ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Mongi BLEL & Saoud K. MIMOUNI

Singularité et intégrabilité des fonctions plurisousharmoniques

Tome 55, nº 2 (2005), p. 319-351.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2005__55_2_319_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
55, 2 (2005), 319–351

SINGULARITÉS ET INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES(*)

par Mongi BLEL & Souad Khemiri MIMOUNI

1. Introduction.

Le but de ce travail est l'étude du lien entre l'intégrabilité locale de $\mathrm{e}^{-\varphi}$, où φ est une fonction plurisousharmonique (Psh) sur une variété analytique X de dimension n et les valeurs du nombre de Lelong de φ. En 1970, E. Bombieri [Bom70] a démontré que pour tout $a \in X$, il existe deux réels δ et γ strictement positifs tels que :

si $\nu_\varphi(a) < \delta$, alors la fonction $e^{-\varphi}$ est intégrable sur un voisinage de a,

si $\nu_\varphi(a) \geqslant \gamma$, alors la fonction $e^{-\varphi}$ n'est intégrable sur aucun voisinage de a.

En 1972 H. Skoda [Sko72] a précisé ce résultat et a démontré que $\delta = 2$ et $\gamma = 2n$. En 1999 J-P. Demailly et J. Kollár [De&Ko99] ont définit l'exposant des singularités complexes d'une fonction $\varphi \in \mathrm{Psh}(X)$, (avec $\mathrm{Psh}(X)$ l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur X muni de la topologie de la convergence dans L^1_{loc}), sur un compact K de X par :

$$c_K(\varphi) = \sup\{c \geqslant 0;\ \exp(-2c\varphi) \text{ intégrable sur un voisinage de } K\}.$$

(*) Ce travail est supporté par le Ministère de la Recherche Scientifique et de la Technologie de la Tunisie (Unité de recherche 02UR1501) et a bénéficié de l'aide du CMCU dans le cadre des actions intégrées avec l'Université de Grenoble.
Mots-clés : fonctions plurisousharmoniques, courants positifs, ensembles analytiques, exposant des singularités.
Classification math. : 32C25, 32C30.

Ils ont montré par ailleurs la semi-continuité inférieure de l'application $\varphi \longmapsto c_K(\varphi)$ sur $\mathrm{Psh}(X)$, et ils ont prouvé que pour tout $c < c_K(\varphi)$ et pour toute suite $(\varphi_m)_m$ qui converge vers φ, $e^{-2c\varphi_m}$ converge vers $e^{-2c\varphi}$ pour la norme L^1 sur un voisinage U de K.

Rappelons qu'une fonction φ sur un ouvert U d'une variété analytique X est dite presque Psh s'il existe une fonction $\psi \in \mathrm{Psh}(U)$ et $\omega \in \mathcal{C}^\infty(U)$ telles que $\varphi = \psi + \omega$. Un courant T de bidegré $(1,1)$ sur U est dit presque positif si $T \geqslant \gamma$, avec γ une (1,1)-forme réelle à coefficients localement bornés, T peut s'écrire dans ce cas ; $T = \alpha + dd^c\varphi$, avec α une (1,1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ et φ une fonction presque Psh [Dem92]. Il découle de ce qui précède que $dd^c\varphi$ est presque positif si et seulement si φ est presque Psh. Etant donné un (1,1)-courant positif fermé T sur une variété analytique kählérienne X de dimension n, alors si les pôles de T sont dans un compact K propre de X (*i.e.* pour tout relativement compact U de X, il existe une fonction Psh $\varphi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(U \setminus K)$ et une (1,1)-forme α $\mathcal{C}^\infty$ telles que $T = \alpha + dd^c\varphi$ sur U), $\nu_T(x) \leqslant \gamma$ $\forall x \in X$ et $E_c(T)$ est fini pour tout $c > 0$. On montre dans ce travail qu'on peut contrôler $\sum_{x\in X} \nu_T^n(x)$ par une constante réelle positive M. Soit $\mu\colon \tilde{X} \longmapsto X$ l'éclatement de X au dessus d'un point x, et $[\tilde{Y}]$ le diviseur exceptionnel de cet éclatement, d'après S. Giret [Gir98], le prolongement trivial $\tilde{T}$ de $\mu^\star T$ à travers $\tilde{Y}$ existe et appelé le transformé strict de T, de plus $\tilde{T} = \mu^\star T - \gamma[\tilde{Y}]$, avec $\gamma = \nu_T(x)$. On étudie ensuite les propriétés de $\tilde{T}$, en particulier on montre qu'en dimension 2 le courant $\tilde{T}$ hérite toutes les propriétés de T énoncées ci-dessus, et que $\sum_{x\in\tilde{Y}} \nu_{\tilde{T}}^2(x)$ est majorée par $M - \gamma^2$. En considérant des éclatements successifs de ce type on peut raffiner à chaque fois cette majoration pour retrouver après un nombre fini d'éclatements un courant positif fermé tel que le nombre de Lelong de ce courant en tout point est strictement inférieur à γ. Pour $n = 2$, $\varphi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(X \setminus K)$ une fonction Psh telle que $\nu_\varphi(x) \leqslant 2$ pour tout $x \in X$ et $E_c(\varphi)$ est fini pour tout $c > 0$, avec ce qui précède, on peut ramener le problème de l'intégrablité locale de $e^{-\varphi}$ à l'étude de l'intégrabilité locale d'une fonction Psh sur une variété analytique de dimension 2 et telle que tous les nombres de Lelong sont strictement inférieurs à 2.

Le travail se compose de trois parties

• **Partie 1 :** Si Θ est un courant positif fermé de bidegré $(n-p, n-p)$, $1 \leqslant p \leqslant n$, et soient $T_1, \ldots, T_p$ des (1,1)-courants presque positifs fermés sur X à pôles dans K. Bien que le produit extérieur $T_1 \wedge \ldots \wedge T_p$ ne soit pas défini, on montre qu'on peut attribuer un sens à $\int_K T_1 \wedge \ldots \wedge T_p \wedge \Theta$. Demailly [Dem92] a montré que si X est compacte, alors pour tout $c > 0$

on peut régulariser un courant presque positif fermé T sur X par des courants $(T_{c,k})_k$ presque positifs fermés qui convergent faiblement vers T avec atténuation des singularités (les $T_{c,k}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $X \setminus E_c(T)$). Si X est kählérienne non nécessairement compacte et K compact de X, alors la condition sur la courbure est vérifiée sur K et on peut de la même façon régulariser T sur K par des courants presque positifs fermés. En appliquant ce résultat pour des courants T_j positifs fermés sur X tels que pour tout $c > 0$ $E_c(T_j)$ est fini, $1 \leqslant j \leqslant n$, on se ramène au cas où les courants sont $\mathcal{C}^\infty$ en dehors d'un ensemble fini. D'après [Dem93a], on a : $\nu_{T_{1,c,k}}(x) \dots \nu_{T_{n,c,k}}(x) \leqslant \nu_{T_{1,c,k} \wedge \dots \wedge T_{n,c,k}}(x)$ ($(T_{j,c,k})_k$ est la famille de courants régularisants de T_j définie ci-dessus). Ce résultat s'étend comme suit pour contrôler les nombres de Lelong de courants à pôles dans un compact :

THÉORÈME 1.1. — *Soient X une variété analytique kählérienne de dimension n et $T_1, \dots, T_n$ des (1,1)-courants positifs fermés à pôles dans un compact K de X ($T_j = \alpha_j + dd^c\psi_j$ sur un voisinage U de K, avec α_j une (1,1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $\psi_j \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(U \setminus K)$ et presque* Psh*). On suppose que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ et pour tout $c > 0$, l'ensemble $E_c(T_j)$ est fini. Alors*

$$\int_K T_1 \wedge \dots \wedge T_n \geqslant \sum_{x \in K} \nu_{T_1}(x) \dots \nu_{T_n}(x).$$

• **Partie 2 :** On étudie le lien entre $\int_K T_1 \wedge \dots \wedge T_n$ et $\int_{\mu^{-1}(K)} (\mu^\star T_1 - c_1[\tilde{Y}]) \wedge \dots (\mu^\star T_n - c_n[\tilde{Y}])$, avec $[\tilde{Y}]$ le diviseur exceptionnel de l'éclatement $\mu \colon \tilde{X} \longmapsto X$ au dessus de $x \in K$ et $0 \leqslant c_j \leqslant \nu_{T_n}(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Les termes de la forme $\int_{\mu^{-1}(K)} (\mu^\star T_{j_1} \wedge \dots \wedge \mu^\star T_{j_p} \wedge [\tilde{Y}]^{n-p})$, $1 \leqslant j_1 < \dots < j_p \leqslant n$ et $1 \leqslant p < n$, sont tous nuls puisque $\mathrm{Supp}(\mu_\star[\tilde{Y}]) \subset \{x\}$, de plus $\int_{\tilde{X}} [\tilde{Y}]^n = (-1)^{n-1}$. On montre alors le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Soient X une variété analytique kählérienne de dimension n, $\mu \colon \tilde{X} \longmapsto X$ l'éclatement de X au dessus de x et $T_1, \dots, T_n$; n courants presque positifs fermés de bidegrés (1,1) et à pôles dans un compact K de X contenant x, alors pour tous $0 \leqslant c_j \leqslant \nu_{T_j}(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ on a :*

$$\int_{\mu^{-1}(K)} (\mu^\star T_1 - c_1[\tilde{Y}]) \wedge \dots \wedge (\mu^\star T_n - c_n[\tilde{Y}]) = \int_K T_1 \wedge \dots \wedge T_n - \prod_{j=1}^n c_j.$$

Nous étudions ensuite les singularités du transformé strict $\tilde{T}$ de $T = dd^c\varphi$ par éclatement $\mu\colon \tilde{X} \longmapsto X$ au dessus d'un point x de X, avec φ une fonction Psh sur X. On commence l'étude pour les fonctions à pôles logarithmiques, puis en approximant φ sur un voisinage de x par de telles fonctions (on considère la suite $(\psi_m)_m$ des fonctions définies dans [Dem93b] qui approxime φ de point de vue singularités et pour la topologie de L^1_{loc}), on montre que pour tout $\tilde{x} \in \tilde{U} = \mu^{-1}(U)$ on a : $\nu_{\tilde{T}_m}(\tilde{x})$ converge vers $\nu_{\tilde{T}}(\tilde{x})$ lorsque m tend vers l'infini, avec $\tilde{T}_m$ est le transformé strict de $T_m = dd^c\psi_m$. On retrouve à l'aide de cette approximation des propriétés importantes concernant les pôles de $\tilde{T}$:

Proposition 1.3. — *Soient T un (1,1)-courant positif fermé sur une variété analytique X de dimension n et $\tilde{T}$ le transformé strict de T par l'éclatement $\mu\colon \tilde{X} \longmapsto X$ de X au dessus d'un point x. On note $\tilde{Y}$ le diviseur exceptionnel de l'éclatement, alors*

$$\nu_{\tilde{T}}(a) \leqslant \nu_T(x) \quad \forall\ a \in \tilde{Y}.$$

On montre aussi le résultat suivant :

Proposition 1.4. — *Avec les mêmes hypothèses de la proposition 1.3, on a :*

$$\nu_{\tilde{T}} = 0 \quad \textit{presque partout sur } \tilde{Y}.$$

En particulier, pour tout $c > 0$, $E_c(\tilde{T}) \cap \tilde{Y}$ est un sous ensemble analytique de dimension $\leqslant n-2$.

