



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Julien DUVAL

Un théorème de Green presque complexe

Tome 54, n° 7 (2004), p. 2357-2367.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_7_2357_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

UN THÉORÈME DE GREEN PRESQUE COMPLEXE

par Julien DUVAL

0. Introduction.

Soit X une variété de dimension $2n$ munie d'une structure presque complexe, i.e. d'un automorphisme J de TX tel que $J^2 = -Id$. Quand J n'est pas intégrable (non localement équivalente à la structure complexe i de \mathbb{C}^n), la variété X manque en général d'objets holomorphes. Elle possède cependant des courbes J -holomorphes, i.e. des surfaces dont le plan tangent en tout point est une droite complexe pour J .

En particulier elle a beaucoup de J -disques non constants (voir l'article de J.-C. Sikorav dans [1]). Un J -disque est une application $f : (D, i) \rightarrow (X, J)$ du disque unité D de \mathbb{C} vers X , qui est J -holomorphe : elle vérifie $df \circ i = J \circ df$. À la suite de Kruglikov et Overholt [8], on définit donc la pseudométrie de Kobayashi-Royden K sur TX comme en complexe par :

$$K(p, v) = \text{Inf}\{1/r > 0 \mid \text{il existe un } J\text{-disque avec } f(0) = p \\ \text{et } d_0 f(\partial/\partial x) = rv\},$$

où p est un point de X et v un vecteur de $T_p(X)$.

La variété X est dite *hyperbolique* lorsque K est une vraie métrique. Au contraire, sa dégénérescence se traduit par l'existence de J -disques arbitrairement grands dans X passant par un point dans une direction

donnée. On s'attend alors, au moins quand X est compacte, à la présence de courbes entières dans la variété.

Précisément, appelons *courbe de Brody* une application $f : (\mathbb{C}, i) \rightarrow (X, J)$ non constante, J -holomorphe et de dérivée bornée.

Comme en complexe (voir Brody [3]), l'hyperbolicité se caractérise ainsi [8] :

CRITÈRE. — *Soit (X, J) une variété presque complexe compacte. Alors X est hyperbolique si et seulement si elle ne contient pas de courbe de Brody.*

Dans le cas complexe, on étudie plus aisément l'hyperbolicité des complémentaires de diviseurs que celle des variétés compactes. Le critère précédent demeure souvent valide. Ainsi, l'exemple de base dû à Green [5], l'hyperbolicité du complémentaire de $2n + 1$ hyperplans en position générale dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, se réduit à l'absence de courbe de Brody dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ évitant ces hyperplans. Il remonte donc essentiellement à Picard en dimension complexe 1 et à Borel en dimension supérieure.

À la suite de S. Ivashkovich, il est tentant d'explorer cet exemple en presque complexe. Ceci n'a de sens qu'en dimension réelle 4 : en effet toute structure presque complexe est intégrable en dimension 2, alors que l'on manque d'hyper-surfaces J -holomorphes en dimension supérieure à 4.

On se donne donc un *plan projectif presque complexe*. Autrement dit, fixons une structure presque complexe J sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ positive par rapport à la forme de Fubini-Study $\omega : \omega(\cdot, J\cdot) > 0$. Appelons *J -droite* de notre plan l'analogue presque complexe d'une droite projective, donc une courbe J -holomorphe plongée dans $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$, diffeomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et de degré 1 en homologie.

D'après Gromov [6] (voir aussi [10]), un tel plan presque complexe possède beaucoup de J -droites. Ainsi l'espace de ces J -droites est diffeomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Elles vérifient de plus les relations d'incidence usuelles : par deux points distincts passe une unique J -droite; deux J -droites distinctes se coupent transversalement en un point unique; les J -droites passant par un point p forment un pinceau diffeomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, donnant une projection centrale $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit C une réunion de cinq J -droites en position générale (i.e. sans point triple) de ce plan presque complexe. Voici notre résultat :

THÉORÈME. — *Le plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ ne contient pas de courbe de Brody évitant la configuration C .*

COROLLAIRE. — *Le complémentaire $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C, J)$ est hyperbolique.*

Dans cette direction, Debalme et Ivashkovich [4] avaient auparavant remarqué que l'hyperbolicité de $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C, J)$ était une propriété ouverte dans l'espace des configurations (C, J) .

