



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Bernard ROYNETTE & Marc YOR

**Couples de Wald indéfiniment divisibles. Exemples liés à la fonction gamma d'Euler et à la fonction zeta de Riemann**

Tome 55, n° 4 (2005), p. 1219-1283.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2005\\_\\_55\\_4\\_1219\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2005__55_4_1219_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# COUPLES DE WALD INDÉFINIMENT DIVISIBLES. EXEMPLES LIÉS À LA FONCTION GAMMA D’EULER ET À LA FONCTION ZETA DE RIEMANN

par Bernard ROYNETTE & Marc YOR

---

## Plan de l’article.

0. Introduction . . . . .	1220
I. Couples de Wald indéfiniment divisibles . . . . .	1226
I.1. Définition d’un couple de Wald indéfiniment divisible associé à une mesure $c(dx)$ . . . . .	1226
I.2. Exemples liés à un subordonateur et à un processus additif . . . . .	1229
I.3. Premières propriétés des moments et de la loi de $(X, H)$ . . . . .	1230
I.4. Réalisation de $H$ à l’aide de la formule des fluctuations. . . . .	1233
I.5. Couples de Wald indéfiniment divisibles et couples de Wald browniens .	1234
I.6. Complète auto-décomposabilité des v.a. $H$ . . . . .	1235
I.7. Décomposition affine de la loi stable $\frac{1}{2}$ . . . . .	1237
I.8. Utilisation de la subordination et le problème de Van Dantzig. . . . .	1239
II. Famille d’Esscher de couples de Wald indéfiniment divisibles. . . . .	1240
II.1. Définition d’une famille d’Esscher de couples de Wald indéfiniment divisibles. . . . .	1240
II.2. Caractérisation d’une telle famille. . . . .	1244
II.3. La transformation d’Esscher . . . . .	1245
II.4. Les accroissements de $X_\alpha$ et de $H_\alpha$ . . . . .	1247
II.5. Comportement asymptotique de $\varepsilon^{-2}H_{\alpha, \alpha+\varepsilon}$ quand $\varepsilon \searrow 0$ . . . . .	1248
III. Famille d’Esscher de couples de Wald associée à $c(dx) = k dx/x^{3-\mu}$ , $\mu > 0$	1250
III.1. Définition des v.a. $X_\alpha^{k, \mu}$ et $H_\alpha^{k, \mu}$ . . . . .	1250
III.2. Le cas $\mu = 2$ et la propriété d’échelle . . . . .	1252
III.3. Le cas $\mu = 1$ et la caractérisation de G. Letac des v.a. gamma . . . . .	1253
III.4. Calcul explicite de la mesure de Lévy de $\widehat{H}_\alpha^2$ . . . . .	1255
IV. Famille d’Esscher de couples de Wald associée à la fonction gamma . . . . .	1255
IV.1. Définition des v.a. $X_\alpha^\Gamma$ et $H_\alpha^\Gamma$ , $\alpha > 0$ . . . . .	1255

---

*Mots-clés* : transformée de Laplace, lois indéfiniment divisibles, couples de Wald, fonctions gamma et zeta.

*Classification math.* : 60E67, 60E05, 60E10, 60G51.

IV.2. Les cumulants de $H_\alpha^\Gamma$ et la fonction d'Hurwitz . . . . .	1260
IV.3. La formule d'addition des $H_\alpha^\Gamma$ et la formule de multiplication de Gauss . . . . .	1261
IV.4. La formule d'addition caractérise la fonction $\Gamma$ . . . . .	1263
IV.5. Développement en série des $H_\alpha^\Gamma$ et la formule de Mellin-Weierstrass . . . . .	1264
IV.6. Comportement asymptotique de $H_\alpha^\Gamma$ quand $\alpha \rightarrow 0$ ou $\alpha \rightarrow \infty$ . . . . .	1265
IV.7. Généralisation : v.a. associées aux fonctions de Bernoulli . . . . .	1267
V. Famille d'Esscher de couples de Wald associée à la fonction zeta de Riemann . . . . .	1268
V.1. Définition de la famille d'Esscher associée à $\zeta$ . . . . .	1268
V.2. Développement en série des v.a. $H_\alpha^\zeta$ ( $\alpha > 1$ ) . . . . .	1270
V.3. Relation avec la fonction $\xi$ . . . . .	1272
VI. Appendice . . . . .	1276
VI.1. Définition d'un $\mu$ -couple de Wald indéfiniment divisible ( $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ ) . . . . .	1276
VI.2. Une autre définition de $H^{(\mu)}$ . . . . .	1279
VI.3. Les v.a. $H_\alpha^{(\mu), \Gamma}$ . . . . .	1280
Bibliographie . . . . .	1280