• **Partie 3 :** Soit X une variété analytique kählérienne de dimension 2 et φ une fonction Psh sur X à pôles dans un compact K de X, on suppose que $\nu_\varphi(x) \leqslant 2$ pour tout $x \in X$ et $E_c(\varphi)$ est fini pour tout $c > 0$. Le but est alors de montrer que $\mathrm{e}^{-\varphi}$ est localement intégrable sur X. Le problème se pose au voisinage des points tels que le nombre de Lelong est égal à 2. Soient $x_0 \in X_0 := X$ tel que $\nu_\varphi(x_0) = 2$ et $T_0 = dd^c\varphi$. Nous construisons la famille d'éclatements $(\mu_p)_{p\geqslant 1}$ telle que $\mu_p\colon X_p \longmapsto X_{p-1}$ est l'éclatement au dessus de $x_{p-1} \in X_{p-1}$ et on note $\tilde{Y}_p$ le diviseur exceptionnel correspondant, et la famille de courants positifs fermés $(T_p)_{p\geqslant 1}$ définie par $T_p = \mu_p^\star T_{p-1} - 2[Y_p]$. Les x_p sont choisis de sorte que $\nu_{T_p}(x_p) = 2$, $p \geqslant 1$. On s'arrête à l'ordre p_0 si $\nu_{T_{p_0}}(x) < 2$ pour tout $x \in X_{p_0}$. On montre que cette famille ne peut être que fini (*i.e.* p_0 existe). Les propositions 1.3 et 1.4 impliquent que

$E_c(T_p)$ est fini car X est de dimension 2 et le nombre de Lelong de T_p est inférieur ou égal à 2 en tout point de X_p, alors d'après le théorème 1 on a : $\sum_{x\in X_p}\nu^2_{T_p}(x)\leqslant\int_{K_p}T_p^2$, avec $K_p=\mu_p^{-1}(K_{p-1})$ et $K_0=K$. Le théorème 2 entraîne alors que $\sum_{x\in X_p}\nu^2_{T_p}(x)\leqslant\int_K T^2-4p$. Ceci prouve que p_0 existe. On se ramène alors à un (1,1)-courant positif fermé T_{p_0} tel que $\nu_{T_{p_0}}(x)<2$ pour tout $x\in X_{p_0}$. On énonce le théorème principal de cette partie :

Théorème 1.5. — *Soit φ une fonction* Psh *sur une variété analytique kählérienne X de dimension* 2 *qui vérifie :*

i) $\varphi\in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(X\setminus K)$, avec K compact de l'intérieur de X

ii) $\nu_\varphi(x)\leqslant 2\ \forall x\in X$

iii) $E_c(\varphi)$ est fini pour tout $0<c\leqslant 2$,

alors $\mathrm{e}^{-\varphi}$ *est localement intégrable sur X.*

Les auteurs remercient le professeur Jean-Pierre Demailly pour les discussions fructueuses et l'hospitalité chaleureuse pendant les séjours des auteurs à l'Institut Fourier de Grenoble.

Ce travail a inspiré d'autres travaux importants dans l'étude des singularités et l'intégrabilité des fonctions plurisousharmoniques, en particulier C. Favre et M. Jonsson (The valuative tree, Math.AC/0210265, Valuative analysis of plurisubharmonic functions, Math.CV/0401111, Valuations and multiplier ideals, Math.CV/0406109 sur ArXiv), qui aboutissent à une description encore plus détaillée des singularités des fonctions plurisousharmoniques en dimension 2.

2. Contrôle des nombres de Lelong des courants positifs fermés de type (1,1).

Soient X une variété kählérienne complexe de dimension n, K compact de X et Θ un courant positif fermé de bidegré $(n-p,n-p)$, $1\leqslant p\leqslant n$, et soient $T_1,\dots,T_p$ des (1,1)-courants presque positifs fermés sur X à pôles dans K (*i.e.* pour tout relativement compact U de X, il existe une fonction Psh φ_j et une (1,1)-forme α_j de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que $T_j=\alpha_j+dd^c\varphi_j$ sur U, on a : $\varphi_j\in\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(U\setminus K)$, $1\leqslant j\leqslant n$). Bien que le produit extérieur $T_1\wedge\ldots\wedge T_p$ ne soit pas a priori défini, on peut attribuer un sens à $\int_K T_1\wedge\ldots\wedge T_p\wedge\Theta$

par :

$$\int_K T_1 \wedge \ldots \wedge T_p \wedge \Theta := \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{c \to +\infty} \int_{K_\varepsilon} (\alpha_1 + dd^c \max(\varphi_1, -c)) \wedge \ldots \wedge (\alpha_p + dd^c \max(\varphi_p, -c)) \wedge \Theta \tag{1}$$

avec $T_j = \alpha_j + dd^c\varphi_j$ sur un voisinage de K et $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille exhaustive de compacts décroissante vers K lorsque ε tend vers 0. Ensuite, on suppose que les courants T_j sont positifs fermés et que pour tout $c > 0$, $E_c(T_j)$ est fini, $1 \leqslant j \leqslant p = n$, on montre alors l'inégalité suivante qui contrôle les nombres de Lelong des T_j

$$\sum_{x \in X} \nu_{T_1}(x) \ldots \nu_{T_n}(x) \leqslant \int_K T_1 \wedge \ldots \wedge T_n.$$

2.1. Courants presque positifs fermés et masse du produit.

Pour prouver que l'égalité (1) a un sens, nous commençons par montrer que le terme

$$\int_{K_\varepsilon} (\alpha_1 + dd^c \max(\varphi_1, -c)) \wedge \ldots \wedge (\alpha_p + dd^c \max(\varphi_p, -c)) \wedge \Theta$$

est indépendant de l'écriture des $T_j = \alpha_j + dd^c\varphi_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$, lorsque $c > 0$ assez grand.

Lemme 2.1. — *Soient X une variété analytique de dimension n, Θ un (n-1,n-1)-courant presque positif (i.e. $\Theta + c\gamma \geqslant 0$, $c > 0$ et γ une $(n-1, n-1)$-forme réelle à coefficients localement bornées) fermé et T un courant presque positif fermé de bidegré $(1,1)$ et à pôles dans un compact K de X ($T = \alpha + dd^c\varphi$ sur un relativement compact U contenant K, avec α une (1,1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ et φ une fonction presque Psh). Soit $L \subset U$ un compact contenant K dans son intérieur, alors*

$$\int_L (\alpha + dd^c \max(\varphi, -c)) \wedge \Theta$$

est indépendant du choix de α et de φ dans la décomposition de T et indépendant de la constante $c > \sup_{x \in \partial L} \varphi(x)$.

Démonstration. — Soient β une (1,1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ fermée et ψ une fonction presque Psh telles que $T = \beta + dd^c\psi$ sur U et soit $\nu > \sup_{\partial L} |\psi|$. La fonction $\max(\psi, -\nu)$ est dans $L^\infty_{loc}(U)$, alors d'après Bedford et Taylor [Be&Ta82], le courant $(\beta + dd^c \max(\psi, -\nu)) \wedge \Theta$ est bien défini sur U. De plus $\alpha - \beta = dd^c(\psi - \varphi)$, alors

$$\begin{aligned}(2)\qquad &\int_L (\alpha + dd^c \max(\varphi, -c)) \wedge \Theta - \int_L (\beta + dd^c \max(\psi, -\nu)) \wedge \Theta \\ &= \int_L dd^c(\psi - \varphi + \max(\varphi, -c) - \max(\psi, -\nu))) \wedge \Theta.\end{aligned}$$

Sur un voisinage de ∂L et pour c et ν assez grands on a $\varphi = \max(\varphi, -c)$ et $\psi = \max(\psi, -\nu)$, alors

$$\begin{aligned}(3)\qquad &\int_L dd^c(\psi - \varphi + \max(\varphi, -c) - \max(\psi, -\nu))) \wedge \Theta \\ &= \int_{\partial L} d^c(\psi - \varphi + \max(\varphi, -c) - \max(\psi, -\nu))) \wedge \Theta = 0,\end{aligned}$$

et par suite l'équation (2) donne :

$$\int_L (\beta + dd^c \max(\psi, -\nu)) \wedge \Theta = \int_L (\alpha + dd^c \max(\varphi, -c)) \wedge \Theta.$$

□

Remarque. — Le lemme 2.1 entraîne aussi que si Θ est un courant positif fermé de bidimension (p,p) et $T_j = \alpha_j + dd^c\varphi_j$ sur un relativement compact U contenant K, $1 \leqslant j \leqslant p$, p courants presque positifs fermés de bidegrés (1,1), avec α_j des formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ et φ_j des fonctions presque Psh appartenant à $L^\infty_{\mathrm{loc}}(U \setminus K)$, alors on a de même

$$\int_L (\alpha_1 + dd^c \max(\varphi_1, -c)) \wedge \ldots \wedge (\alpha_p + dd^c \max(\varphi_p, -c)) \wedge \Theta$$

est indépendante de la décomposition des T_j et de la constante $c > \max_j \sup_{\partial L} |\varphi_j|$, $K \subset\subset \mathring{L} \subset\subset U \subset\subset X$.

Théorème et Définition 2.1. — *Soient X une variété kählérienne complexe de dimension n, Θ un courant positif fermé de bidimension (p,p), $1 \leqslant p \leqslant n$ et $T_1, \ldots, T_p$ des courants presque positifs fermés de bidegrés*

$(1,1)$ *à pôles dans un compact K de X ($T_j = \alpha_j + dd^c\varphi_j$ sur un relativement compact U voisinage de K, avec α_j une (1,1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ et φ_j une fonction presque* Psh, $1 \leqslant j \leqslant p$). *Alors*

$$\int_K T_1 \wedge \ldots \wedge T_p \wedge \Theta := \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{c\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} (\alpha_1 + dd^c \max(\varphi_1, -c)) \wedge \ldots \wedge (\alpha_p + dd^c \max(\varphi_p, -c)) \wedge \Theta \tag{4}$$

est bien définie. $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une famille de compacts qui décroit vers K lorsque ε tend vers* 0.

Démonstration. — Soient $c_j > 0$ tels que $T_j + c_j\omega \geqslant 0$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, avec ω une (1,1)-forme kählérienne sur X. Pour $T_{j,c} = \alpha_j + dd^c \max(\varphi_j, -c)$ sur U, $1 \leqslant j \leqslant p$, une simple démonstration par récurrence sur p donne

$$T_{1,c} \wedge \ldots \wedge T_{p,c} = (T_{1,c} + c_1\omega) \wedge \ldots \wedge (T_{p,c} + c_p\omega) + \sum_{\substack{1\leqslant i_1<..<i_k\leqslant p \\ j_1<\ldots<j_{p-k}\in\complement_{\{1,\ldots,p\}}\{i_1,\ldots,i_k\} \\ k=1,\ldots,p-1}} \prod_{\ell=1}^{k} (-c_{i_\ell})(T_{j_1,c} + c_{j_1}\omega) \wedge \ldots \wedge (T_{j_{p-k},c} + c_{j_{p-k}}\omega) \wedge \omega^k + \prod_{j=1}^{p} (-c_j)\omega^p. \tag{5}$$

Le terme $\lim\limits_{c\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} (\alpha_1 + c_1\omega + dd^c \max(\varphi_1, -c)) \wedge \ldots \wedge (\alpha_p + c_p\omega + dd^c \max(\varphi_p, -c)) \wedge \Theta$ est positif et décroit lorsque ε tend vers 0, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{c\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} (\alpha_1+c_1\omega+dd^c \max(\varphi_1, -c))\wedge\ldots\wedge(\alpha_p+c_p\omega+dd^c \max(\varphi_p, -c))\wedge\Theta$$

existe. De même on montre que pour tous $1 \leqslant j_1 < .. < j_{p-k} \leqslant p$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, on a existence de la limite ;