Le théorème se montre par l'absurde. Considérons une courbe de Brody f évitant la configuration C . La remarque principale est que son adhérence F dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est "feuilletée" par des limites de f . Par positivité d'intersection, une telle feuille évite une droite de C ou y est contenue. Or, par un analogue du théorème de Liouville, F doit rencontrer chaque droite de la configuration. Donc F contient C par propagation le long des feuilles. La contradiction est atteinte à un point double de C puisque la feuille y passant ne peut être contenue à la fois dans les deux droites correspondantes. Le feuilletage de F s'obtient par un argument de famille normale en analysant la courbe de Brody f sous les projections centrales π à partir des points doubles de C . Le point crucial est que $\pi \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est quasiconforme et d'ordre fini, donc essentiellement un revêtement.

Notons que ce schéma géométrique est intéressant même dans le cas complexe. Il réduit le théorème de Green à un fait analytique élémentaire de théorie de distribution des valeurs : une fonction entière ne s'annulant pas et d'ordre fini est une exponentielle de polynôme (comparer avec [2]).

Afin de préciser ceci, débutons par des préliminaires sur les suites de J-disques et les projections centrales dans un plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$.

1. Préliminaires.

Les objets considérés dans la suite sont de classe C^∞ sauf mention du contraire, les convergences de suites d'applications étant localement uniformes.

a) Positivité d'intersection.

Soient deux J-disques non constants $f, g : (D, i) \rightarrow (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$. Supposons-les d'images distinctes et s'intersectant en $f(0) = g(0) = p$. Alors cette intersection est isolée et l'intersection homologique des deux

disques en p est strictement positive ([6], voir aussi l'article de D. McDuff dans [1]). Ceci entraîne le :

FAIT. — *Soit (f_n) une suite de J-disques convergeant vers un J-disque f . On suppose que $f_n(D)$ évite une J-droite L du plan presque complexe. Alors $f(D)$ évite encore L ou y est contenu.*

Sinon le disque $f(D)$ couperait positivement la droite L . On trouverait donc une courbe fermée dans $f(D)$ enlaçant localement L . Ce serait encore le cas pour $f_n(D)$ pour n assez grand, contredisant le fait que $f_n(D)$ évite L .

b) Familles normales.

Remarquons d'abord que, si une suite (f_n) de J-disques converge vers une application continue $f : D \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, alors celle-ci est de classe C^∞ et on a convergence des dérivées successives. La limite f est donc un J-disque. Ceci résulte de la régularité elliptique de l'équation des courbes J-holomorphes (voir l'article de J.-C. Sikorav dans [1]).

Une suite de J-disques est *normale* si de toute sous-suite on peut extraire une suite convergente. La remarque précédente et le théorème d'Ascoli donnent le :

CRITÈRE. — *Une suite (f_n) de J-disques est normale si et seulement si la suite $(\|df_n\|)$ des normes de ses dérivées est localement uniformément bornée.*

Ici $\|df_n\|$ est mesurée dans les métriques standard de \mathbb{C} et $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Une suite non normale de J-disques produit, quant à elle, une courbe de Brody par reparamétrage (cf. [3] et [8]) :

LEMME DE BRODY. — *Soit (f_n) une suite non normale de J-disques. Alors il existe une suite de contractions affines (r_n) de \mathbb{C} convergeant vers un point de D telle que $(f_n \circ r_n)$ converge vers une courbe de Brody après extraction.*

Rappelons que cette courbe de Brody est une application non constante $f : (\mathbb{C}, i) \rightarrow (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$, J-holomorphe et de dérivée bornée ($\|df\| \leq \text{constante}$).

À ce stade, voyons comment le corollaire découle du théorème.

Soit C une configuration de cinq J-droites en position générale dans

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Si $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C, J)$ n'est pas hyperbolique, on obtient une suite de J -disques dont les dérivées en l'origine explosent, donc une suite non normale évitant C . Celle-ci produit une courbe de Brody dans $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$. Elle doit éviter C , contredisant le théorème : sinon cette courbe de Brody rencontrerait une droite de la configuration C ; par le a) elle y serait contenue tout en évitant les quatre autres droites; on obtiendrait ainsi une courbe entière non constante dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{4 \text{ points}\}$, ce qui est impossible par le théorème de Picard. \square

c) Éclatement presque complexe.