## 0. Introduction.

1) P. Hartman [Ha] prouve qu'il existe une v.a.  $H$  positive et indéfiniment divisible telle que

$$(0.1) \quad E(\exp -\frac{1}{2}\lambda^2 H) = \frac{e^{\lambda c}}{\Gamma(1 + \lambda)}$$

où  $\Gamma$  est la fonction d'Euler, si et seulement si  $c \leq -\gamma$  ( $\gamma = 0,57721\dots$  désignant la constante d'Euler-Mascheroni). Notant  $\psi = \Gamma'/\Gamma$  la dérivée logarithmique de  $\Gamma$ , et puisque  $\psi(1) = -\gamma$ , le résultat d'Hartman implique donc l'existence d'une v.a.  $H^\Gamma$ , positive et indéfiniment divisible, telle que

$$(0.2) \quad E(\exp -\frac{1}{2}\lambda^2 H^\Gamma) = \frac{e^{\lambda\psi(1)}}{\Gamma(1 + \lambda)}.$$

Soit par ailleurs

$$(0.3) \quad X^\Gamma := (\log \gamma_1) - \psi(1),$$

où  $\gamma_1$  est une v.a. de loi gamma de paramètre 1 (i.e. une v.a. exponentielle de paramètre 1). On a donc, pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$(0.4) \quad \begin{aligned} E(e^{\lambda X^\Gamma}) &= E(\exp \lambda \log \gamma_1) \cdot e^{-\lambda\psi(1)} \\ &= E(\gamma_1^\lambda) e^{-\lambda\psi(1)} = \Gamma(1 + \lambda) e^{-\lambda\psi(1)}, \end{aligned}$$

si bien que, pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$(0.5) \quad E(e^{\lambda X^\Gamma}) E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H^\Gamma}) = 1.$$

Remarquant alors que  $X^\Gamma$  est une v.a. indéfiniment divisible, le couple  $(X^\Gamma, H^\Gamma)$  forme ce que nous appelons un « couple de Wald indéfiniment divisible », i.e. un couple de v.a.  $(X, H)$  indéfiniment divisibles, avec  $H \geq 0$  satisfaisant à (0.5) pour tout  $\lambda \geq 0$ .

2) B. Roynette, P. Vallois et M. Yor [RVY] montrent le résultat suivant : si  $(B_t^2, t \geq 0)$  est un carré de Bessel de dimension 2, issu de  $x$ , alors on a

$$(0.6) \quad E_x \left\{ \exp - \frac{\lambda^2}{2} \left( 4 \int_0^t \frac{ds}{B_s^2} \right) \right\} \\ \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \lambda)} \left\{ \exp \lambda(\log(x^2) - \log t - \log 8) \right\}.$$

Observant que le second membre de (0.6) est de la forme

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \lambda)} \exp \lambda c \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

il est alors naturel de chercher à généraliser le résultat de P. Hartman ainsi que (0.5), i.e. de construire un couple  $(X_\alpha^\Gamma, H_\alpha^\Gamma)$  de v.a. indéfiniment divisibles, avec  $H_\alpha^\Gamma \geq 0$ , tel que

$$(0.7) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^\Gamma}) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \lambda)} e^{\lambda\psi(\alpha)},$$

$$(0.8) \quad E(e^{\lambda X_\alpha^\Gamma}) E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^\Gamma}) = 1$$

avec

$$(0.9) \quad X_\alpha^\Gamma := (\log \gamma_\alpha) - \psi(\alpha)$$

où  $\gamma_\alpha$  est une v.a. gamma de paramètre  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ).