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{c\to+\infty} \int_{K_\varepsilon} (\alpha_{j_1} + c_{j_1}\omega + dd^c \max(\varphi_{j_1}, -c)) \wedge \ldots \wedge (\alpha_{j_{p-k}} + c_{j_{p-k}}\omega + dd^c \max(\varphi_{j_{p-k}}, -c)) \wedge \Theta \wedge \omega^k.$$

D'après ce qui précède et l'égalité (3)

$$\int_K T_1 \wedge \ldots \wedge T_p \wedge \Theta : \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{c \to +\infty} \int_{K_\varepsilon} T_{1,c} \wedge \ldots \wedge T_{p,c} \wedge \Theta$$

est bien définie. □

2.2. Théorème de régularisation des courants positifs fermés de type (1,1) sur des variétés kählériennes.

Soient α une (1,1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ et φ une fonction presque Psh sur une variété analytique X, et soit $T = \alpha + dd^c\varphi$. Demailly [Dem92] à montré que si X est compacte, alors pour tout $c > 0$, on peut régulariser le courant T par une suite $(T_{c,k})_k$ de courants presque positifs qui converge faiblement vers T avec atténuation des singularités (les $T_{c,k}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $X \setminus E_c(T)$, avec $E_c(T) = \{z \in X;\ \nu_T(z) \geqslant c\}$). La partie négative des courants $T_{c,k}$ est estimée en terme du nombre de Lelong de T et de la courbure du fibré tangent T_X. Dans le cas où la variété X est kählérienne non nécessairement compacte, on montre façilement la condition sur la courbure sur tout compact de X et on peut donc de la même manière régulariser T sur K par des courants presque positifs fermés. L'énoncé du théorème de Demailly [Dem92], lorsque X est une variété kählérienne est le suivant :

Théorème 2.2. — *Soient T un (1,1)-courant presque positif fermé sur une variété analytique X munie d'une métrique kählérienne ω et K un compact de X. Sur un voisinage de K, écrivons $T = \alpha + dd^c\psi$, où α est une (1,1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ et ψ une fonction presque* Psh. *On considère γ une (1,1)-forme continue telle que $T \geqslant \gamma$, alors pour tout $c > 0$, il existe une suite de (1,1)-courants presque positifs fermés $T_{c,k} = \alpha + dd^c\psi_{c,k}$ telle que les $\psi_{c,k}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $K \setminus E_c(T)$ décroissent vers ψ lorsque k croit vers l'infini (en particulier le courant $T_{c,k}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $K \setminus E_c(T)$ et converge faiblement vers T sur K lorsque k tend vers l'infini) et il existe une constante $A > 0$ vérifiant :*

(i) $T_{c,k} \geqslant \gamma - (A\min(\lambda_k, c) + \varepsilon_k)\omega$, *avec $(\lambda_k)_k$ une suite décroissante de fonctions continues sur K et $\lim_{k\to\infty} \lambda_k(x) = \nu(T, x)$ en tout point $x \in K$.*

(ii) ε_k *positive décroissante vers* 0.

(iii) $\nu_{T_{c,k}}(x) = (\nu_T(x) - c)_+$ *pour tout* $x \in K$.

Pour démontrer ce théorème, on peut reprendre les techniques de calcul de Demailly dans [Dem92] pour la régularisation des courants positifs fermés de type $(1,1)$ et on montre la condition locale de la courbure du fibré tautologique associé à TX dans le cas où X est une variété analytique kählérienne non nécessairement compacte. On démontre les deux résultats suivants :

Lemme 2.3. — *Soient X une variété analytique kählérienne de dimension n, munie d'une métrique kählérienne ω et K un compact de X, alors il existe une constante A positive telle que la courbure $\Theta(TX)$ associée au fibré tangent TX vérifie*

$$\mathrm{i}\Theta(TX) + A\omega \otimes Id_{TX} \geqslant 0 \quad \text{sur } K \textit{ au sens de Griffiths.}$$

Proposition 2.4. — *Soit X une variété analytique kählérienne de dimension n, et soit K un compact de X, alors il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$\mathrm{i}\Theta(\mathcal{O}_{TX}(1)) + A\pi^\star(\omega) \geqslant 0 \textit{ sur } \pi^{-1}(K)$$

$\pi\colon P(T^\star X) \longmapsto X$ la projection naturelle.

2.3. Contrôle du nombre de Lelong d'un produit de courants

On se propose dans ce paragraphe de prouver que si T est un (1,1)-courant positif fermé sur une variété analytique kählérienne X de dimension n, tel que les pôles sont dans un compact K de l'intérieur de X et si les nombres de Lelong de ce courant sont nuls sauf sur un ensemble au plus dénombrable, alors la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ de ces nombres de Lelong est majorée par $\int_K T^n$. Plus généralement on montre le résultat suivant :

Théorème 2.5. — *Soient X une variété analytique kählérienne de dimension n, $T_1, \dots, T_n$ des (1,1)-courants positifs fermés à pôles dans un compact K de X ($T_j = \alpha_j + dd^c\psi_j$ sur un voisinage U de K, avec α_j une*

(1,1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $\psi_j \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(U \setminus K)$ et presque Psh*). On suppose que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ et pour tout $c > 0$, $E_c(T_j)$ est fini, alors*

$$\int_K T_1 \wedge \ldots \wedge T_n \geqslant \sum_{x \in K} \nu_{T_1}(x) \ldots \nu_{T_n}(x).$$

Démonstration. — Soient $(K_\delta)_\delta$ une famille de compacts décroissante vers K lorsque δ tend vers 0 et L un compact de X contenant K dans son intérieur. Pour $\delta, c > 0$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ fixés (on suppose que δ et assez petit pour que $K_\delta \subset\subset L$), nous appliquons le théorème 2.2) pour le courant T_j ($T_j = \alpha_j + dd^c\psi_j$ sur L) et le compact K_δ, alors il existe une suite de courants presque positifs $(T_{j,c,k})_k = (\alpha_j + dd^c\psi_{j,c,k})_k$ qui converge faiblement vers T_j sur L ($(\psi_{j,c,k})_k$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $L \setminus E_c(T_j)$ est décroissante vers ψ_j). Il existe de plus une constante $A > 0$ telle que

$$\alpha_j + dd^c\psi_{j,c,k} + (cA + \varepsilon_{j,k})\omega \geqslant 0 \quad \text{sur } L$$

$(\varepsilon_{j,k})_k$ décroissante vers 0.

L'ensemble des pôles des fonctions $\psi_{j,c,k}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, est inclus dans $A_c := \cup_{j=1}^n E_c(T_j)$ donc fini. Pour tout $x \in A_c$ on considère la famille $(v_\varepsilon(x))_\varepsilon$ de voisinages de x telle que $\lim_{\varepsilon \to 0} v_\varepsilon(x) = \{x\}$. En choisissant ε assez petit, on peut supposer que les $v_\varepsilon(x)$ sont disjoints. Alors

$$\begin{aligned}
&\int_{K_\delta} (\alpha_1 + dd^c\psi_{1,c,k} + (cA + \varepsilon_{1,k})\omega) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n + dd^c\psi_{n,c,k} + (cA + \varepsilon_{n,k})\omega) \\
&\quad \geqslant \sum_{x \in A_c} \int_{v_\varepsilon(x)} (\alpha_1 + dd^c\psi_{1,c,k} + (cA + \varepsilon_{1,k})\omega) \wedge \ldots \wedge \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha_n + dd^c\psi_{n,c,k} + (cA + \varepsilon_{n,k})\omega) \\
&\quad \geqslant \sum_{x \in A_c} \nu_{T_{1,c,k} \wedge \ldots \wedge T_{n,c,k}}(x).
\end{aligned}$$

Pour la suite de la démonstration on utilise la proposition suivante de Demailly [Dem93b]

Proposition 2.6. — *Soit φ une fonction* Psh *sur une variété analytique X de dimension m, telle que l'ensemble $A = \{\varphi = -\infty\}$ est un sous ensemble analytique de codimension $\geqslant p + 1$ en tout point et φ est* *localement bornée sur $X \setminus A$, alors pour tout courant positif fermé T de bidimension (p,p) sur X et pour tout $x \in X$ on a :*

$$\nu(T \wedge \frac{\mathrm{i}}{\pi}\partial\bar{\partial}\varphi, x) \geqslant \nu(T,x)\nu(\varphi,x).$$

Cette proposition entraîne que

$$\nu_{T_{1,c,k}\wedge\ldots\wedge T_{n,c,k}}(x) \geqslant \nu_{T_{1,c,k}}(x)\ldots\nu_{T_{n,c,k}}(x)$$

et par suite on a :

$$\int_{K_\delta}(\alpha_1 + dd^c\psi_{1,c,k} + (cA+\varepsilon_{1,k})\omega)\wedge\ldots\wedge(\alpha_n + dd^c\psi_{n,c,k} + (cA+\varepsilon_{n,k})\omega) \geqslant \sum_{x\in A_c}\nu_{T_{1,c,k}}(x)\ldots\nu_{T_{n,c,k}}(x).$$

Par le théorème 2.2, iii) et le théorème de convergence monotone on a :

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 0}\lim_{k\to+\infty}\sum_{x\in A_c}\nu_{T_{1,c,k}}(x)\ldots\nu_{T_{n,c,k}}(x) &= \lim_{c\to 0}\lim_{k\to+\infty}\sum_{x\in A}\nu_{T_{1,c,k}}(x)\ldots\nu_{T_{n,c,k}}(x)\\ &= \lim_{c\to 0}\sum_{x\in A}(\nu_{T_1}(x)-c)_+\ldots(\nu_{T_n}(x)-c)_+\\ &= \sum_{x\in A}\nu_{T_1}(x)\ldots\nu_{T_n}(x),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{c\to 0}\lim_{k\to+\infty}\int_{K_\delta}&(\alpha_1 + dd^c\psi_{1,c,k} + (cA+\varepsilon_{1,k})\omega)\wedge\ldots\\ &\wedge(\alpha_n + dd^c\psi_{n,c,k} + (cA+\varepsilon_{n,k})\omega)\\ \geqslant &\sum_{x\in A}\nu_{T_1}(x)\ldots\nu_{T_n}(x).\end{aligned}\tag{6}$$

D'autre part, pour ν réel assez grand on a :

$$\begin{aligned}&\int_{K_\delta}(\alpha_1 + dd^c\psi_{1,c,k} + (cA+\varepsilon_{1,k})\omega)\wedge\ldots\wedge(\alpha_n + dd^c\psi_{n,c,k} + (cA+\varepsilon_{n,k})\omega)\\ &= \int_{K_\delta}(\alpha_1 + dd^c\max(\psi_{1,c,k},-\nu) + (cA+\varepsilon_{1,k})\omega)\wedge\ldots\\ &\qquad\wedge(\alpha_n + dd^c\max(\psi_{n,c,k},-\nu) + (cA+\varepsilon_{n,k})\omega).\end{aligned}$$

$(\max(\psi_{j,c,k}, -\nu))_k$ étant décroissante vers $\max(\psi_j, -\nu)$, alors d'après Bedford-Taylor [Be&Ta82] on a :

(7)

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{K_\delta}(\alpha_1 + dd^c\psi_{1,c,k} + (cA+\varepsilon_{1,k})\omega) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n + dd^c\psi_{n,c,k} + (cA+\varepsilon_{n,k})\omega)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_{K_\delta}(\alpha_1 + dd^c\max(\psi_{1,c,k}, -\nu) + (cA+\varepsilon_{1,k})\omega) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n + dd^c\max(\psi_{n,c,k}, -\nu) + (cA+\varepsilon_{n,k})\omega)$$

$$\leqslant \int_{K_\delta}(\alpha_1 + dd^c\max(\psi_1, -\nu) + cA\omega) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n + dd^c\max(\psi_n, -\nu) + cA\omega)$$

donc

$$\lim_{c\to 0}\lim_{k\to+\infty}\int_{K_\delta}(\alpha_1 + dd^c\psi_{1,c,k} + (cA+\varepsilon_{1,k})\omega) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n + dd^c\psi_{n,c,k} + (cA+\varepsilon_{n,k})\omega)$$

$$\leqslant \int_{K_\delta}(\alpha_1 + dd^c\max(\psi_1, -\nu)) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n + dd^c\max(\psi_n, -\nu))$$

(6) et (7) impliquent que

$$\int_K T_1 \wedge \ldots \wedge T_n = \lim_{\delta\to 0}\lim_{\nu\to+\infty}\int_{K_\delta}(\alpha_1 + dd^c\max(\psi_1, -\nu)) \wedge \ldots \wedge (\alpha_n + dd^c\max(\psi_n, -\nu)) \geqslant \sum_{x\in A}\nu_{T_1}(x)\ldots\nu_{T_n}(x).$$

□

3. Transformé strict de courants positifs fermés de type (1,1).

Nous commençons tout d'abord par quelques rappels sur la notion d'éclatement d'une variété analytique au dessus d'un point, et pour plus de détails, le lecteur peut consulter [Gr&Ha78] et [Dem00].