Soit p un point de notre plan presque complexe. D'après [6] (voir aussi [10]) passe par p un pinceau de J -droites paramétré par $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, donnant une projection centrale $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Redressons localement ce pinceau sur le pinceau linéaire des droites complexes de \mathbb{C}^2 en 0. On construit pour cela un difféomorphisme Φ près de p , en projetant chaque J -droite L du pinceau sur sa tangente $T_p L$ parallèlement à $T_p L^\perp$. Ce difféomorphisme est de classe C^∞ hors de p mais seulement C^{1+Lip} en p . La structure presque complexe transportée par Φ , encore notée J , sera donc de classe C^∞ hors de 0 et Lipschitz en 0. On peut toujours supposer que $J(0) = i$.

Définissons alors l'éclaté X de $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ en p comme l'éclaté complexe usuel $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ en 0 via Φ .

Par construction, la projection centrale π se relève en une fibration $\widetilde{\pi} : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La structure J donne par relèvement une structure presque complexe \widetilde{J} sur $X \setminus E$ où E est le diviseur exceptionnel de X . Les fibres de $\widetilde{\pi}$ sont \widetilde{J} -holomorphes hors de E .

LEMME. — *La structure presque complexe \widetilde{J} admet un prolongement Lipschitz au diviseur exceptionnel E .*

Démonstration. — On le vérifie via Φ . Notons q la projection de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ sur \mathbb{C}^2 . On a, dans une des deux cartes de l'éclaté usuel, $q(x, t) = (x, tx)$. Hors du diviseur exceptionnel $E = (x = 0)$, la structure relevée s'obtient par $\widetilde{J} = (dq)^{-1} \circ J \circ dq$. Les horizontales ($t = \text{constante}$) étant \widetilde{J} -holomorphes, la structure \widetilde{J} est de la forme

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} l & m \\ 0 & j \end{pmatrix}$$

où j , l et m sont, en chaque point, des \mathbb{R} -endomorphismes de \mathbb{C} . En posant

de la même manière $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et en explicitant la différentielle dq , on obtient les formules suivantes pour \tilde{J} au point (x, t) :

$$l = a \circ q + (b \circ q)t, \quad m = (b \circ q)x, \quad j = -x^{-1}t(b \circ q)x + x^{-1}(d \circ q)x.$$

Comme $J(z) = i + O(|z|)$, on vérifie bien que $\tilde{J}(x, t) = i + O(|x|)$. \square

d) Projections quasiconformes.

Comme dans le paragraphe précédent, on se fixe π une projection centrale associée au pinceau de J-droites en p . Celle-ci n'est pas en général holomorphe. Cependant elle reste quasiconforme en restriction aux J-disques du plan presque complexe.

Précisons ceci. On suppose que π envoie l'orientation transverse du pinceau venant de J sur celle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit $0 \leq k < 1$. Une application $g : D \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est dite k -*quasiconforme* si $\|\bar{\partial}g\| \leq k\|\partial g\|$. Ici ∂g et $\bar{\partial}g$ désignent respectivement les composantes \mathbb{C} -linéaire et \mathbb{C} -antilinéaire de la dérivée de g pour les structures complexes de D et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Notons que g reste quasiconforme (pour une autre constante) si on la compose par un difféomorphisme préservant l'orientation de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

PROPOSITION. — *Il existe une constante $k < 1$ telle que $\pi \circ f$ soit k -quasiconforme pour tout J-disque f évitant p .*

Démonstration. — Relevons le J-disque f à X l'éclaté presque complexe en p , en un \tilde{J} -disque \tilde{f} . On veut voir que $\tilde{\pi} \circ \tilde{f}$ est quasiconforme. L'énoncé étant de nature locale, on peut supposer le disque $\tilde{f}(D)$ contenu dans un ouvert de carte U de X trivialisant la fibration. L'ouvert U est donc difféomorphe au bidisque $D \times D$, $\tilde{\pi}$ devenant la projection sur le deuxième facteur. La structure \tilde{J} dans cette carte est alors de la forme

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} l & m \\ 0 & j \end{pmatrix}.$$

Comme on peut toujours supposer que $\tilde{J}(0) = i$, la structure j sera une petite perturbation $i + \epsilon$ de la structure complexe de D quitte à rétrécir U . Ceci n'utilise que la continuité de \tilde{J} (voir c)).