Cette construction des v.a.  $(X_\alpha^\Gamma, H_\alpha^\Gamma)$  est menée à bien dans le paragraphe IV (théorème IV.1.1). Nous appellerons alors l'ensemble de ces v.a.  $(X_\alpha^\Gamma, H_\alpha^\Gamma; \alpha > 0)$  une famille d'Esscher de couples de Wald, associée à la fonction  $\Gamma$  (voir une justification de cette terminologie au début de l'alinéa II.3). Nous montrons alors, toujours dans le paragraphe IV, que les v.a.  $H_\alpha^\Gamma$  possèdent des propriétés tout à fait remarquables : relation entre les cumulants de  $H_\alpha^\Gamma$  et la fonction d'Hurwitz, formule d'addition, développement en série, comportement asymptotique, etc. Nous donnons aussi des principales propriétés de la fonction  $\Gamma$  (formule de multiplication

de Gauss, formule de Knar, développement de Mellin-Weierstrass, etc.) des démonstrations probabilistes élémentaires basées sur la connaissance explicite des mesures de Lévy des v.a.  $H_\alpha^\Gamma$ . Une telle approche probabiliste des propriétés de la fonction  $\Gamma$  a déjà été faite par L. Gordon [Go], via la formule

$$(0.10) \quad E(\gamma_\alpha^\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha + \lambda)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Notre approche complète donc celle de L. Gordon (voir également B. Grigelionis [Gr] pour des considérations assez proches). Elle en est « l'aspect dual », puisque nous travaillons non pas sur les v.a.  $\gamma_\alpha$ , mais sur les v.a.  $H_\alpha^\Gamma$  qui sont « en dualité » avec les v.a.  $\gamma_\alpha$  (plus exactement avec les v.a.  $X_\alpha^\Gamma$ , qui diffèrent des  $\log \gamma_\alpha$  par la constante  $-\psi(\alpha)$  (cf. (0.9)) via les formules (0.7), (0.8) et (0.9).

3) Bien sûr, ce que nous venons de décrire ci-dessus invite à rechercher d'autres couples de Wald indéfiniment divisibles. C'est l'objet du paragraphe I de ce travail. Plus précisément, nous montrons qu'à toute mesure positive  $c(dx)$  sur  $\mathbb{R}_+$  telle que

$$(0.11) \quad \int_0^\infty (x^2 \wedge x) c(dx) < \infty,$$

nous pouvons associer un couple de Wald  $(X, H)$  de v.a. indéfiniment divisibles, avec  $H \geq 0$  et tel que, pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$(0.12) \quad E(e^{\lambda X}) E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}) = 1$$

(le couple  $(X^\Gamma, H^\Gamma)$  de l'alinéa 1 ci-dessus est associé à la mesure  $c(dx) = e^{-x}/(x(1 - e^{-x})) dx$ ).

Le paragraphe I de ce travail est consacré à l'étude des couples indéfiniment divisibles associés à une telle mesure  $c(dx)$ . En particulier, nous y montrons le lien étroit qui existe entre cette notion et

- d'une part, lorsque  $\int_0^\infty x c(dx) < \infty$ , les décompositions affines de la loi stable positive d'indice  $\frac{1}{2}$  (cf. [DGY] pour une étude détaillée de cette question);

- d'autre part, les couples  $(X, \widehat{H})$  solutions du problème de Van Dantzig (cf. [Lu2]), i.e. tels que, pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$(0.13) \quad E(e^{\lambda X}) E(e^{i\lambda \widehat{H}}) = 1.$$

En fait, on passe ici de  $H$  à  $\widehat{H}$  par subordination, i.e.  $\widehat{H}$  est défini par  $\widehat{H} = B_H$ , où  $(B_t, t \geq 0)$  est un mouvement brownien issu de 0 indépendant de  $H$ , puisque

$$(0.14) \quad E(e^{i\lambda\widehat{H}}) = E(e^{i\lambda B_H}) = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}).$$

4) Nous inspirant alors de l'exemple des v.a.  $(X_\alpha^\Gamma, H_\alpha^\Gamma; \alpha > 0)$  décrites à l'alinéa 2 ci-dessus, nous cherchons ensuite à associer à une mesure  $c(dx)$  sur  $\mathbb{R}_+$  une famille de couples de Wald indexée par un paramètre  $\alpha$ . En fait, ces v.a., que nous construisons dans le paragraphe II, sont associées (au sens du théorème I.1.1) à la mesure  $e^{-\alpha x} c(dx)$ . Soyons plus précis : soit  $\varphi$  une primitive, sur  $]\alpha_0, \infty]$  de la fonction

$$(0.15) \quad \varphi'(\alpha) := \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^2 c(dx)$$

