

ALAIN KRAUS

Sur les modules des points de 7-torsion d'une famille de courbes elliptiques

Annales de l'institut Fourier, tome 46, n° 4 (1996), p. 899-907

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_4_899_0

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES MODULES DES POINTS DE 7-TORSION D'UNE FAMILLE DE COURBES ELLIPTIQUES

par Alain KRAUS

Introduction.

Cet article concerne la question suivante posée par B. Mazur dans [7], p. 133 :

Soit $\overline{\mathbf{Q}}$ une clôture algébrique de \mathbf{Q} . Existe-t-il un entier $n \geq 7$, deux courbes elliptiques E et E' définies sur \mathbf{Q} , non isogènes sur \mathbf{Q} , tels que les groupes des points de n -torsion de E et E' soient isomorphes comme $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ -modules et symplectiquement, i.e. de façon compatible aux accouplements de Weil?

Comme le suggère B. Mazur, cette question peut être reformulée en termes d'existence de points rationnels sur \mathbf{Q} , de tordues galoisiennes de la courbe modulaire $Y(n)$, qui est de genre ≥ 3 pour $n \geq 7$, et qui n'a donc qu'un nombre fini de points rationnels (cf. loc. cit.).

Avec J. Oesterlé, on explicite dans [6] des exemples de couples de courbes elliptiques sur \mathbf{Q} répondant positivement à cette question si $n = 7$. Une étude de surfaces modulaires liées à la courbe $Y(n)$, a récemment été faite par E. Kani et W. Schanz ([4]), permettant de prouver l'existence d'une infinité de tels couples pour $n = 7$. Par ailleurs, B. Mazur a déterminé des exemples pour $n = 11$ et $n = 13$ ([8]). Il semble que G. Frey en a aussi trouvé pour $n = 11, 13$ et 17 . Dans un travail récent avec E. Halberstadt, nous en avons explicité pour $n = 10$ et 22 .

Des exemples de couples de courbes elliptiques sur \mathbf{Q} , non \mathbf{Q} -isogènes, dont les modules des points de n -torsion soient isomorphes, ont aussi été trouvés pour $n = 8$ (cf. [2], preprint, p. 22, dans lequel il y a aussi des exemples pour $n = 7$). N. Elkies a récemment démontré l'existence d'une infinité de tels couples pour $n = 7$. Par ailleurs, il se trouve dans [3] un exemple pour $n = 14$.

Dans ce travail, on se préoccupe toujours du cas où $n = 7$. Étant donné une courbe elliptique E définie sur \mathbf{Q} , on notera E_7 le sous-groupe des points de 7-torsion de $E(\overline{\mathbf{Q}})$; E_7 est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. L'action du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur E_7 , définit une représentation continue

$$\varphi_E : \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \longrightarrow \text{Aut}(E_7).$$

Le déterminant de φ_E est le caractère cyclotomique χ , donnant l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur le sous-groupe des racines 7-ièmes de l'unité de $\overline{\mathbf{Q}}$ (cf. [11], 1.11).

On s'intéresse ici aux courbes elliptiques E définies sur \mathbf{Q} , dont la représentation φ_E possède un quotient isomorphe à $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. Un tel homomorphisme est représentable matriciellement sous la forme $\begin{pmatrix} \chi & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (cf. loc. cit.). Les courbes elliptiques E ayant cette propriété sont décrites par une famille infinie à un paramètre de courbes elliptiques $E(t)$; $E(t)$ possède un modèle de Weierstrass à coefficients dans $\mathbf{Z}[t]$ (cf. §1). En décrivant le corps des points de 7-torsion de $E(t)$ (§2), on explicite une infinité de triplets de courbes elliptiques sur \mathbf{Q} , qui répondent positivement à la question posée par B. Mazur. Plus précisément, le résultat que l'on a en vue est le suivant :

Soit n un entier relatif de valeur absolue ≥ 3 . Posons $a_n = 1/(1+n+n^2)$. Alors, les courbes elliptiques sur \mathbf{Q} , $E(a_n)$, $E(n^2a_n)$ et $E((n+1)^2a_n)$ sont mutuellement non isogènes sur \mathbf{Q} . Les représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ définies par les groupes des points de 7-torsion de $E(a_n)$, $E(n^2a_n)$ et $E((n+1)^2a_n)$ sont symplectiquement isomorphes.

