A. ESKIN & C. MC MULLEN, Mixing, counting and equidistribution in Lie groups, Duke Math. Journal, 71, n° 1 (1993).

[6] L. GUILLOPÉ, Fonction Zeta de Selberg et surfaces de géométrie finie, Adv. Studies in Pure Math., 21 (1992), 33–70.

[7] Y. GUIVARC'H & J. HARDY, Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov, Ann. I.H.P., n° 1 (1988), 73–98.

[8] Y. GUIVARC'H & Y. LE JAN, Asymptotic winding of the geodesic flow on modular surfaces and continued fractions, Ann. Sc. E.N.S., 4ème série, t. 26 (1993), 23–50.

[9] P. dE LA HARPE, Free groups in linear groups, L'Enseignement Mathématique, 29 (1983), 129–144.

[10] D. HEIJHAL, The selberg trace formula and the Riemann zeta function, Duke Math. J., 43 (1976), 441–482.

[11] H. HENNION, Sur un théorème spectral et son application aux noyaux Lipschitziens, Proceeding of the A.M.S., n° 118 (1993), 627–634.

[12] S.P. LALLEY, Renewal theorems in symbolic dynamics with applications to geodesic flows, non euclidean tesselations and their fractal limits, Acta. Math., 163 (1989), 1–55.

[13] G.A. MARGULIS, Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature, Funct. Anal. Appl., 3 (1969), 335–336.

[14] P.J. NICHOLLS, Ergodic theory of discrete groups, Cambridge University Press, 1989.

[15] W. PARRY & M. POLLICOTT, An analogue of prime number theorem for closed orbits of axiom A flows, Ann. of Prob., 118 (1983), 573–591.

[16] S.J. PATTERSON, The limit set of a Fuchsian group, Acta. Math., 136 (1976), 241–273.

[17] J.G. RATCLIFFE, Foundations of hyperbolic manifolds, Springer-Verlag, 1994.

[18] D. RUELLE, Thermodynamic formalism, Addison Wesley, Reading, 1978.

[19] D. SULLIVAN, The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions, Publ. Math. IHES, vol. 50 (1979), 171–202.

Manuscrit reçu le 6 novembre 1995,
accepté le 19 février 1996.

F. DAL'BO & M. PEIGNÉ,
Université de Rennes I
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex (France).