(nous faisons l'hypothèse que cette intégrale converge pour  $\alpha > \alpha_0$ ) ; fixons alors  $\alpha_1 > \alpha_0$  et définissons

$$(0.16) \quad F(\alpha) := \exp\left(\int_{\alpha_1}^\alpha \varphi(u) du\right).$$

Nous prouvons alors (théorème II.1.2) l'existence d'une famille de couples de Wald indéfiniment divisibles  $(X_\alpha^F, H_\alpha^F; \alpha > \alpha_0)$  tels que, pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$(0.17) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^F}) = \frac{F(\alpha)}{F(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \varphi(\alpha),$$

$$(0.18) \quad E(e^{\lambda X_\alpha^F}) = \frac{F(\alpha + \lambda)}{F(\alpha)} \exp -\lambda \varphi(\alpha)$$

(les v.a.  $(X_\alpha^\Gamma, H_\alpha^\Gamma)$  de l'alinéa 2 ci-dessus correspondent à  $F = \Gamma$ ,  $\varphi = \psi$ ,  $c_\alpha(dx) = e^{-\alpha x} / (x(1 - e^{-x})) dx$  et  $\alpha > 0$ ).

Puis nous étudions, dans le paragraphe II, la dépendance en  $\alpha$  des couples  $(X_\alpha^F, H_\alpha^F)$ . En particulier, nous montrons que :

- si  $\beta > \alpha$ , l'existence de v.a. indéfiniment divisibles  $H_{\alpha,\beta}^F$  (resp.  $X_{\alpha,\beta}^F$ ) telles que  $H_{\alpha,\beta}^F + H_\beta^F \stackrel{\text{loi}}{=} H_\alpha^F$  (resp.  $X_{\alpha,\beta}^F + X_\beta^F \stackrel{\text{loi}}{=} X_\alpha^F$ ) où les premiers membres de ces identités sont constitués de v.a. indépendantes,

- la convergence en loi, quand  $\varepsilon \searrow 0$ , de  $\varepsilon^{-2} H_{\alpha,\alpha+\varepsilon}^F$  vers  $T_{\varphi'(\alpha)}$ , où  $T_{\varphi'(\alpha)}$  est le temps d'atteinte, par un mouvement brownien standard, du niveau  $\varphi'(\alpha)$ .

5) Soit  $\zeta$  la fonction zeta de Riemann définie, pour  $\alpha > 1$ , par

$$(0.19) \quad \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que (comme la fonction  $\Gamma$ ), cette fonction possède les propriétés requises pour faire d'elle une fonction  $F$  particulière. Il existe donc (cf. théorème V.1) une famille de couples de Wald indéfiniment divisibles  $(X_{\alpha}^{\zeta}, H_{\alpha}^{\zeta}; \alpha > 1)$  tels que

$$(0.20) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{\alpha}^{\zeta}}) = \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \frac{\zeta'(\alpha)}{\zeta(\alpha)},$$

et pour tout  $\lambda \geq 0$

$$(0.21) \quad E(e^{\lambda X_{\alpha}^{\zeta}}) = \frac{\zeta(\alpha + \lambda)}{\zeta(\alpha)} \exp -\lambda \frac{\zeta'(\alpha)}{\zeta(\alpha)}.$$

La mesure  $c(dx)$  est ici une mesure discrète (cf. V.3). L'existence des v.a.  $X_{\alpha}^{\zeta}$  est due à A. Khintchine [Kh]. En effet, ce dernier prouve en 1938 l'existence de v.a.  $K_{\alpha}$  ( $\alpha > 1$ ) telles que

$$(0.22) \quad E(e^{i\lambda K_{\alpha}}) = \frac{\zeta(\alpha + i\lambda)}{\zeta(\alpha)},$$

si bien que nos v.a.  $X_{\alpha}^{\zeta}$  ne diffèrent des v.a.  $K_{\alpha}$  de A. Khintchine que par une constante :

$$(0.23) \quad X_{\alpha}^{\zeta} = K_{\alpha} - \frac{\zeta'(\alpha)}{\zeta(\alpha)}.$$

Ainsi, d'après (0.20) et (0.21), les v.a.  $H_{\alpha}^{\zeta}$  constituent «l'aspect dual» des v.a. de A. Khintchine, de la même façon que les  $H_{\alpha}^{\Gamma}$  constituent «l'aspect dual» des v.a.  $\log \gamma_{\alpha} - \psi(\alpha)$  utilisées par L. Gordon (cf. alinéa 2 ci-dessus).