J'ai bénéficié au cours de ce travail de conversations avec J. Oesterlé et P. Satgé que je remercie ici.

1. La courbe elliptique $E(t)$.

Considérons un corps K de caractéristique 0. Soient t un élément de K de $W(t)$ la cubique affine d'équation :

$$W(t) : y^2 + a_1(t)xy + a_3(t)y = x^3 + a_2(t)x^2 + a_4(t)x + a_6(t),$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1(t) &= 1 + t - t^2, & a_2(t) &= a_3(t) = t^2 - t^3, \\ a_4(t) &= 5t(1 - t)(t^2 - t + 1)(t^3 + 2t^2 - 5t + 1), \\ a_6(t) &= t(1 - t)(t^9 + 9t^8 - 37t^7 + 70t^6 - 132t^5 + 211t^4 - 182t^3 \\ &\quad + 76t^2 - 18t + 1). \end{aligned}$$

Les invariants standard $c_4(t)$ et $\Delta(t)$ associés à $W(t)$ sont (cf. [13], 1) :

$$\begin{aligned} c_4(t) &= (t^2 - t + 1)(t^6 + 229t^5 + 270t^4 - 1695t^3 + 1430t^2 - 235t + 1), \\ \Delta(t) &= t(t - 1)(t^3 - 8t^2 + 5t + 1)^7. \end{aligned}$$

Si $\Delta(t)$ n'est pas nul, $W(t)$ représente une courbe elliptique $E(t)$ définie sur K .

Soit \overline{K} une clôture algébrique de K . On note μ_7 le sous-groupe des racines 7-ièmes de l'unité de \overline{K} .

LEMME 1. — Soit t un élément de K tel que $\Delta(t)$ ne soit pas nul. Il existe un homomorphisme injectif $\mu_7 \rightarrow E(t)_7$ qui est compatible aux actions de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$.

Démonstration. — Considérons la cubique affine d'équation :

$$y^2 + (1 + t - t^2)XY + (t^2 - t^3)Y = X^3 + (t^2 - t^3)X^2.$$

Son discriminant est $t^7(t - 1)^7(t^3 - 8t^2 + 5t + 1)$ (cf. [13], 1); elle représente ainsi une courbe elliptique E_t sur K . Le point $(0, 0)$ est d'ordre 7 (cf. par exemple [12], p. 354).

En utilisant l'algorithme de J. Vélou décrit dans [14], on constate que $E(t)$ est liée à E_t par une isogénie de degré 7. Par ailleurs, le déterminant de la représentation donnant l'action de $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ sur le groupe des points de 7-torsion de E_t , est le caractère cyclotomique χ (cf. [11], 1.11). On déduit de là qu'il existe un sous-groupe d'ordre 7 de $E(t)(\overline{K})$ sur lequel $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ opère via χ . D'où le lemme.

Remarque. — Inversement, si E une courbe elliptique définie sur K possédant une injection galoisienne de μ_7 dans E_7 , il existe t dans K (non unique) tel que $\Delta(t)$ ne soit pas nul, et que E soit isomorphe sur K à $E(t)$; nous n'aurons pas besoin de cette remarque.

2. Le corps des points de 7-torsion de $E(t)$.

On considère toujours dans ce paragraphe un corps K de caractéristique 0. Soit \bar{K} une clôture algébrique de K . Étant donné un élément a de K , on désigne par $a^{1/7}$ une racine 7-ième de a dans \bar{K} . Soit t un élément de K tel que $\Delta(t)$ soit non nul. L'objet du §2 est de décrire l'extension $K(E(t)_7)$ de K obtenue par adjonction des coordonnées des points de $E(t)_7$. On a le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit t un élément de K . Supposons que $t(t-1)(t^3 - 8t^2 + 5t + 1)$ ne soit pas nul. Alors, on a l'égalité*