3.1. Rappels sur l'éclatement d'une variété analytique au dessus d'un point.

Soient X une variété analytique de dimension n, $x \in X$ et $(z_1, \dots, z_n)$ un système de coordonnées local sur un voisinage U de x centré en x. Soit $\tilde{U}$ la sous-variété de $U \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ définie par

$$\tilde{U} = \{(z, \eta) = (z_1, \dots, z_n, \eta_1, \dots, \eta_n) \in U \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C});\\ z_i\eta_j = z_j\eta_i,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\},$$

on considère la projection naturelle $\pi: \tilde{U} \longmapsto U$, alors $\tilde{U} \setminus \pi^{-1}(x)$ est isomorphe à $U \setminus \{x\}$

L'éclatement de X au dessus de x est une variété analytique $\tilde{X} = X \setminus \{x\} \cup \pi^{-1}(x)$ avec une application holomorphe $\mu: \tilde{X} \longmapsto X$ telle que la restriction de μ sur $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(x)$ est un biholomorphisme de $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(x)$ dans $X \setminus \{x\}$ et $\mu_{|\pi^{-1}(x)} = \pi$. L'hypersurface lisse $\tilde{Y} = \mu^{-1}(x)$ est appelée diviseur exceptionnel de l'éclatement, cette hypersurface est isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

Soit le recouvrement de $\tilde{U}$ par les ouverts $(\tilde{U}_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ tels que

$$\tilde{U}_j = \{(z, \eta) \in \tilde{U};\ \eta_j \neq 0\}$$

en considérant le système de coordonnées local

$$(\omega_1, \dots, \omega_n)(\frac{\eta_1}{\eta_j}, \dots, \frac{\eta_{j-1}}{\eta_j}, z_j, \frac{\eta_{j+1}}{\eta_j}, \dots, \frac{\eta_n}{\eta_j})$$

sur $\tilde{U}_j$ l'application μ est donnée par

$$\mu_{|\tilde{U}_j}: \begin{array}{c} \tilde{U}_j \longmapsto U \\ \omega \longmapsto (\omega_1\omega_j, \dots, \omega_{j-1}\omega_j, \omega_j, \omega_{j+1}\omega_j, \dots, \omega_n\omega_j). \end{array}$$

Le diviseur $\tilde{Y}$ est donné par $\{\omega_j = 0\}$ sur $\tilde{U}_j$ et le fibré en droite $\mathcal{O}(\tilde{Y})$ sur $\tilde{X}$ tel que les fonctions de transitions sont $g_{ij} = \dfrac{\omega_i}{\omega_j}$ sur $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ vérifie :

$$\mathcal{O}(\tilde{Y})_{|\tilde{Y}} \text{ est isomorphe au fibré tautologique } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})}(-1).$$

3.2. Transformés stricts de courants positifs fermés de type (1,1) et masse du produit.

Soient X une variété analytique kählérienne de dimension n, $\mu\colon \tilde{X} \longmapsto X$ l'éclatement de X au dessus d'un point x et $\tilde{Y}$ le diviseur exceptionnel de cet éclatement. Pour T un courant positif fermé de bidegré (1,1) sur X, S. Giret [Gir98] a montré que le prolongement trivial $\tilde{T}$ du courant $\mu^\star T$ à travers $\tilde{Y}$ existe et est appelé le transformé strict de T, de plus $\tilde{T} = \mu^\star T - \nu_T(x)[\tilde{Y}]$. Dans ce sous-paragraphe, on montre que si T est à pôles dans un compact $K \ni x$ de X, alors pour tout réel c vérifiant $c \leqslant \nu_T(x)$, on a $\int_{\mu^{-1}(K)}(\mu^\star T - c[\tilde{Y}])^n = \int_K T^n - c^n$. Plus généralement, si $T_1, \dots, T_n$ sont des (1,1)-courants positifs fermés tels que les pôles sont dans K compact de l'intérieur de X et $c_j \leqslant \nu_{T_j}(x)$, alors

$$\int_{\mu^{-1}(K)} (\mu^\star T_1 - c_1[\tilde{Y}]) \wedge \dots \wedge (\mu^\star T_n - c_n[\tilde{Y}]) \leqslant \int_K T_1 \wedge \dots \wedge T_n - \prod_{j=1}^{n} c_j.$$

Proposition 3.1. — *Soit $\mu\colon \tilde{X} \longmapsto X$ l'éclatement de X au dessus de x tel que $\tilde{Y}$ est le diviseur exceptionnel, alors*

$$\int_{\tilde{X}} [\tilde{Y}]^n = (-1)^{n-1}$$

Ceci résulte du fait bien connu que $\mathcal{O}(\tilde{Y})_{\restriction \tilde{Y}} \approx \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}(-1)}$.

Proposition 3.2. — *Soient $T_1, \dots, T_p$ des courants presque positifs fermés de bidegré (1,1) sur une variété analytique kählérienne X de dimension n, $1 \leqslant p < n$. Soit K un compact de X, on suppose que pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$, T_j est à pôles dans K. Pour $x \in K$ on considère l'éclatement $\mu\colon \tilde{X} \longmapsto X$ de X au dessus de x. On note $\tilde{Y}$ le diviseur exceptionnel de cet éclatement, alors pour tous courants presque positifs fermés de bidegrés (1,1) $\Theta_{p+1}, \dots, \Theta_{n-1}$ sur $\tilde{X}$ à pôles dans $\mu^{-1}(K)$ on a :*

$$\int_{\mu^{-1}(K)} \mu^\star(T_1) \wedge \dots \wedge \mu^\star(T_p) \wedge \Theta_{p+1} \wedge \dots \wedge \Theta_{n-1} \wedge [\tilde{Y}] = 0.$$

Démonstration. — Soient $\tilde{K} = \mu^{-1}(K)$ et $(K_\delta)_\delta$ une famille exhaustive de compacts qui décroît vers K lorsque δ tend vers 0, et soient

$\tilde{K}_\delta = \mu^{-1}(K_\delta)$, $\delta > 0$. Puisque $\mathrm{Supp}[\tilde{Y}] \cap \partial\tilde{K}_\delta = \varnothing$ et par la formule de Stokes on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{K}} \mu^\star(T_1) \wedge \ldots \wedge \mu^\star(T_p) \wedge \Theta_{p+1} \wedge \ldots \wedge \Theta_{n-1} \wedge [\tilde{Y}] \\
&= \lim_{\delta\to 0} \lim_{\nu\to+\infty} \int_{\tilde{K}_\delta} \mu^\star(\alpha_1 + dd^c \max(\varphi_1, -\nu)) \\
&\qquad\qquad \wedge \ldots \wedge \mu^\star(\alpha_p + dd^c \max(\varphi_p, -\nu)) \\
&\qquad\qquad \wedge (\beta_{p+1} + dd^c \max(\psi_{p+1}, -\nu)) \\
&\qquad\qquad \wedge \ldots \wedge (\beta_{n-1} + dd^c \max(\psi_{n-1}, -\nu)) \wedge [\tilde{Y}] \\
&= \int_{\tilde{K}} \mu^\star(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge \mu^\star(\alpha_p) \wedge \beta_{p+1} \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1} \wedge [\tilde{Y}],
\end{aligned}$$

avec $T_j = \alpha_j + dd^c\varphi_j$ et $\Theta_k = \beta_k + dd^c\psi_k$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$ et $p+1 \leqslant k \leqslant n-1$. Soit g une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur X à support compact, telle que $g \equiv 1$ sur un voisinage de x, alors

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{K}} \mu^\star(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p) \wedge \beta_{p+1} \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1} \wedge [\tilde{Y}]& \\
&= \int_{\tilde{K}} \mu^\star(g\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p) \wedge \beta_{p+1} \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1} \wedge [\tilde{Y}] \\
&= \langle \beta_{p+1} \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1} \wedge [\tilde{Y}], \mu^\star(g\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p)\rangle \\
&= \langle \mu_\star(\beta_{p+1} \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1} \wedge [\tilde{Y}]), g\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p\rangle = 0
\end{aligned}$$

car $\mathrm{Supp}(\mu_\star(\beta_{p+1} \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1} \wedge [\tilde{Y}])) \subset \mathrm{Supp}(\mu_\star([\tilde{Y}])) \subset \mu(\mathrm{Supp}([\tilde{Y}])) = \{x\}$. □

Théorème 3.3. — *Soient X une variété analytique de dimension n, $\mu\colon \tilde{X} \longmapsto X$ l'éclatement de X au dessus de x et $T_1, \ldots, T_n$ n courants presque positifs fermés de bidegrés (1,1) et à pôles dans un compact $K \ni x$ de X, alors pour tous $0 \leqslant c_j \leqslant \nu_{T_j}(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ on a :*

$$\int_{\mu^{-1}(K)} (\mu^\star T_1 - c_1[\tilde{Y}]) \wedge \ldots \wedge (\mu^\star T_n - c_n[\tilde{Y}]) = \int_K T_1 \wedge \ldots \wedge T_n - \prod_{j=1}^{n} c_j.$$

Démonstration. — Dans le développement de

$$\int_{\mu^{-1}(K)} (\mu^\star T_1 - c_1[\tilde{Y}]) \wedge \ldots \wedge (\mu^\star T_n - c_n[\tilde{Y}])$$

les termes

$$\prod_{k\in \complement\{j_1,\ldots,j_p\}} c_k \int_{\mu^{-1}(K)} \mu^\star(T_{j_1}) \wedge \ldots \wedge \mu^\star(T_{j_p}) \wedge [\tilde{Y}]^{n-p}$$

avec $\{j_1,\ldots j_p\} \subset \{1,\ldots n\}$ et $1 \leqslant p \leqslant n-1$ sont tous nuls d'après la proposition 3.2), alors

$$\begin{aligned} &\int_{\mu^{-1}(K)} (\mu^\star T_1 - c_1[\tilde{Y}]) \wedge \ldots \wedge (\mu^\star T_n - c_n[\tilde{Y}]) \\ &\qquad = \int_{\mu^{-1}(K)} \mu^\star T_1 \wedge \ldots \wedge \mu^\star T_n + \prod_{j=1}^{n} (-c_j) \int_{\mu^{-1}(K)} [\tilde{Y}]^n. \end{aligned} \tag{8}$$

La proposition 3.1) implique que

$$\prod_{j=1}^{n} (-c_j) \int_{\mu^{-1}(K)} [\tilde{Y}]^n = -\prod_{j=1}^{n} (c_j).$$