Dans le paragraphe V, nous étudions cette famille de couples de Wald associée à la fonction zeta de Riemann. En particulier, nous montrons que la formule d'Euler est équivalente à une formule de développement en série des v.a.  $H_{\alpha}^{\zeta}$  (cf. théorème V.2.1), formule qui se lit de manière élémentaire sur les mesures de Lévy des v.a.  $H_{\alpha}^{\zeta}$ .

6) Soit maintenant  $\xi$  la fonction de Jacobi

$$(0.24) \quad \xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s),$$

fonction qui possède un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C}$  tout entier et qui satisfait à l'équation fonctionnelle  $\xi(s) = \xi(1 - s)$ ,  $s \in \mathbb{C}$ . Il est évidemment tentant de faire avec la fonction  $\xi$  ce que nous avons décrit ci-dessus pour la fonction  $\Gamma$  et la fonction  $\zeta$ . On sait, depuis Riemann [Ri] qu'il existe une v.a.  $Y \geq 0$  telle que, pour tout  $s \in \mathbb{C}$ ,

$$(0.25) \quad E(Y^s) = 2\xi(s).$$

Par ailleurs, P. Biane, J. Pitman et M. Yor ont donné dans [BY] et [BPY] des descriptions de cette v.a. liées au pont brownien et aux excursions browniennes. Par exemple, ces auteurs montrent que

$$(0.26) \quad Y \stackrel{\text{loi}}{=} \sup_{0 \leq s \leq 1} (\eta_s^2)$$

où  $(\eta_s, 0 \leq s \leq 1)$  est l'excursion brownienne normalisée.

Revenons à (0.25). Nous en déduisons qu'il existe une v.a.  $X_{\frac{1}{2}}^\xi$  telle que

$$(0.27) \quad E(\exp(\lambda X_{\frac{1}{2}}^\xi)) = \frac{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)}{\xi(\frac{1}{2})} \exp\left(-\lambda \frac{\xi'(\frac{1}{2})}{\xi(\frac{1}{2})}\right) = \frac{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)}{\xi(\frac{1}{2})}$$

(puisque  $\xi'(\frac{1}{2}) = 0$ ). En effet,

$$(0.28) \quad \frac{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)}{\xi(\frac{1}{2})} = \frac{E(Y^{\frac{1}{2} + \lambda})}{E(Y^{1/2})} = \frac{E(Y^{\frac{1}{2}} \exp \lambda(\log Y))}{E(Y^{\frac{1}{2}})} = \tilde{E}(\exp \lambda \log Y),$$

avec une notation évidente pour la dernière égalité de (0.28). Notons toutefois que  $X_{\frac{1}{2}}^\xi$  n'est pas indéfiniment divisible (cf. remarque V.3.1).

Compte tenu de ce qui précède, il est naturel de poser la question suivante : existe-t-il une v.a.  $H_{\frac{1}{2}}^\xi$ , i.e. une v.a.  $H \geq 0$  telle que

$$(0.29) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}) = \frac{\xi(\frac{1}{2})}{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)}.$$

Nous donnons la réponse suivante à cette question, liée à la conjecture de Riemann (cf. théorème V.3.2).

**THÉORÈME V.3.2.** — 1) *Si la conjecture de Riemann est vraie, il existe une v.a.  $H \geq 0$  satisfaisant à (0.29). De plus, si  $\hat{H}$  est définie par (0.14) à partir de  $H$ , alors  $\hat{H}$  possède une densité qui est une fonction fréquence de Polya.*

2) *Réciproquement, s'il existe  $H$  satisfaisant à (0.29) et si la densité de  $\hat{H}$  est une fonction fréquence de Polya, alors la conjecture de Riemann est vraie.*

(Nous renvoyons à [Sch] pour une définition des fonctions fréquence de Polya.)



En complément à ce travail, nous présentons dans l'appendice la notion de  $\mu$ -couple de Wald indéfiniment divisible, avec  $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ . Un tableau synthétise les différents exemples abordés dans cet article.

Par ailleurs, le lecteur intéressé uniquement par l'application de ce travail aux fonctions gamma et zeta pourra simplement lire les alinéas I.1, II.1, puis passer directement aux paragraphes IV et V.