Ainsi $\tilde{\pi} \circ \tilde{f}$ se lit dans la carte comme la deuxième projection $g : D \rightarrow D$ du \tilde{J} -disque. D'après la forme de \tilde{J} , elle satisfait l'équation $dg \circ i = j(\tilde{f}) \circ dg = i \circ dg + \epsilon(\tilde{f}) \circ dg$. On en déduit la quasiconformalité de g

puisque ϵ est petit. L'application $\tilde{\pi} \circ \tilde{f}$ est donc k_U -quasiconforme pour une constante ne dépendant que de la carte. En recouvrant X par un nombre fini de tels ouverts U , on peut prendre pour k le maximum des constantes k_U en question. \square

Remarque. — D'après le dernier chapitre de la monographie de Lehto et Virtanen [9], une application k -quasiconforme peut toujours s'écrire comme composée $h \circ \phi$ d'une fonction holomorphe h et d'un homéomorphisme quasiconforme ϕ grâce au théorème d'Ahlfors-Bers. Nous renvoyons à [9] pour les définitions analytique et géométrique des *homéomorphismes* quasiconformes, et leurs propriétés.

On en déduit déjà cet analogue du théorème de Liouville :

COROLLAIRE. — *Soit $f : (\mathbb{C}, i) \rightarrow (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ une courbe entière J -holomorphe. On suppose que l'adhérence de son image évite une J -droite L . Alors f est constante.*

Démonstration. — Plongeons L dans un pinceau de J -droites. On suppose que la projection centrale π envoie L sur le point à l'infini de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Notons g la composée $\pi \circ f$. Comme $\overline{f(\mathbb{C})}$ évite L , $\overline{g(\mathbb{C})}$ évite l'infini. Autrement dit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est bornée. Par la proposition et la remarque, g s'écrit comme une composée $h \circ \phi$ où h est une fonction entière bornée et ϕ un homéomorphisme de \mathbb{C} . Par le théorème de Liouville, h et donc g sont constantes. Ainsi la courbe $f(\mathbb{C})$ est contenue dans une J -droite L' du pinceau. Or l'adhérence $\overline{f(\mathbb{C})}$ évite le point de rencontre de L et L' que l'on identifie au point à l'infini de L' . Donc f est constante par une nouvelle application du théorème de Liouville. \square

Abordons maintenant la démonstration proprement dite du théorème.

2. Démonstration.

Rappelons que l'on raisonne par l'absurde. Soit $f : (\mathbb{C}, i) \rightarrow (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ une courbe de Brody évitant une configuration $C = \cup L_i$ de cinq J -droites en position générale. Notons $F = \overline{f(\mathbb{C})}$ l'adhérence de son image dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. On a le :

LEMME GÉOMÉTRIQUE. — *Le compact F est réunion de J -disques Δ non constants obtenus comme limites de disques de $f(\mathbb{C})$.*

Admettons provisoirement ce lemme. Voici comment en découle la contradiction. Remarquons déjà que les disques Δ satisfont l'alternative suivante vis-à-vis de C (cf. 1.a)) : ou Δ évite C , ou Δ est contenu dans l'une des droites de C en évitant les autres. En particulier, F doit éviter les points doubles de la configuration C . Cependant, par l'analogie du théorème de Liouville (cf. 1.d)), F rencontre chaque droite L_i de C . De plus l'intersection $F \cap L_i$, qui est fermée dans L_i , y est aussi ouverte : le disque Δ passant par un point de $F \cap L_i$ est nécessairement contenu dans L_i . Donc F contient toute la configuration. Contradiction. \square

Démonstration du lemme géométrique. — Elle repose sur l'analyse de F sous les projections centrales issues des points doubles de la configuration. Soit p un tel point double, par exemple le point de rencontre de L_1 et L_2 . Notons $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la projection correspondante. On suppose que les droites L_1 et L_2 s'envoient par π sur l'origine et l'infini de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La restriction de π à la courbe de Brody f est donc à valeurs dans \mathbb{C}^* . Le point crucial est que $\pi \circ f$ est presque un revêtement :

LEMME ANALYTIQUE. — *La composée $g = \pi \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est de la forme $e^{P \circ \phi}$ où P est un polynôme non constant et ϕ un homéomorphisme de \mathbb{C} .*

En particulier, soit δ un disque dans \mathbb{C}^* ; alors $g^{-1}(\delta) = U \cup \bigcup D_n$ où U et les disques D_n sont disjoints, $g|_U$ de degré fini et $g|_{D_n}$ un homéomorphisme sur δ .

Admettons pour l'instant ce résultat. Voici comment il entraîne le lemme géométrique.