Soient K_δ une famille exhaustive de compacts décroissante vers K lorsque δ tend vers 0, $\tilde{K}_\delta := \mu^{-1}(K_\delta)$, α_j une (1,1)-forme $\mathcal{C}^\infty$ et $(\varphi_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ des fonctions presque Psh telles que les pôles sont dans K et $T_j = \alpha_j + dd^c\varphi_j$ au voisinage de K, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mu^{-1}(K)} \mu^\star T_1 \wedge \ldots \wedge \mu^\star T_n \lim_{\delta\to 0} \lim_{\nu\to+\infty} \int_{\tilde{K}_\delta} \mu^\star(\alpha_1 + dd^c \max(\varphi_1, -\nu)) \wedge \ldots \\ \wedge\, \mu^\star(\alpha_n + dd^c \max(\varphi_n, -\nu)). \end{aligned}$$

Pour tous $1 \leqslant p \leqslant n$ et $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant n$ on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{K}_\delta} \mu^\star dd^c \max(\varphi_{j_1}, -\nu) \wedge \ldots \wedge \mu^\star dd^c \\
&\qquad\qquad \max(\varphi_{j_p}, -\nu) \wedge \mu^\star(\alpha_{j_{p+1}}) \wedge \ldots \wedge \mu^\star(\alpha_{j_n}) \\
&= \int_{\partial\tilde{K}_\delta} \mu^\star d^c \max(\varphi_{j_1}, -\nu) \wedge \ldots \wedge \mu^\star dd^c \\
&\qquad\qquad \max(\varphi_{j_p}, -\nu) \wedge \mu^\star(\alpha_{j_{p+1}}) \wedge \ldots \wedge \mu^\star(\alpha_{j_n}) \\
&= \int_{\partial K_\delta} d^c \max(\varphi_{j_1}, -\nu) \wedge \ldots \wedge dd^c \\
&\qquad\qquad \max(\varphi_{j_p}, -\nu) \wedge \alpha_{j_{p+1}} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_n} \\
&= \int_{K_\delta} dd^c \max(\varphi_{j_1}, -\nu) \wedge \ldots \wedge dd^c \\
&\qquad\qquad \max(\varphi_{j_p}, -\nu) \wedge \alpha_{j_{p+1}} \wedge \ldots \wedge \alpha_{j_n},
\end{aligned} \tag{9}$$

car μ est un biholomorphisme sur un voisinage de $\partial\tilde{K}_\delta$. De même on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{K}_\delta} \mu^\star(\alpha_1) \wedge \ldots \wedge \mu^\star(\alpha_n) &= \int_{\tilde{K}_\delta} \mu^\star(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \\
&= \int_{K_\delta} \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n
\end{aligned} \tag{10}$$

car $\mu^\star$ est un biholomorphisme sur l'ouvert dense $\tilde{X} \setminus \tilde{Y}$ et la forme $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ est $\mathcal{C}^\infty$. Par les égalités (9) et (10) on a :

$$\int_{\mu^{-1}(K)} \mu^\star T_1 \wedge \ldots \wedge \mu^\star T_n \int_K T_1 \wedge \ldots \wedge T_n, \tag{11}$$

et par (9), (10) et (11) on a :

$$\int_{\mu^{-1}(K)} (\mu^\star T_1 - c_1[\tilde{Y}]) \wedge \ldots \wedge (\mu^\star T_n - c_n[\tilde{Y}]) = \int_K T_1 \wedge \ldots \wedge T_n - \prod_{j=1}^n c_j.$$

3.3. Singularités du transformé strict d'un courant positif fermé de type (1,1).

On se propose maintenant d'étudier les singularités du transformé strict de $dd^c\varphi$, avec φ une fonction Psh sur X par éclatement $\mu\colon \tilde{X} \longmapsto X$

au dessus d'un point x de X. On commence l'étude pour les fonctions à singularités logarithmiques, puis en approximant φ par de telles fonctions (on considère la suite $(\psi_m)_m$ des fonctions définies dans [Dem93b] qui approximent φ de point de vue singularités et pour la topologie de L^1_{loc}), on montre que les nombres de Lelong des transformés stricts $\tilde{T}_m = \mu^\star T_m - \gamma_m[\tilde{Y}]$ approximent ceux de $\tilde{T} = \mu^\star T - \gamma[\tilde{Y}]$, avec $T_m = dd^c\psi_m$, $\gamma_m = \nu_{T_m}(x)$, $T = dd^c\varphi$ et $\gamma = \nu_T(x)$. On retrouve à l'aide de cette approximation des propriétés importantes concernant les pôles du transformé strict $\tilde{T}$ de T.

Nous rappelons par la suite le théorème d'approximation des fonctions Psh par des logarithmes de fonctions holomorphes. Ce théorème a été démontré par P. Lelong [Lel76] et J-P. Demailly [Dem93b].

Théorème 3.4. [Dem93b]. — *Soit φ une fonction* Psh *sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Pour tout entier $m > 0$, on note $\mathcal{H}_{m\varphi}(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes f sur Ω telles que $\displaystyle\int_\Omega |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda < +\infty$, et $\displaystyle\psi_m = \frac{1}{2m}\log\sum_k |g_{m,k}|^2$, avec $(g_{m,k})$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}_{m\varphi}(\Omega)$. Alors*

(i) *Il existe deux constantes C_1 et C_2 positives indépendantes de m ; telles que*

$$\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \leqslant \psi_m(z) \leqslant \sup_{|\zeta - z| < r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m}\log\Big(\frac{C_2}{r^n}\Big)$$

pour $z \in \Omega$ et $r < d(z, \partial\Omega)$. En particulier, la suite $(\psi_m)_m$ converge vers φ simplement et pour la topologie de $L^1_{loc}(\Omega)$.

(ii) *Les nombres de Lelong de φ et ψ_m sont liés par la relation*

$$\nu(\varphi, z) - \frac{n}{m} \leqslant \nu(\psi_m, z) \leqslant \nu(\varphi, z)$$

pour tout $z \in \Omega$.

Proposition 3.5. — *Soient T un (1,1)-courant positif fermé sur une variété analytique X de dimension n, $\mu: \tilde{X} \longmapsto X$ l'éclatement de X au dessus d'un point x, alors pour tout point $a \in \tilde{Y}$ on a :*

$$\lim_{m \to +\infty} \nu_{\tilde{T}_m}(a) = \nu_{\tilde{T}}(a).$$

Démonstration. — Soit φ une fonction Psh telle que $T = dd^c\varphi$ sur un voisinage de x. On suppose que $x = 0$ et on considère le recouvrement de $\tilde{U}$ par la famille d'ouverts $(\tilde{U}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ définie dans (3.1). Soit $a \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{Y}$, d'après le théorème d'approximation 3.4), pour tout point z de U on a :

$$\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \leqslant \psi_m(z),$$

alors

$$\mu^\star\varphi - \frac{C_1}{m} \leqslant \mu^\star\psi_m \ \text{ sur } \tilde{U}_1,$$

et par suite on a :

$$\lim_{m\to+\infty} \nu_{\tilde{T}_m}(a) \leqslant \nu_{\tilde{T}}(a) \quad \forall a \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{Y}. \tag{12}$$

Pour démontrer l'inégalité inverse, nous utilisons les mêmes techniques que dans la démonstration du théorème 3.4) de Demailly. La somme $\sum\limits_k |g_{m,k}(z)|^2$ est le carré de la norme de la forme linéaire

$$L_z\colon f \longmapsto f(z) \ \text{ sur } \mathcal{H}_{m\varphi}(\Omega),$$

car

$$||L_z||^2 = \sum_k |L_z(g_{m,k}(z))|^2,$$

donc

$$||L_z|| = \big(\sum_k |g_{m,k}(z)|^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $\Omega = B(0,r_0) \subset X$, r_0 assez petit, cette égalité montre que $\big(\sum_{k=0}^\infty |g_{m,k}(z)|^2\big)^{\frac{1}{2}}$ converge uniformément sur tout compact ; en effet :

Si on se donne un compact K de Ω, pour tout point z de K on a :

$$\big(\sum_{k=0}^\infty |g_{m,k}(z)|^2\big)^{\frac{1}{2}} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_{m\varphi}(\Omega)}\leqslant 1} |L_z(f)|.$$

Soit $f \in B(1)$ la boule unité de $\mathcal{H}_{m\varphi}(\Omega)$, φ est localement majorée, donc

$$\sup_K |f(z)|^2 \leqslant M_1 \int_\Omega |f|^2 d\lambda \leqslant M_2 \int_\Omega |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leqslant M_2,$$

donc

$$\sup_{z\in K}\Big(\sup_{\|f\|_{\mathcal{H}_{m\varphi}(\Omega)}\leqslant 1} |f(z)|\Big) \leqslant M_2,$$

et par suite $\sum_k |g_{m,k}(z)|^2$ est uniformément majorée sur K.

De plus on a :

$$\psi_m(z) = \sup_{B(1)} \frac{1}{m} \log |f(z)|.$$

Supposons que $\nu_\varphi(0) > 0$. Pour r_1 assez petit, $z \in B(a, r_1) \in \mu^{-1}(B(0, r_0))$ et $r < \mathrm{d}(z, \partial B(a, r_1))$, l'inégalité de la moyenne appliquée à la fonction plurisousharmonique $|f \circ \mu_1|^2$ donne :

$$\begin{aligned}
|f \circ \mu_1(z)|^2 &\leqslant \frac{n!}{\pi^n r^{2n}} \int_{|\zeta - z| < r} |f \circ \nu_1(\zeta)|^2 d\tilde{\lambda}(\zeta) \\
&\leqslant \frac{n!}{\pi^n r^{2n}} e^{2m \sup_{|\zeta - z| < r} \tilde{\varphi}_1(\zeta)} \\
&\qquad\qquad \int_{B(z,r)} |f \circ \mu_1(\zeta)|^2 e^{-2m(\tilde{\varphi}_1(\zeta))} d\tilde{\lambda} \\
&\leqslant \frac{n!}{\pi^n r^{2n}} e^{2m \sup_{|\zeta - z| < r} (\tilde{\varphi}_1(\zeta))} \\
&\qquad\qquad \int_{B(z,r)} |f \circ \mu_1(\zeta)|^2 e^{-2m\varphi \circ \mu_1(\zeta)} |\mathrm{det} J(\mu_1)|^2 d\tilde{\lambda}(\zeta) \\
&\leqslant \frac{n!}{\pi^n r^{2n}} e^{2m \sup_{|\zeta - z| < r} (\tilde{\varphi}_1(\zeta))} \int_{\mu_1(B(z,r))} |f(\zeta)|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda.
\end{aligned}$$

avec $\tilde{\varphi}_1(\zeta) = \varphi \circ \mu_1(\zeta) - \frac{n-1}{m} \log |\zeta_1|$. Comme $\nu_\varphi(0) > 0$, alors la fonction $\tilde{\varphi}_1(\zeta) = \varphi \circ \mu_1(\zeta) - \frac{n-1}{m} \log |\zeta_1|$ est Psh pour m assez grand et

$$\sup_{f \in B(1)} (\frac{2}{m} \log |f \circ \mu_1(z)|) \leqslant \frac{1}{m} \log(\frac{n!}{\pi^n r^{2n}}) + 2 \sup_{|\zeta - z| < r} (\varphi \circ \mu_1(\zeta) - \frac{n-1}{m} \log |\zeta_1|),$$

ce qui prouve que

$$\psi_m \circ \mu_1(z) \leqslant \sup_{|\zeta - z| < r} (\varphi \circ \mu_1(\zeta) - \frac{n-1}{m} \log |\zeta_1|) + \frac{1}{2m} \log(\frac{n!}{\pi^n r^{2n}}),$$

donc

$$\sup_{|x - z| < r} \psi_m \circ \mu_1(x) \leqslant \sup_{|\zeta - z| < 2r} (\varphi \circ \mu_1(\zeta) - \frac{n-1}{m} \log |\zeta_1|) + \frac{1}{m} \log \ \frac{C_2}{r^n}.$$