## I. Couples de Wald indéfiniment divisibles.

### I.1. Définition d'un couple de Wald indéfiniment divisible associé à une mesure $c$ .

I.1.1. — Soit  $c$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+$  telle que

$$(I.1) \quad \int_{\mathbb{R}_+} (x^2 \wedge x) c(dx) < \infty.$$

THÉORÈME I.1.1. — Il existe deux v.a. indéfiniment divisibles  $X$  et  $H$  telles que :

1) • pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$(I.2) \quad E(e^{\lambda X}) = \exp \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c(dx) ;$$

•  $X$  est une v.a. centrée :  $E(|X|) < \infty$  et  $E(X) = 0$  ;

•  $X$  admet un moment d'ordre 2 si et seulement si  $\int_0^\infty x^2 c(dx) < \infty$  et  $E(X^2) = \int x^2 c(dx) (\leq +\infty)$ .

2)  $H$  est positive et

• pour tout  $\mu \geq 0$ ,

$$(I.3) \quad E(e^{-\mu H}) = \exp - \int_0^\infty (1 - e^{-\mu t}) \nu(t) dt$$

où

$$(I.4) \quad \nu(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty (1 - e^{-x^2/2t}) x c(dx).$$

•  $E(H)$  existe si et seulement si  $\int_0^\infty x^2 c(dx) = \int_0^\infty t \nu(t) dt < \infty$  et

$$(I.5) \quad E(H) = E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 c(dx) ;$$

- $H$  est une v.a. auto-décomposable.

3)  $(X, H)$  forme un couple de Wald indéfiniment divisible, i.e. pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$(I.6) \quad E(e^{\lambda X}) \cdot E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}) = 1.$$

En particulier,

$$(I.7) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}) = \exp - \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c(dx).$$

DÉFINITION I.1.2. — Le couple  $(X, H)$  satisfaisant à (I.2) et (I.3) du Théorème I.1.1 sera appelé le *couple de Wald indéfiniment divisible associé à la mesure c*.

Soulignons que, dans cette définition, seules les lois unidimensionnelles de  $X$  d'une part et de  $H$  d'autre part interviennent.

*Démonstration du théorème I.1.1.* — L'existence de  $X$  résulte de la formule de Lévy-Khintchine [Lu1, p. 118]) et de la condition (I.1). Le résultat sur le moment d'ordre 1 de  $X$  s'obtient par dérivation de (I.2). L'existence de  $H$  résulte également de la formule de Lévy-Khintchine et de la relation

$$(I.8) \quad \int_0^\infty (t \wedge 1) \nu(t) dt < \infty,$$

relation qui résulte aisément de (I.4) et (I.1). Le calcul de l'espérance de  $H$  se fait en dérivant (I.3). L'auto-décomposabilité de  $H$  est en fait équivalente à la décroissance de la fonction  $t \mapsto t\nu(t)$  (cf. [Lu1, p. 164]), décroissance qui se vérifie directement à partir de (I.4). Ainsi, pour tout  $c \in ]0, 1[$ , il existe une v.a.  $R_c$  telle que

$$(I.9) \quad H \stackrel{\text{loi}}{=} cH + R_c$$

où, dans le second membre de (I.9),  $H$  et  $R_c$  sont indépendantes. Reste à prouver que  $(X, H)$  forme un couple de Wald, i.e. que (I.7) est vraie. Or, d'après le lemme I.1.3 ci-dessous, on a

$$(I.10) \quad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t})(1 - e^{-x^2/2t}) dt = \frac{1}{x} (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1)$$

avec  $x, \lambda > 0$ . D'où

$$(I.11) \quad \int_0^\infty x c(dx) \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t})}{\sqrt{2\pi t^3}} (1 - e^{-x^2/2t}) dt = \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c(dx),$$

ce qui prouve (I.6) et (I.7). □

LEMME I.1.3. — Soit  $(B_t, t \geq 0)$  un mouvement brownien linéaire issu de 0 et, pour tout  $x \geq 0$

$$T_x = \inf\{t \geq 0; B_t = x\}.$$

Alors, le processus  $(T_x, x \geq 0)$  est un subordonateur stable d'indice  $\frac{1}{2}$ , tel que :