Soit z un point de $F \setminus f(\mathbb{C})$. Quitte à permuter les droites, supposons que L_1 et L_2 évitent z . Notons $t = \pi(z)$ et δ un disque centré en t dans \mathbb{C}^* . Par hypothèse, z est limite d'une suite de points distincts (z_n) de $f(\mathbb{C})$. Par la remarque suivant le lemme analytique on trouve, pour n assez grand, un disque Δ_n contenu dans la courbe de Brody passant par z_n tel que $\pi : \Delta_n \rightarrow \delta$ soit un homéomorphisme.

Il suffit de voir que (Δ_n) forme une famille normale pour conclure. Pour cela reparamétrisons conformément les disques Δ_n par $f_n : (D, i) \rightarrow (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ avec $\pi \circ f_n(0) = t$. Les projections $g_n = \pi \circ f_n : D \rightarrow \delta$ sont ainsi des difféomorphismes k -quasiconformes (cf. 1.d)) envoyant l'origine sur t . Quitte à extraire, on peut donc supposer que (g_n) converge vers un homéomorphisme γ de D sur δ [9].

On en déduit bien que la suite de J-disques (f_n) est normale. Sinon, par le lemme de Brody (cf. 1.b)), on trouverait une suite de contractions affines (r_n) de \mathbb{C} convergeant vers un point a de D telle que $(f_n \circ r_n)$ converge vers une courbe de Brody h quitte à extraire. Ainsi $(g_n \circ r_n)$ aurait pour limite $\gamma(a)$. Autrement dit, la courbe h serait contenue dans la fibre de π au-dessus de $\gamma(a)$, donc dans une J-droite L du pinceau en p . Par ailleurs cette courbe de Brody éviterait encore C comme limite d'une suite de J-disques hors de C (cf. 1.b)). Or $L \cap C$ contient au moins trois points. On obtiendrait donc une courbe entière non constante dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{3 \text{ points}\}$, contredisant le théorème de Picard. \square

Démonstration du lemme analytique. — Elle repose sur le fait que la courbe de Brody f est d'ordre fini, ainsi que sa projection $g = \pi \circ f$. Comme g est quasiconforme, on l'écrira comme composée $h \circ \phi$ d'une fonction entière h d'ordre fini et d'un homéomorphisme. Or on sait bien qu'une fonction entière ne s'annulant pas et d'ordre fini est une exponentielle de polynôme (cf. par exemple [2]).

Détaillons ceci. Notons D_r le disque centré en l'origine de rayon r dans \mathbb{C} . Rappelons que ω désigne la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, celle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ étant notée ω' . Définissons, comme Nevanlinna et Ahlfors (voir [7]), les *caractéristiques* de f et g par :

$$T(f)(r) = \int_0^r \left(\int_{D_\rho} f^* \omega \right) \frac{d\rho}{\rho},$$

$$T(g)(r) = \int_0^r \left(\int_{D_\rho} g^* \omega' \right) \frac{d\rho}{\rho} = \int_0^r \left(\int_{D_\rho} f^* \pi^* \omega' \right) \frac{d\rho}{\rho}.$$

Les applications f ou g sont *d'ordre fini* si leur caractéristique croît au plus polynomialement en r . C'est le cas pour f : en effet sa dérivée est bornée, donc $f^* \omega$ est une 2-forme bornée sur \mathbb{C} et $T(f)$ croît quadratiquement.

Pour passer à g , on va comparer la forme singulière (le courant) $\pi^* \omega'$ à ω . Leur différence n'est plus tout à fait, comme en complexe, le dd^c d'un potentiel à singularité logarithmique en p :

FAIT. — *Il existe une fonction négative u et une 1-forme bornée α sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{p\}$ telles que $\pi^* \omega' = \omega + dd_J^c u + d\alpha$ en dehors de p , avec la notation $d_J^c u = -du \circ J$.*

En effet, comme ω et $\pi^* \omega'$ sont cohomologues, il s'agit d'un problème local près de p : écrire $\pi^* \omega'$ comme somme du dd_J^c d'un potentiel négatif et d'une différentielle d'une 1-forme bornée. Or, après redressement du

pinceau en p par Φ (cf. 1.c), on a $\pi^*\omega' = dd^c \log |z| = dd^c_j \log |z| + d\beta$ où $\beta = d \log |z| \circ (J - i)$. Cette 1-forme est bien bornée près de 0 car $J(z) - i = O(|z|)$ (Φ est C^{1+Lip} en p).