En divisant par log r et en faisant tendre r vers 0 on trouve

$$\nu_{\psi_m \circ \mu_1}(z) \geqslant \nu_{\varphi \circ \mu_1 - \frac{n-1}{m} \log |\zeta_1|}(z) - \frac{n}{m} = \nu_{\varphi \circ \mu_1}(z) - \frac{2n-1}{m}.$$

En faisant tendre m maintenant vers l'infini on obtient

$$\lim_{m\to+\infty} \nu_{\tilde{T}_m}(a) \geqslant \nu_{\tilde{T}}(a). \tag{13}$$

D'après (12) et (13)

$$\lim_{m\to+\infty} \nu_{\tilde{T}_m}(a) = \nu_{\tilde{T}}(a).$$

□

Proposition 3.6. (*cf.* Abrahamsson [Abr88]). — *Soit T un (1,1)-courant positif fermé sur une variété analytique X de dimension n et $\mu\colon \tilde{X} \longmapsto X$ l'éclatement de X au dessus d'un point x. Soit $\tilde{Y}$ le diviseur exceptionnel de μ et $\tilde{T} = \mu^* T - \nu_T(x)[\tilde{Y}]$, alors*

$$\nu_{\tilde{T}}(a) \leqslant \nu_T(x) \quad \forall\ a \in \tilde{Y}.$$

Démonstration. — Supposons que $x = 0$. On rappelle que pour le recouvrement $(\tilde{U}_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de $\tilde{Y}$, la restriction de μ sur chacun des $\tilde{U}_j$ est donnée par

$$\mu_{|\tilde{U}_j}\colon (\omega_1, \dots, \omega_n) \longmapsto (\omega_j\omega_1, \dots, \omega_j\omega_{j-1}, \omega_j, \omega_j\omega_{j+1}, \dots, \omega_j\omega_n)$$

Soit $a \in \tilde{Y}$, on suppose que $a \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{Y}$. $T = dd^c\varphi$ sur un voisinage de $0 \in X$. φ est approximée par la suite $(\psi_m)_m$ (définie dans le théorème 3.4), avec les notations de ce théorème, pour tout z dans un voisinage de 0 dans X on a :

$$g_{m,k}(z_1, .., z_n) \sum_{|\alpha_{m,k}|} b_{\alpha_{m,k}} z_1^{\alpha_{m,k,1}} \dots z_n^{\alpha_{m,k,n}}$$

avec $\alpha_{m,k} = (\alpha_{m,k,1}, \dots, \alpha_{m,k,n})$ et $|\alpha_{m,k}| = \alpha_{m,k,1} + \dots + \alpha_{m,k,n}$ on a aussi

$$\begin{aligned}\psi_m(z_1, \dots, z_n) &= \frac{1}{2m} \log \sum_k |g_{m,k}(z_1, \dots, z_n)|^2 \\ &= \frac{1}{2m} \log \sum_k |\sum_{|\alpha_{m,k}|} b_{\alpha_{m,k}} z_1^{\alpha_{m,k,1}} \dots z_n^{\alpha_{m,k,n}}|^2.\end{aligned}$$

Soit $\psi_{m,1}$ la fonction Psh sur $\tilde{U}_1$ définie par :

$$\psi_{m,1}(\omega_1, .., \omega_n) = \mu^\star_{|\tilde{U}_1}\psi_m(\omega_1, \dots, \omega_n) - \gamma_m \log|\omega_1|,$$

avec $\gamma_m = \nu_{\psi_m}(0)$. Désignons par β_m le minimum des multiplicités des fonctions $g_{m,k}$ en 0, alors $\beta_m = \inf\{|\alpha_{m,k}| \text{ tel que } b_{\alpha_{m,k}} \neq 0,\ k \in \mathbb{N}\}$ vérifie $\beta_m = m\nu_{\psi_m} = m\gamma_m$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\psi_{m,1}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \mu^\star_{|\tilde{U}_1}\psi_m(\omega_1, \dots, \omega_n) - \frac{\beta_m}{m}\log|\omega_1| \\ &= \frac{1}{2m}\log\sum_k \Big|\sum_{|\alpha_{m,k}|} b_{\alpha_{m,k}}\omega_1^{|\alpha_{m,k}|}\dots\omega_n^{\alpha_{m,k,n}}\Big|^2 \\ &\qquad - \frac{1}{2m}\log|\omega_1|^{2\beta_m} \\ &= \frac{1}{2m}\log\sum_k \Big|\sum_{|\alpha_{m,k}|} b_{\alpha_{m,k}}\omega_1^{|\alpha_{m,k}|-\beta_m}\omega_2^{\alpha_{m,k,2}}\dots\omega_n^{\alpha_{m,k,n}}\Big|^2.\end{aligned}$$

Pour $|\alpha_{m,k}| = \beta_m$ on a :

$$\sum_{|\alpha_{m,k}|=\beta_m} b_{\alpha_{m,k}}\omega_1^{|\alpha_{m,k}|-\beta_m}\omega_2^{\alpha_{m,k,2}}\dots\omega_n^{\alpha_{m,k,n}} \sum_{|\alpha_{m,k}|=\beta_m} b_{\alpha_{m,k}}\omega_2^{\alpha_{m,k,2}}\dots\omega_n^{\alpha_{m,k,n}},$$

la multiplicité de ce polynôme en tout point $a = (0, a_2, \dots, a_n) \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{Y}$ est inférieure à

$$\alpha_{m,k,2} + \dots + \alpha_{m,k,n} \leqslant |\alpha_{m,k}| = \beta_m$$

alors la multiplicité de

$$\sum_{|\alpha_{m,k}|} b_{\alpha_{m,k}}\omega_1^{|\alpha_{m,k}|-\beta_m}\omega_2^{\alpha_{m,k,2}}\dots\omega_n^{\alpha_{m,k,n}}$$

est inférieure à β_m, et par suite

$$\nu_{\psi_{m,1}}(a) \leqslant \gamma_m$$

d'après la proposition 3.5), $\nu_{\tilde{T}_m}(a)$ converge vers $\nu_{\tilde{T}}(a)$ lorsque m tend vers l'infini, donc

$$\nu_{\tilde{T}}(a) \leqslant \nu_T(x)$$

□

Remarque. — Si φ est une fonction Psh logarithmique (*i.e.* $\varphi = \log\sum_k|g_k|$, les g_k sont des fonctions holomorphes) sur un voisinage de

$x \in X$. Pour $\gamma = \nu_\varphi(x)$, on a l'ensemble des pôles de $\tilde{T} = \mu^\star dd^c\varphi - \gamma[\tilde{Y}]$ dans $\tilde{Y}$ est un sous ensemble analytique de $\tilde{Y}$ de dimension $\leqslant n-2$. En effet ; supposons que $x = 0$, pour tout z dans un voisinage de 0 dans X on a :

$$\begin{aligned}\varphi(z_1, \dots, z_n) &= \log \sum_k |g_k(z_1, \dots, z_n)| \\ &= \log \sum_k |\sum_{|\alpha_k|} b_{\alpha_k} z_1^{\alpha_{k,1}} \dots z_n^{\alpha_{k,n}}|.\end{aligned}$$

Soit β le minimum des multiplicités des polynômes g_k, alors $\gamma = \beta$ et pour tout $\omega \in \tilde{U}_1$, on a :

$$\varphi_1(\omega) := \mu^\star\varphi(\omega) - \gamma \log |\omega_1| = \sum_k |\sum_{|\alpha_k|} b_{\alpha_k} \omega_1^{|\alpha_k|-\beta} \omega_2^{\alpha_{k,2}} \dots \omega_n^{\alpha_{k,n}}|.$$

Supposons que

$$\varphi_1(0, \omega_2, \dots, \omega_n) = \log \sum_k |\sum_{|\alpha_k|=\beta} b_{\alpha_k} \omega_2^{\alpha_{k,2}} \dots \omega_n^{\alpha_{k,n}}| = -\infty,$$

alors pour tout k

$$\sum_{|\alpha_k|=\beta_m} b_{\alpha_k} \omega_2^{\alpha_{k,2}} \dots \omega_n^{\alpha_{k,n}} = 0.$$

L'ensemble S_k des solutions de cette équation est un sous ensemble analytique de $\tilde{Y}$ de dimension strictement inférieure à la dimension de $\tilde{Y}$ donc de même pour les solutions $\bigcap\limits_k S_k$ de $\varphi_1(0, \omega_2, \dots, \omega_n) = -\infty$.

L'exemple suivant montre qu'en général les pôles de $\mu^\star T - \gamma[\tilde{Y}]$ dans $\tilde{Y}$ peuvent être toute l'hypersurface $\tilde{Y}$.

Exemple. — Soit φ la fonction Psh sur $\mathbb{C}^2$ définie par :

$$\varphi(z) = \log |z|^2 + \psi(z)$$

avec ψ Psh sur $\mathbb{C}^2$ et telle que

$$\psi(z) = \begin{cases} \max(-\log(-\log |z|), 2 + \log |z|) & \text{si } |z| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \\ 2 + \log |z| & \text{si } |z| > \frac{1}{\mathrm{e}} \end{cases}$$

alors la fonction φ est Psh sur $\mathbb{C}^2$ et vérifie $\{\varphi = -\infty\} = \{0\}$, $\nu_\varphi(0) = 2$ et

$\{\mu^\star_{|\tilde{U}_1}\varphi - 2\log|w_1| = -\infty\} = \{0\} \times \mathbb{C}$ et $\{\mu^\star_{|\tilde{U}_2}\varphi - 2\log|w_2| = -\infty\} = \mathbb{C} \times \{0\}$

avec μ est l'éclatement de $\mathbb{C}^2$ au dessus de 0.

Proposition 3.7. — *Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition 3.6), on a :*

$$\nu_{\tilde{T}} = 0 \quad \textit{presque partout sur } \tilde{Y}.$$

En particulier, pour tout $c > 0$

$$\{\nu_{\tilde{T}} \geqslant c\} \cap \tilde{Y} \textit{ est un sous-ensemble analytique de dimension} \leqslant n-2$$

Démonstration. — Soit $a = (0, a_2, \dots, a_n) \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{Y}$, on a :

$$\sup_{|t_1|<r} \varphi_1(t_1, a_2, \dots, a_n) \leqslant \sup_{|t_1|, \dots, |t_n|<r} \varphi_1(t_1, a_2 + t_2, \dots, a_n + t_n),$$

alors

$$\begin{aligned}\nu_{\varphi_1}(0, a_2, \dots, a_n) &\leqslant \lim_{r\to 0} \frac{1}{\log r} \sup_{|t_1|<r} \varphi_1(t_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\leqslant \lim_{r\to 0} \frac{1}{\log r} \sup_{|t_1|<r} \varphi(t_1(1, a_2, \dots, a_n)) - \gamma = 0\end{aligned}$$

pour presque tout $a = (0, a_2, \dots, a_n) \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{Y}$ car $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{1}{\log r} \sup\limits_{|t_1|<r} \varphi(t_1(1, a_2, \dots, a_n))$ est le nombre de Lelong en 0 de la restriction de φ sur la droite complexe $\mathbb{C}.(1, a_2, \dots, a_n)$ [Siu74].