- 1) la densité de  $T_x$  vaut  $x/\sqrt{2\pi t^3} \exp(-x^2/2t)$  ( $t \geq 0$ ) ;
- 2) la transformée de Laplace de  $T_x$  vaut, pour tout  $\gamma \geq 0$ ,

$$E(e^{-\gamma T_x}) = e^{-x\sqrt{2\gamma}} = \int_0^\infty \frac{x dt}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(\gamma t + x^2/2t)} ;$$

- 3) la mesure de Lévy du subordonateur  $(T_x, x \geq 0)$  est égale à  $dt/\sqrt{2\pi t^3}$  ;
- 4) pour tout  $\lambda$  et  $x > 0$ , on a

$$(I.12) \quad \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}} (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t})(1 - e^{-x^2/2t}) dt = \frac{1}{x}(e^{-\lambda x} + \lambda x - 1).$$

Démonstration du lemme I.1.3. — Les points 1), 2) et 3) sont classiques (cf. [RY] pour 1), 2) et [Sa1, p. 197, th. 30.1] ou [MNY, lemme 6.2, p. 224]) pour le point 3). Pour le point 4), on écrit le membre de gauche de (I.12) sous la forme

$$(I.13) \quad \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}} (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}) - \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}} + \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t - x^2/2t} dt}{\sqrt{2\pi t^3}} = \lambda - \frac{1}{x} + \frac{e^{-\lambda x}}{x}$$

d'après les points 3), 1) et 2) précédents. □

Remarque I.1.4. — La formule (I.6) indique que la loi de  $X$  détermine celle de  $H$ , et réciproquement. C'est une formule de dualité que nous utiliserons pour transcrire sur  $X$  certaines propriétés connues de  $H$ .

Exemple I.1.5. — Si nous choisissons

$$c(dx) = \frac{k^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-kx} \mathbf{1}_{x \geq 0} dx$$

(avec  $a, k > 0$ ), nous avons

$$(I.14) \quad E(e^{\lambda X}) = \exp\left(\left(1 + \frac{\lambda}{k}\right)^{-a} - 1 + a \frac{\lambda}{k}\right), \quad (\lambda \geq 0),$$

$$(I.15) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}) = \exp\left(-\left(\left(1 + \frac{\lambda}{k}\right)^{-a} - 1 + a \frac{\lambda}{k}\right)\right), \quad (\lambda \geq 0).$$

**I.2. Exemples liés à un subordonateur et à un processus additif.**

I.2.1. *Exemple lié à la loi de Poisson.* — Soit  $a > 0$  et prenons pour mesure  $c_t(dx) = t\delta_a(dx)$  ( $t \geq 0$ ) où  $\delta_a$  désigne la masse de Dirac au point  $a$ . Soit  $(X_t, H_t)$  le couple de Wald associé à  $c_t$ . Alors on peut choisir  $X_t$  et  $H_t$  sous la forme

- $X_t = a(t - N_t)$ , où  $N_t$  est un processus de Poisson standard ;
- $(H_t, t \geq 0)$  est un subordonateur dont la loi au temps 1 est celle de  $H_1$ .

La densité de Lévy  $\nu$  associée à  $H_1$  (cf. I.4) satisfait

$$e^{-\lambda a} + \lambda a - 1 = \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t})\nu(t) dt,$$

soit par dérivation

$$a^2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda a} \right) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t} t \nu(t) dt = a^2 E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T_{U_a}})$$

où  $(T_x, x \geq 0)$  est un subordonateur stable ( $\frac{1}{2}$ ) indépendant de la v.a.  $U_a$ , uniforme sur  $[0, a]$ . Finalement, on a

$$(I.16) \quad P(T_{U_a} \in dt) = \frac{1}{a} \left( \int_0^a \frac{u e^{-u^2/2t} du}{\sqrt{2\pi t^3}} \right) dt = \frac{1}{a} \left( \frac{1 - e^{-a^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \right) dt$$

et

$$\nu(t) = a \left( \frac{1 - e^{-a^2/2t}}{\sqrt{2\pi t^3}} \right) \quad \left( = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty (1 - e^{-x^2/2t}) x \delta_a(dx) \right).$$

I.2.2. *Utilisation de processus de Lévy et de processus additifs.* — Soit  $(X, H)$  le couple de Wald indéfiniment divisible associé à  $c$  et soit  $(X_t, t \geq 0)$  (resp.  $(H_t, t \geq 0)$ ) le processus de Lévy (resp. le subordonateur) dont la loi au temps 1 est celle de  $X$  (resp.  $H$ ). Alors  $(X_t, H_t)$  est un couple de Wald indéfiniment divisible associé à la mesure  $t c(dx)$  ( $t \geq 0$ ).