$$K(E(t)_7) = K(\mu_7, (t(t-1)^2)^{1/7}).$$

Démonstration. — Considérons le corps $L = \mathbf{Q}(T)$ des fractions rationnelles à coefficients dans \mathbf{Q} en l'indéterminée T . La cubique $W(T)$ représente la courbe elliptique $E(T)$ sur L (cf. §1). D'après le lemme 1, $E(T)_7$ possède un sous-Gal(\bar{L}/L)-module isomorphe à μ_7 . Par ailleurs, $L(\mu_7)$ est contenu dans $L(E(T)_7)$, et l'action par conjugaison de Gal($L(\mu_7)/L$) sur Gal($L(E(T)_7)/L(\mu_7)$) est donnée par le caractère dominant l'action de Gal(\bar{L}/L) sur μ_7 . En utilisant la théorie de Kummer (cf. [1], p. 90), on déduit alors que $L(E(T)_7)$ peut s'écrire sous la forme

$$L(E(T)_7) = L(\mu_7, d(T)^{1/7}),$$

où $d(T)$ est un élément de $\mathbf{Z}[T]$ sans puissance 7-ième. Par ailleurs, la courbe elliptique $E(T)$ a mauvaise réduction de type multiplicatif en les places T , $T-1$ et $T^3 - 8T^2 + 5T + 1$, et bonne réduction en dehors de ces places (cf. §1). D'après le critère de Néron-Ogg-Shafarevich (cf. par exemple [12], p. 184, th. 7.1), il existe donc des entiers a , b et c , bien définis modulo 7, et un nombre rationnel α , tels que l'on ait

$$d(T) = \alpha T^a (T-1)^b (T^3 - 8T^2 + 5T + 1)^c.$$

Posons $g(T) = T^3 - 8T^2 + 5T + 1$. L'exposant de $g(T)$ dans $\Delta(T)$ est 7. D'après la théorie de Tate, l'extension $L(E(T)_7)/L$ est donc non ramifiée en la place $g(T)$ (cf. loc. cit., p. 355, §14), et l'on peut supposer que l'on a $c = 0$. En utilisant un argument de réduction, on déduit de là l'égalité

$$K(E(t)_7) = K(\mu_7, (\alpha t^a (t-1)^b)^{1/7}).$$

Un argument de spécialisation, permet alors de vérifier que l'on peut prendre $\alpha = 1$, $a = 1$ et $b = 2$. D'où le théorème 1.

3. Le résultat principal.

Soit n un entier relatif dont la valeur absolue est ≥ 3 . On pose

$$a_n = \frac{1}{1 + n + n^2}.$$

Les discriminants des cubiques $W(a_n)$, $W(n^2 a_n)$ et $W((n+1)^2 a_n)$ ne sont pas nuls (cf. §1). Ces cubiques représentent donc respectivement les courbes elliptiques $E(a_n)$, $E(n^2 a_n)$ et $E((n+1)^2 a_n)$ définies sur \mathbf{Q} .

Nous allons maintenant démontrer le résultat annoncé dans l'introduction :

THÉORÈME 2. — *Les courbes elliptiques $E(a_n)$, $E(n^2 a_n)$ et $E((n+1)^2 a_n)$ sont mutuellement non isogènes sur \mathbf{Q} . Les représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ définies par les groupes des points de 7-torsion de $E(a_n)$, $E(n^2 a_n)$ et $E((n+1)^2 a_n)$ sont symplectiquement isomorphes.*

3.1. Lemme préliminaire.

Considérons deux courbes elliptiques E et E' définies sur \mathbf{Q} . Soient Δ et Δ' les discriminants minimaux de E et E' respectivement. Étant donné un nombre premier p , on note $v_p(\Delta)$ (resp. $v_p(\Delta')$) l'exposant de p dans Δ (resp. dans Δ'). Notons φ et φ' les représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ dans E_7 et E'_7 . Prouvons alors le lemme suivant :

LEMME 2. — *Supposons les conditions suivantes réalisées :*

- (i) *les représentations φ et φ' sont isomorphes;*
- (ii) *le groupe E_7 possède un sous-module isomorphe à μ_7 ;*
- (iii) *il existe un nombre premier p distinct de 7 tel que 7 ne divise pas $v_p(\Delta)$.*

Alors, 7 ne divise pas $v_p(\Delta')$, et si les réductions modulo 7 de $v_p(\Delta)$ et $v_p(\Delta')$ diffèrent multiplicativement par un carré dans $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$, les représentations φ et φ' sont symplectiquement isomorphes.