Puisque f est J -holomorphe, on peut maintenant comparer $T(g)$ et $T(f)$:

$$T(g)(r) = T(f)(r) + \int_0^r \left(\int_{D_\rho} dd^c(u \circ f) \right) \frac{d\rho}{\rho} + \int_0^r \left(\int_{\partial D_\rho} f^* \alpha \right) \frac{d\rho}{\rho}.$$

Classiquement [7] la première intégrale vaut $\int_0^{2\pi} u \circ f(re^{i\theta}) d\theta - 2\pi u \circ f(0)$. Elle reste donc majorée puisque u est négative. La seconde croît linéairement : en effet, la 1-forme $f^*\alpha$ est bornée sur \mathbb{C} car la dérivée de f et α le sont. Donc g est, comme f , d'ordre fini.

Écrivons maintenant g comme composée $g = h \circ \phi$ d'une fonction entière h et d'un homéomorphisme quasiconforme ϕ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ fixant l'infini (cf. 1.d) et le dernier chapitre de [9]). Notons que l'homéomorphisme ϕ est Hölder pour la métrique de Fubini-Study de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ [9]. Puisqu'il fixe l'infini, son inverse croît polynomialement pour la métrique usuelle de \mathbb{C} : on aura $\phi^{-1}(D_r) \subset D_{r^d}$ pour un certain entier d et r assez grand. Ceci entraîne que h est, comme g , d'ordre fini : $T(h)(r)$ vaut en effet par définition

$$\begin{aligned} \int_0^r \text{Aire}_{\omega'}(g(\phi^{-1}(D_\rho))) \frac{d\rho}{\rho} &\leq \int_0^r \text{Aire}_{\omega'}(g(D_{\rho^d})) \frac{d\rho}{\rho} + O(1) \\ &= d^{-1}T(g)(r^d) + O(1). \end{aligned}$$

Rappelons enfin brièvement pourquoi h est une exponentielle de polynôme. Comme h ne s'annule pas sur \mathbb{C} , elle a un logarithme k . Montrons que c'est un polynôme. Notons pour cela que, dans \mathbb{C} , $\omega' = dd^c \log(1 + |z|^2)$. Donc :

$$\begin{aligned} T(h)(r) &= \int_0^r \left(\int_{D_\rho} dd^c \log(1 + |h|^2) \right) \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \int_0^{2\pi} \log(|h| + |h|^{-1})(re^{i\theta}) d\theta + O(1). \end{aligned}$$

La deuxième égalité résulte du fait que $\log |h|$ est harmonique. Ainsi les moyennes sur les cercles de centre 0 et de rayon r de $|\log |h|| = |\text{Re}(k)|$ ont une croissance polynomiale. Or le développement en série entière de k à l'origine donne :

$$k^{(n)}(0) = \pi^{-1} n! r^{-n} \int_0^{2\pi} \text{Re}(k)(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

En faisant tendre r vers l'infini, on obtient bien que $k^{(n)}(0) = 0$ pour n grand. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. AUDIN and J. LAFONTAINE ed., *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Math., 117, Birkhäuser, (1994), Basel.
- [2] F. BERTELOOT et J. DUVAL, Sur l'hyperbolicité de certains complémentaires, *Ens. Math.*, 47 (2001), 253–267.
- [3] R. BRODY, Compact manifolds and hyperbolicity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 235 (1978), 213–219.
- [4] R. DEBALME and S. IVASHKOVICH, Complete hyperbolic neighborhoods in almost-complex surfaces, *Int. J. of Math.*, 12 (2001), 211–221.
- [5] M. GREEN, Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties, *Amer. J. Math.*, 97 (1975), 43–75.
- [6] M. GROMOV, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.*, 82 (1985), 307–347.
- [7] S. KOBAYASHI, *Hyperbolic complex spaces*, *Grund. der math. Wiss.*, 318, Springer (1998), Berlin.
- [8] B. KRUGLIKOV and M. OVERHOLT, Pseudoholomorphic mappings and Kobayashi hyperbolicity, *Diff. Geom. Appl.*, 11 (1999), 265–277.
- [9] O. LEHTO and K.I. VIRTANEN, *Quasiconformal mappings in the plane*, *Grund. der math. Wiss.*, 126, Springer (1973), Berlin.
- [10] J.-C. SIKORAV, Dual elliptic planes, preprint 2000, [arXiv math.SG/0008234](https://arxiv.org/abs/math/0008234).

Manuscrit reçu le 14 janvier 2004,
accepté le 30 mars 2004.

Julien DUVAL,
Université Paul Sabatier
Laboratoire Émile Picard
UMR CNRS 5580
31062 Toulouse Cedex 4 (France).
duval@picard.ups-tlse.fr