L'ensemble $E_c(\varphi_1) \cap \tilde{Y} = \{\nu_{\varphi_1} \geqslant c\} \cap \tilde{Y}$, $c > 0$, est un sous-ensemble analytique négligeable dans $\tilde{Y}$, donc sa dimension est $\leqslant n-2$. □

4. Problème de l'intégrabilité de l'exponentielle d'une fonction plurisousharmonique.

Soit X une variété analytique kählérienne de dimension 2 et φ une fonction Psh sur X à pôles dans un compact K de X, on suppose que $\nu_\varphi(x) \leqslant 2$ pour tout $x \in X$ et $E_c(\varphi)$ est fini pour tout $c > 0$. On se propose alors de montrer que $e^{-\varphi}$ est localement intégrable sur X.

4.1. Éclatements successifs et contrôle des nombres de Lelong d'un (1,1)-courant positif fermé.

Notations. — Soit T un (1,1)-courant positif fermé sur une variété analytique kählérienne X de dimension 2 à pôles dans un compact K de X. On suppose que $E_c(T)$ est fini pour tout $c > 0$. Pour $c_0 > 0$ fixé on définit la suite d'éclatements $(\mu_n)_n$, dont on aura besoin par la suite, comme suit :

Supposons que $E_{c_0}(T) \neq \varnothing$ et posons $E_{c_0}(T) = \{x_{0,1}, \ldots, x_{0,k_0}\} \subset X$. Soit $\mu_1\colon X_1 \longmapsto X$ l'éclatement de X simultanément au dessus des points $x_{0,1}, \ldots, x_{0,k_0}$ et soient $Y_{1,1}, \ldots, Y_{1,k_0}$ les diviseurs exceptionnels de cet éclatement. Notons T_1 le (1,1)-courant positif fermé défini par $T_1 = \mu_1^\star T - \sum_{j=1}^{k_0} \nu_T(x_{0,j})[Y_{1,j}]$. D'après la proposition 3.7) $E_c(T_1)$ est fini pour tout $c > 0$. Nous construisons par récurrence sur p un courant T_p obtenu par éclatement de T_{p-1}. Pour $p \geqslant 1$, si $E_{c_0}(T_{p-1})$ est fini, on pose $E_{c_0}(T_{p-1}) = \{x_{p-1,1}, \ldots, x_{p-1,k_{p-1}}\} \subset X_{p-1}$. Alors $\mu_p\colon X_p \longmapsto X_{p-1}$ l'éclatement de X_{p-1} simultanément au dessus des points $x_{p-1,1}, \ldots, x_{p-1,k_{p-1}}$, $Y_{p,1}, \ldots, Y_{p,k_{p-1}}$ les diviseurs exceptionnels de cet éclatement et T_p le (1,1)-courant positif fermé défini par $T_p = \mu_p^\star T_{p-1} - \sum_{j=1}^{k_{p-1}} \nu_{T_{p-1}}(x_{p-1,j})[Y_{p,j}]$. On considère aussi la suite de compacts $(K_p)_p$ définie par : $K_0 := K$ et $K_p := \mu_p^{-1}(K_{p-1})$, lorsque μ_p existe.

On se propose de montrer que cette suite d'éclatements $(\mu_k)_k$ ne peut être que finie. Plus précisément, on montre le résultat suivant :

Théorème 4.1. — *Soit T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur une variété analytique kählérienne X de dimension 2, tel que les pôles sont dans un compact K de X et tel que $E_c(T)$ est fini $\forall c > 0$. Alors pour tout réel $c_0 > 0$ on a :*

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{x \in K_j \\ \nu_{T_j}(x) \geqslant c_0}} \nu_{T_j}^2(x) \leqslant \int_K T^2.$$

Démonstration. — Si $E_{c_0}(T) = \varnothing$, alors on n'a rien à démontrer, sinon, soit $E_{c_0}(T) = \{x_{0,1}, \ldots, x_{0,k_0}\} \subset X$. Considérons la suite d'éclatements $(\mu_k)_k$ définie dans 4.1) et montrons par récurrence sur p, lorsque μ_p existe, que $E_c(T_p)$ est fini pour tout $c > 0$ et

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{x \in K_j \\ \nu_{T_j}(x) \geqslant c_0}} \nu_{T_j}^2(x) \leqslant \int_K T^2$$

Cette inégalité, lorsque $p = 0$, se déduit du théorème 2.5) car par hypothèses $E_c(T)$ est fini pour tout $c > 0$; on a :

$$\sum_{x \in K} \nu_T^2(x) \leqslant \int_K T^2.$$

Supposons qu'on a prouvé que $E_c(T_{p-1})$ est fini pour tout $c > 0$ et non vide, alors la proposition 3.7) entraîne que $E_c(T_p)$ est fini et en appliquant les théorèmes 2.5) et 3.3) on a :

$$\begin{aligned}\sum_{x \in K_p} \nu_{T_p}^2(x) \leqslant \int_{K_p} T_p^2 &\leqslant \int_{K_{p-1}} T_{p-1}^2 - \sum_{\substack{x \in K_{p-1} \\ \nu_{T_{p-1}}(x) \geqslant c_0}} \nu_{T_{p-1}}^2(x) \\ &\leqslant \int_K T^2 - \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{\substack{x \in K_j \\ \nu_{T_j}(x) \geqslant c_0}} \nu_{T_j}^2(x)\end{aligned}$$

et par suite on a :

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{x \in K_j \\ \nu_{T_j}(x) \geqslant c_0}} \nu_{T_j}^2(x) \leqslant \int_K T^2.$$

□

Corollaire 4.2. — *Avec les mêmes hypothèses du théorème 4.1) et pour tout $c_0 > 0$,*

$$\exists\ p_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } E_{c_0}(T_{p_0}) = \varnothing.$$

Démonstration. — Le résultat se déduit du théorème 4.1), il suffit de remarquer que

$$pc_0^2 \leqslant \sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{x \in K_j \\ \nu_{T_j}(x) \geqslant c_0}} \nu_{T_j}^2(x) \leqslant \int_K T^2.$$ □

4.2. Théorème d'intégrabilité de fonctions plurisousharmoniques en dimension 2.

Notations et remarques. — Soit (z_1, z_2) un système de coordonnées local sur un voisinage de $x \in X$ centré en x, et soient $\varepsilon, \delta > 0$ assez petits. On considère les ouverts produits de X

$$U_\varepsilon = \{z \in X;\ |z_j| < \varepsilon,\ i = 1, 2\},$$

$$U_{\varepsilon,\delta,1} = \{z \in X;\ |z_1| < \varepsilon,\ |z_2| < (1+\delta)|z_1|\}$$

et

$$U_{\varepsilon,\delta,2} = \{z \in X;\ |z_2| < \varepsilon,\ |z_1| < (1+\delta)|z_2|\},$$

alors

$$U_\varepsilon \subset U_{\varepsilon,\delta,1} \cup U_{\varepsilon,\delta,2}.$$

Pour la simplicité d'écriture, on note dans toute la suite U_ε par U, $U_{\varepsilon,\delta,1}$ par U^1 et $U_{\varepsilon,\delta,2}$ par U^2. Soit $\mu\colon \tilde{X} \longmapsto X$ l'éclatement de X au dessus de x, alors, en conservant les notations du paragraphe 3.1, les ouverts bornés

$$U_1 = \mu^{-1}_{|\tilde{U}_1}(U^1) = \{\omega \in \tilde{U}_1;\ |\omega_1| < \varepsilon,\ |\omega_2| < 1+\delta\}$$

et

$$U_2 = \mu^{-1}_{|\tilde{U}_2}(U^2) = \{\omega \in \tilde{U}_2;\ |\omega_1| < 1+\delta,\ |\omega_2| < \varepsilon\}$$

recouvrent $\tilde{Y}$.

Théorème 4.3. — *Soit φ une fonction* Psh *sur une variété analytique kählérienne X de dimension 2 qui vérifie :*

i) $\varphi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(X \setminus K)$, *avec K compact de X.*

ii) $\nu_\varphi(x) \leqslant 2\ \forall x \in X$.

iii) $E_c(\varphi)$ *est fini pour tout* $0 < c \leqslant 2$.

alors $\mathrm{e}^{-\varphi}$ *est localement intégrable sur X.*

Démonstration. — Il suffit de montrer l'intégrabilité de $\mathrm{e}^{-\varphi}$ au voisinage d'un point $x \in X$ tel que $\nu_\varphi(x) = 2$. En conservant les notations précédentes et en choisissant ε assez petit pour que $U \cap \{\nu_\varphi = 2\} = \{x\}$

on a :

$$\begin{aligned}
\int_U \mathrm{e}^{-\varphi} d\lambda(z) &\leqslant \int_{U^1} \mathrm{e}^{-\varphi} d\lambda(z) + \int_{U^2} \mathrm{e}^{-\varphi} d\lambda(z) \\
&= \int_{U_1} \mathrm{e}^{-\mu^\star_{|\tilde U_1}\varphi} |\det \mathrm{J}(\mu_{|\tilde U_1})|^2 d\lambda + \int_{U_2} \mathrm{e}^{-\mu^\star_{|\tilde U_2}\varphi} |\det \mathrm{J}(\mu_{|\tilde U_2})|^2 d\lambda \\
&= \int_{U_1} \mathrm{e}^{-\mu^\star_{|\tilde U_1}\varphi} |\omega_1|^2 d\lambda(\omega) + \int_{U_2} \mathrm{e}^{-\mu^\star_{|\tilde U_2}\varphi} |\omega_2|^2 d\lambda(\omega) \\
&= \int_{U_1} \mathrm{e}^{-\mu^\star_{|\tilde U_1}\varphi + 2\log|\omega_1|} d\lambda(\omega) + \int_{U_2} \mathrm{e}^{-\mu^\star_{|\tilde U_2}\varphi + 2\log|\omega_2|} d\lambda(\omega) \\
&= \int_{U_1} \mathrm{e}^{-\varphi_1} d\lambda(\omega) + \int_{U_2} \mathrm{e}^{-\varphi_2} d\lambda(\omega).
\end{aligned}$$

Les ouverts U_1 et U_2 sont bornés. Pour $c_0 = 2$, on considère la suite d'éclatements définie dans 4.1). La proposition 3.6) entraîne que $\nu_{T_p}(x) \leqslant 2$ pour tout $x \in X_p$, alors en procédant de la même façon et d'après le corollaire 4.2), on montre qu'après p_0 éclatements $\displaystyle\int_U \mathrm{e}^{-\varphi}$ est majorée par une somme finie de termes de la forme $\int_V \mathrm{e}^{-\psi}$, avec les V sont des ouverts bornés de X_{p_0} et $V \cap E_2(\psi) = \varnothing$. D'après H. Skoda tous ces termes sont finis, d'où le résultat du théorème. □

Soit maintenant φ une fonction plurisousharmonique sur un voisinage Ω de 0 dans C^2 et telle que $2 \leqslant \nu_\varphi(0) = \gamma_0 < 4$. On suppose de plus que pour tout $c > 0$, l'ensemble de niveau $E_c = \{z \in \Omega; \nu_\varphi \geqslant c\}$ est fini. On s'intéresse à la convergence de l'intégrale

$$\int_V e^{-\varphi(z)} d\lambda(z), \tag{14}$$

avec V un vosinage assez petit de 0 dans Ω. On reprend les mêmes notations que précédemment, alors l'intégrale (14) converge ssi les deux intégrales

$$\int_{V_1} e^{-\tilde\varphi_1(w)} |w_1|^{2-\gamma_0} d\lambda(w) \quad \text{et} \quad \int_{W_1} e^{-\tilde\varphi_2(w)} |w_2|^{2-\gamma_0} d\lambda(w) \tag{15}$$

convergent.