Démonstration. — Il résulte des conditions (ii) et (iii) que E a en p réduction de type multiplicatif (cf. par exemple [5], p. 361, lemme 2). Par ailleurs, la condition (i) et le fait que 7 ne divise pas $v_p(\Delta)$, impliquent que E' a aussi en p réduction de type multiplicatif. La proposition 2 de [6] entraîne alors le résultat.

3.2. La courbe elliptique $E(a/b)$.

Soit t un élément de \mathbf{Q} distinct de 0 et 1; $\Delta(t)$ n'est pas nul. On se propose ici d'expliciter un modèle entier de la courbe elliptique $E(t)$.

Posons pour cela $t = a/b$, où a et b sont deux entiers premiers entre eux. Rappelons que x et y désignent les fonctions coordonnées de Weierstrass de $E(t)$ dans le modèle $W(t)$. En effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} X = b^4x \\ Y = b^6y, \end{cases}$$

on constate que la courbe elliptique $E(a/b)$ admet un modèle de Weierstrass $W(a, b)$ de la forme :

$$W(a, b) : Y^2 + A_1XY + A_3Y = X^3 + A_2X^2 + A_4X + A_6,$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= b^2 + ab - a^2, & A_2 &= a^2b(b - a), & A_3 &= a^2b^3(b - a), \\ A_4 &= 5ab(b - a)(a^2 - ab + b^2)(a^3 + 2a^2b - 5ab^2 + b^3), \\ A_6 &= ab(b - a)(a^9 + 9a^8b - 37a^7b^2 + 70a^6b^3 - 132a^5b^4 + 211a^4b^5 \\ &\quad - 182a^3b^6 + 76a^2b^7 - 18ab^8 + b^9). \end{aligned}$$

Le discriminant $\Delta(a, b)$ associé à ce modèle est (cf. [13], 1) :

$$\Delta(a, b) = ab(a - b)(a^3 - 8a^2b + 5ab^2 + b^3)^7.$$

On utilisera l'énoncé suivant (cf. [9], p. 30, prop. II.3.1) :

LEMME 3. — *L'équation $W(a, b)$ est minimale en tout nombre premier distinct de 7.*

En effet, l'invariant standard $c_4(a, b)$ associé à $W(a, b)$ est :

$$\begin{aligned} c_4(a, b) &= (a^2 - ab + b^2)(a^6 + 229a^5b + 270a^4b^2 - 1695a^3b^3 \\ &\quad + 1430a^2b^4 - 235ab^5 + b^6). \end{aligned}$$

Les entiers a et b étant par hypothèse premiers entre eux, on vérifie alors que 7 est le seul diviseur premier commun possible à $c_4(a, b)$ et $\Delta(a, b)$.

3.3. Démonstration du théorème 2.

Signalons d'abord l'idée qui nous a permis de trouver l'énoncé du théorème 2. Elle repose sur la remarque suivante, qui est une application directe du théorème 1 : soient u et v sont des nombres rationnels distincts

de 0 et 1. Si l'on a $u(u - 1)^2 = v(v - 1)^2$, les $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ -modules des points de 7-torsion des courbes elliptiques $E(u)$ et $E(v)$ sur \mathbf{Q} , sont isomorphes.

Étant donné u dans \mathbf{Q} distinct de 0 et 1, on a ainsi été amené à déterminer les racines rationnelles du polynôme $T(T - 1)^2 - u(u - 1)^2$. On a le lemme suivant :

LEMME 4. — Soit u un nombre rationnel autre que 0 et 1. Supposons que $u(4 - 3u)$ soit le carré dans \mathbf{Q} d'un élément a . Alors, $v = (2 - u + a)/2$ et $w = (2 - u - a)/2$ sont distincts de 0 et 1, et les courbes elliptiques $E(u)$, $E(v)$ et $E(w)$ sur \mathbf{Q} , ont leurs $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ -modules des points de 7-torsion isomorphes.

Démonstration. — Le fait que v et w soient distincts de 0 et 1 se vérifie directement. Par ailleurs, les racines du polynôme $T(T - 1)^2 - u(u - 1)^2$ sont u , v et w . Les corps des points de 7-torsion de $E(u)$, $E(v)$ et $E(w)$ sont donc égaux, ce qui entraîne l'assertion.

Démontrons maintenant le théorème 2. Rappelons que n désigne un entier relatif dont la valeur absolue est ≥ 3 .

a) Les représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ définies par les groupes des points de 7-torsion de $E(a_n)$, $E(n^2 a_n)$ et $E((n + 1)^2 a_n)$ sont isomorphes; en effet, cela résulte du lemme 4 appliqué avec $u = a_n$ (avec les notations de ce lemme, avec $a = (2n + 1)/(1 + n + n^2)$, on a $v = (n + 1)^2 a_n$ et $w = n^2 a_n$).

b) Démontrons que les courbes elliptiques $E(a_n)$, $E(n^2 a_n)$ et $E((n + 1)^2 a_n)$ sont mutuellement non isogènes sur \mathbf{Q} . Il suffit pour cela de prouver que leurs conducteurs sont distincts (pour la définition du conducteur d'une courbe elliptique, voir par exemple [12], p. 361).

Considérons les discriminants des modèles entiers $W(1, 1 + n + n^2)$, $W(n^2, 1 + n + n^2)$ et $W((n + 1)^2, 1 + n + n^2)$ représentant respectivement $E(a_n)$, $E(n^2 a_n)$ et $E((n + 1)^2 a_n)$ (cf. 3.2); on a les égalités (cf. loc. cit.) :

$$\Delta(1, 1 + n + n^2) = -n(n + 1)(1 + n + n^2)\alpha(n)^7,$$

où $\alpha(n) = n^6 + 3n^5 + 11n^4 + 17n^3 + 13n^2 + 5n - 1$,

$$\Delta(n^2, 1 + n + n^2) = n^2(n + 1)(1 + n + n^2)\beta(n)^7,$$

où $\beta(n) = n^6 - 5n^5 - 13n^4 - 17n^3 - 11n^2 - 3n - 1$, et

$$\Delta((n + 1)^2, 1 + n + n^2) = -n(n + 1)^2(1 + n + n^2)\delta(n)^7,$$

où $\delta(n) = n^6 + 11n^5 + 27n^4 + 35n^3 + 27n^2 + 11n + 1$.

Prouvons que les trois ensembles formés des diviseurs premiers distincts de 7, respectivement de $\alpha(n)$, $\beta(n)$ et $\delta(n)$, sont deux à deux distincts. Les deux entiers $\alpha(n)\beta(n)\delta(n)$ et $n(n+1)(1+n+n^2)$ étant premiers entre eux, l'assertion de l'alinéa b) résultera alors du lemme 3. Démontrons pour cela que les entiers $\alpha(n)$, $\beta(n)$ et $\delta(n)$ vérifient les deux propriétés suivantes :

- (i) ils ne sont pas divisibles par 2;
- (ii) ils ne sont pas des puissances 7-ièmes.

L'assertion (i) se vérifie directement. Prouvons que l'on a

$$(1) \quad 7^3 \nmid \alpha(n), \quad 7^3 \nmid \beta(n), \quad \text{et} \quad 7^3 \nmid \delta(n).$$

Si $n \not\equiv 1 \pmod{7}$ et $n \not\equiv -2 \pmod{7}$, 7 ne divise pas $\alpha(n)$. Supposons $n \equiv 1 \pmod{7}$ ou $n \equiv -2 \pmod{7}$. On a alors $\alpha(n) \equiv 7^2 \pmod{7^3}$, et en particulier 7^3 ne divise pas $\alpha(n)$.

Si $n \not\equiv 1 \pmod{7}$ et $n \not\equiv 3 \pmod{7}$, 7 ne divise pas $\beta(n)$. Si l'on a $n \equiv 1 \pmod{7}$ ou $n \equiv 3 \pmod{7}$, alors $\beta(n) \equiv -7^2 \pmod{7^3}$, et dans ce cas $7^3 \nmid \beta(n)$.