$\tilde\varphi_1(w) = \mu_1^*\varphi(w) - \gamma_0 \ \log|w_1|$ et $\tilde\varphi_2(w) = \mu_2^*\varphi(w) - \gamma_0 \ \log|w_2|$. μ_1 et μ_2 sont les restrictions de μ sur les deux ouverts de carte de $\tilde X$. V_1 est un voisinage assez petit de $\mu_1^{-1}\{0\}$ et W_1 un voisinage assez petit de $\mu_2^{-1}\{0\}$. L'ensemble des points sur le diviseur exceptionnel $\tilde{Y}$ de l'éclatement où $\nu_{\tilde{\varphi}_1} > 0$ est au plus dénombrable. De même pour l'ensemble des points où $\nu_{\tilde{\varphi}_2} > 0$. Alors pour la première intégrale on prend les points $z \in [\tilde{Y}]$ tels que $\nu_{\tilde{\varphi}_1}(z) \geqslant 4 - \gamma_0 > 0$, qu'on suppose finis et pour la deuxième intégrale on prend les points $z \in [\tilde{Y}]$ tels que $\nu_{\tilde{\varphi}_2}(z) \geqslant 4 - \gamma_0 > 0$, qu'on suppose qu'ils sont finis encore. Les intégrales au voisinage des autres points convergent. En effet si $\nu_{\tilde{\varphi}_1} + \gamma_0 - 2 = \gamma_1 + \gamma_0 - 2 < 2$, la première intégrale converge et si $\nu_{\tilde{\varphi}_2} + (\gamma_0 - 2) = \tilde{\gamma}_1 + \gamma_0 - 2 < 2$, la deuxième intégrale converge.

On reprend le même procédé et si on considère que la première intégrale et on fait un éclatement aux points considérés on aura des intégrales de type

$$\int_{V_2} e^{-\varphi_2(w)} |w_1|^{-\alpha_2} |w_2|^{-\beta_2} d\lambda(w),$$

avec $\alpha_2 = \gamma_0 + \gamma_1 - 4 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 2$ et $\beta_2 = \beta_1$, $\alpha_1 = \gamma_0 - 2$ et $\beta_1 = 0$ et des intégrales avec $\beta_2 = \gamma_0 + \gamma_1 - 4 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 2$ et $\alpha_2 = \alpha_1$. De la même manière si $\gamma_2 + \alpha_2 + \beta_2 < 2$, alors les intégrales précédentes convergent, avec $\gamma_2 = \nu_{\varphi_2}$ au point considéré. Sinon on fait un éclatement. De proche en proche ; on aura des intégrales de type

$$\int_{V} e^{-\varphi_m(w)} |w_1|^{-\alpha_m} |w_2|^{-\beta_m} d\lambda(w),$$

avec $\alpha_m = \alpha_{m-1} + \beta_{m-1} + \gamma_{m-1} - 2$ et $\beta_m = \beta_{m-1}$ et des intégrales de même type avec $\alpha_m = \alpha_{m-1}$ et $\beta_m = \alpha_{m-1} + \beta_{m-1} + \gamma_{m-1} - 2$.

Remarque. — Il est évident qu'une condition nécessaire de convergence des intégrales de type

$$\int_{V} e^{-\varphi_m(w)} |w_1|^{-\alpha_m} |w_2|^{-\beta_m} d\lambda(w),$$

est que $\alpha_m < 2$ et $\beta_m < 2$.

Proposition 4.4. — *On considère l'intégrale*

$$\int_{V} e^{-\varphi_m(w)} |w_1|^{-\alpha_m} |w_2|^{-\beta_m} d\lambda(w)$$

V est un voisinage assez petit d'un point où $\gamma_m + \alpha_m + \beta_m \geqslant 2$.

Si $\alpha_m < 2-\gamma_m$ et $\beta_m < 2-\gamma_m$, alors l'intégrale précédente converge. γ_m est le nombre de Lelong de la fonction φ_m au point au voisinage duquel l'intégrale est portée.

Démonstration. — On pose $p = \frac{2}{\gamma_m} > 1$ et $q = \frac{p}{p-1}$, alors d'après l'inégalité de Hölder

$$\int_V e^{-\varphi_m(w)}|w_1|^{-\alpha_m}|w_2|^{-\beta_m}d\lambda(w) \leqslant \left(\int_V e^{-p\varphi_m(w)}d\lambda(w)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_V |w_1|^{-q\alpha_m}|w_2|^{-q\beta_m}d\lambda(w)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

L'intégrale $\int_V e^{-\varphi_m(w)}d\lambda(w)$ est convergente d'après le théorème 4.3 $(\nu_{p\varphi_m(x)=2})$. L'intégrale $\int_V |w_1|^{-q\alpha_m}|w_2|^{-q\beta_m}d\lambda(w)$ est convergente car $q\alpha_m = \frac{2\alpha_m}{2-\gamma_m} < 2$ et $q\beta_m = \frac{2\beta_m}{2-\gamma_m} < 2$.

Proposition 4.5. — *Avec les mêmes notations si $\alpha_m \leqslant 2-\gamma_m$ et $\beta_m < 2-\gamma_m$, alors l'intégrale*

$$\int_V e^{-\varphi_m(w)}|w_1|^{-\alpha_m}|w_2|^{-\beta_m}d\lambda(w)$$

converge.

Démonstration. — On fait l'éclatement de $\mathbb{C}^2$ au point où intègre, alors la convergence de l'intégrale

$$\int_V e^{-\varphi_m(w)}|w_1|^{-\alpha_m}|w_2|^{-\beta_m}d\lambda(w)$$

est équivalent à la convergence des deux intégrales

$$\int e^{-\varphi_{m+1}(w)}|w_1|^{-\alpha_{m+1}}|w_2|^{-\beta_{m+1}}d\lambda(w) \tag{16}$$

et

$$\int e^{-\tilde{\varphi}_{m+1}(w)}|w_1|^{-\tilde{\alpha}_{m+1}}|w_2|^{-\tilde{\beta}_{m+1}}d\lambda(w) \tag{17}$$

avec $\varphi_{m+1} = \mu_1^*\varphi_m - \gamma_m \log|w_1|$ et $\tilde{\varphi}_{m+1} = \mu_2^*\varphi_m - \gamma_m \log|w_2|$, $\alpha_{m+1} = \alpha_m+\beta_m+\gamma_m-2$, $\beta_{m+1} = \beta_m$, $\tilde{\alpha}_{m+1} = \alpha_m$ et $\tilde{\beta}_{m+1} = \alpha_m+\beta_m+\gamma_m-2$.

Donc l'intégrale (16) converge car $\alpha_{m+1} = \alpha_m + \beta_m + \gamma_m - 2 < \alpha_m \leqslant 2 - \gamma_m \leqslant 2 - \gamma_{m+1}$. Pour la deuxième intégrale on a $\tilde{\alpha}_{m+1} \leqslant 2 - \gamma_m \leqslant 2 - \tilde{\gamma}_{m+1}$ et $\tilde{\beta}_{m+1} < 2 - \gamma_m \leqslant 2 - \tilde{\gamma}_{m+1}$. On fait un deuxième éclatement aux points correspondant et on aura toujours deux intégrales, l'une converge et l'autre de même type considéré au début. Soit après p opérations on aura une intégrale de type

$$\int e^{-\varphi_{m+p}(w)}|w_1|^{-\alpha_{m+p}}|w_2|^{-\beta_{m+p}}d\lambda(w)$$

avec $\alpha_{m+p} = \alpha_m$ et $\beta_{m+p} = \alpha_m + p(\beta_m - 2) + \left(\sum_{j=0}^{p-1} \gamma_{m+j}\right)$. Ce terme tend vers $-\infty$ quand p tend vers $+\infty$. En effet la série $\sum_m \gamma_m^2$ converge, donc $\sum_{j=0}^{p} \gamma_j \leqslant C\sqrt{p}$, avec $C > 0$. Il en résulte qu'il existe un p tel que

$$\int e^{-\varphi_{m+p}(w)}|w_1|^{-\alpha_{m+p}}|w_2|^{-\beta_{m+p}}d\lambda(w)$$

converge, et donc la première intégrale considérée est convergente.

Corollaire 4.6. — *Si $\gamma_0 + \gamma_1 \leqslant 4$ et $\gamma_0 + \tilde{\gamma}_1 \leqslant 4$, alors l'intégrale $\int e^{-\varphi(z)}d\lambda(z)$ est convergente. La fonction φ est toujours prise avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.3.*

Démonstration. — Il suffit de prendre $\gamma_0 \geqslant 2$ et donc $\gamma_1 < 2$. Alors $\alpha_1 = \gamma_0 - 2 \leqslant 2 - \gamma_1$ et $\beta_1 = 0 < 2 - \gamma_1$. De même pour $\beta_1 = \gamma_0 - 2 \leqslant 2 - \tilde{\gamma}_1$ et $\alpha_1 = 0 < 2 - \tilde{\gamma}_1$.

BIBLIOGRAPHIE

[Abr88] L. Abrahamsson, Microlocal Lelong numbers of plurisubharmonic functions, J.Reine Angew. Math 388 (1988),116-128.

[Be&Ta82] E. Bedfort et B.A. Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta. Math, 149,(1982), 1-40.

[Bl81] M. Blel, Fonctions plurisousharmoniques et idéal définissant un ensemble analytique, Lect. notes. n° 919 (Séminaire P.Lelong H.Skoda), Analyses (1980-1981), Springer Verlag, 26-55.

[Bom70] E. Bombieri, Algebraic values of meromorphic maps, Invent. Math, 10, (1970) 267-287.

[Dem82] J-P. Demailly, Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 32, (1982), 37-66.

[Dem92] J-P. Demailly, Regularization of closed positive currents and Intersection Theory, J. Alg. Geom, 1, (1992), 361-409.

[Dem93a] J-P. Demailly, Monge-Ampère operators, Lelong numbers and Intersection Theory, Complex Analysis and Geometry, Univ. Series in Math, (edited by V.Ancona and A. Silva), Plenum Press, New-York, (1993).

[Dem93b] J-P. Demailly, A numerical criterion for very ample line bundles, J. Differential Geom, 37, (1993), 323-374.

[Dem&Ko99] J-P. Demailly et J. Kollár, Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds, Prépublication de l'Institut Fourier, (1999).

[Dem00] J-P. Demailly, Algebraic geometry, (Livre publié sur internet),(2000).

[Gir98] S.Giret, Sur le tranchage et le prolongement de courants, Thèse d'Université (Poitiers), (1998).

[Gr& Ha78] P.A. Griffiths et J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, John Wiley Sons (1978).

[Kis79] C.O. Kiselman, Densité des fonctions plurisousharmoniques, Bull. Soc. Math. France 107, (1979), 295-304,

[Kis81] C.O. Kiselman, The growth of restrictions of plurisuharmonic functions, Mathematical Analysis and Applications, Part B, L. Nachbin (Ed.). Advances in Mathematics Supplementary Studies, vol. 7B, (1981), 435-454.

[Kis82] C.O. Kiselman, Stabilité du nombre de Lelong par restriction à une sous-variété, Lect. Notes in Math. 919, Berlin-Heidelberg-New York (1982), 324-336.

[Kis93] C.O. Kiselman, Plurisubharmonic functions and their singularities, Uppsala University, (1993).

[Lel76] P. Lelong, Sur la structure des courants positifs fermés, Lecture Notes in Mathematics 578, Séminaire Pierre Lelong (1975-1976), 136-156.

[Siu74] Y.T. Siu, Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, Invent. Math 27, (1974), 53-156.

[Sko72] H. Skoda, Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France 100, (1972), 353-408.

Manuscrit reçu le 27 mars 2003,
accepté le 11 septembre 2004.

Mongi BLEL,
Faculté des Sciences de Monastir
Département de mathématiques
5019 Monastir (Tunisie)
M.blel@fsm.rnu.tn

Souad Khemiri MIMOUNI,
Faculté des Sciences de Monastir
Département de mathématiques
5019 Monastir (Tunisie)
souad.khemiri@fsm.rnu.tn