Si $n \not\equiv 3 \pmod{7}$ et $n \not\equiv -2 \pmod{7}$, 7 ne divise pas $\delta(n)$. Si l'on a $n \equiv 3 \pmod{7}$ ou $n \equiv -2 \pmod{7}$, alors $\delta(n) \equiv -7^2 \pmod{7^3}$. D'où l'assertion (1).

Or puisque $|n|$ est ≥ 3 , on a les inégalités $|\alpha(n)| > 7^2$, $|\beta(n)| > 7^2$ et $|\delta(n)| > 7^2$. Cela démontre l'assertion (ii).

Par ailleurs, le résultant de deux quelconques des polynômes α , β et δ est $-2^6 7^6$. Par suite, un diviseur premier commun à $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ est nécessairement 2 ou 7. Les entiers $\alpha(n)$ et $\delta(n)$, ainsi que $\beta(n)$ et $\delta(n)$, possèdent la même propriété. Les assertions (i) et (ii) entraînent alors le résultat annoncé.

c) Démontrons maintenant que les représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ définies par les points de 7-torsion de $E(a_n)$, $E(n^2 a_n)$ et $E((n+1)^2 a_n)$ sont *symplectiquement* isomorphes.

c.1) Supposons d'abord que 7 ne divise pas $1+n+n^2$. Le fait que n soit distinct de -1 et 0 , implique que $1+n+n^2$ n'est pas la puissance 7-ième d'un entier (cf. [10], 1). Notre assertion dans ce cas, résulte alors du lemme 2.

c.2) Supposons que 7 divise $1+n+n^2$. Alors, 7 ne divise pas n . Si n n'est pas la puissance 7-ième d'un entier, le lemme 2 entraîne encore

le résultat; sinon, $n + 1$ n'est pas la puissance 7-ième d'un entier, et le même argument en ce qui concerne l'entier $n + 1$ prouve dans ce cas notre assertion. Cela démontre le théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.J. BIRCH, Cyclotomic fields and Kummer extensions, dans : Algebraic Number Theory, édité par J.W.S. Cassels et A. Fröhlich, Academic Press (1967), 85–93.
- [2] H. DARMON et A. GRANVILLE, On the equations $z^m = F(x, y)$ and $Ax^p + By^q = Cz^r$, preprint, 1995.
- [3] E. HALBERSTADT et A. KRAUS, Sur la comparaison galoisienne des points de torsion des courbes elliptiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 322 (1996), 313–316.
- [4] E. KANI et W. SCHANZ, Diagonal quotient surfaces, preprint, 1995.
- [5] A. KRAUS, Sur le défaut de semi-stabilité des courbes elliptiques à réduction additive, Manuscripta Math., 69 (1990), 353–385.
- [6] A. KRAUS et J. OESTERLÉ, Sur une question de B. Mazur, Math. Ann., 293 (1992), 259–275.
- [7] B. MAZUR, Rational isogenies of prime degree, Invent. Math., 44 (1978), 129–162.
- [8] B. MAZUR, Questions about number, New directions in mathematics, 1995 (à paraître).
- [9] J.-F. MESTRE, Courbes elliptiques et groupe des classes d'idéaux, J. Crelle, 343 (1983), 23–35.
- [10] T. NAGELL, Des équations indéterminées $x^2 + x + 1 = y^n$ et $x^2 + x + 1 = 3y^n$, Norsk. M. F. Skriffer, Série I (1921).
- [11] J.-P. SERRE, Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, Invent. Math., 15 (1972), 259–331.
- [12] J. SILVERMAN, The arithmetic of elliptic curves, G.T.M. 106, Springer-Verlag (1986).
- [13] J. TATE, Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil, Modular functions of one variable IV, Lecture Notes in Math. 476, Springer-Verlag (1975), 33–52.
- [14] J. VÉLU, Isogénies entre courbes elliptiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 273 (1971), 238–241.

Manuscrit reçu le 6 novembre 1995,
 accepté le 8 mars 1996.

Alain KRAUS,
 Université de Paris VI
 Institut de Mathématiques
 Case 247
 4, place Jussieu
 75252 Paris Cedex 05 (France).
 kraus@mathp6.jussieu.fr