Soit encore  $(X, H)$  un couple de Wald indéfiniment divisible associé à  $c$ . Si  $X$  est auto-décomposable, on sait d'après K. Sato [Sa2] qu'il existe un processus  $(\tilde{H}_t, t \geq 0)$  (resp.  $(\tilde{X}_t, t \geq 0)$ ) additif (i.e. à accroissements indépendants, non stationnaire) tel que

$$(\tilde{H}_{kt}, t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (k^2 \tilde{H}_t, t \geq 0), \quad (\tilde{X}_{kt}, t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (k \tilde{X}_t, t \geq 0),$$

pour tout  $k > 0$  et où  $\tilde{X}_1$  (resp.  $\tilde{H}_1$ ) a même loi que  $X$  (resp.  $H$ ). Il est alors aisé de voir que le couple  $(\tilde{X}_t, \tilde{H}_t)$  est un couple de Wald indéfiniment divisible associé à la mesure  $\tilde{c}_t$ , image de  $c$  par l'homothétie de rapport  $t$ .

I.2.3. *Exemple lié à un subordonateur.* — Soit  $(\Sigma_u, u \geq 0)$  un subordonateur sans terme de translation et ayant pour mesure de Lévy  $\sigma$ . Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(u)y \, du \, \sigma(dy) := C < \infty.$$

Soit

$$X := C - \int_0^\infty f(u) \, d\Sigma_u.$$

Soit  $c$  l'image de la mesure  $\sigma(dy) \otimes du$  par l'application de  $\mathbb{R}_+^2$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par  $(y, u) \mapsto yf(u)$ . Alors :

PROPOSITION I.2.3. — *Il existe  $H$  telle que le couple  $(X, H)$  soit un couple de Wald indéfiniment divisible associé à  $c$ . De plus, on a  $\int_0^\infty x c(dx) = C < \infty$ .*

*Démonstration.* — 1) Il est clair que

$$(I.17) \quad \int_0^\infty x c(dx) = \int_0^\infty \int_0^\infty yf(u) \, \sigma(dy) \, du = C < \infty.$$

2) D'après l'une des formules clés de la théorie des processus de Poisson ponctuels (cf. [RY, chap. XII, p. 452]), on a

$$\begin{aligned} E(e^{\lambda X}) &= E\left(e^{\lambda C - \lambda \int_0^\infty f(u) \, d\Sigma_u}\right) \\ &= \exp \left\{ \lambda C - \int_0^\infty \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda f(s)y}) \, \sigma(dy) \, ds \right\} \\ &= \exp \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-\lambda f(s)y} + \lambda f(s)y - 1) \, \sigma(dy) \, ds \right\} \\ &= \exp \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c(dx) \end{aligned}$$

et il n'est pas difficile de vérifier que  $\int_0^\infty (x^2 \wedge x) c(dx) < \infty$ . □

### I.3. Premières propriétés de la loi et des moments du couple $(X, H)$ .

Soient  $c$  comme dans le théorème I.1 et  $(X, H)$  le couple de Wald indéfiniment divisible associé.

I.3.1. *Densité de  $H$ .* — Notons déjà que  $X$  n'a pas de densité en général, comme le montre l'exemple I.2.1. Par contre, la loi de  $H$  possède les propriétés suivantes :

PROPOSITION I.3.1. — 1) La loi de  $H$  admet une densité  $p(x)$  de classe  $C^\infty$ .

2) Si  $\int_0^\infty x^4 c(dx) < \infty$ , alors on a  $p(x) \sim k/x^{5/2}$ ,  $x \rightarrow \infty$ . Sous cette hypothèse,  $H$  admet un moment d'ordre  $\gamma$  si et seulement si  $\gamma < \frac{3}{2}$ .

Démonstration. — 1) Nous déduisons de la formule (I.3) que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$(I.18) \quad E(e^{i\lambda H}) = \exp - \int_0^\infty (1 - e^{i\lambda t}) \nu(t) dt.$$

Remplaçant  $\nu$  dans (I.18) par sa valeur donnée par (I.4), on montre sans peine l'existence d'une constante  $k$  telle que

$$(I.19) \quad |E(e^{i\lambda H})| \leq \exp(-k\sqrt{|\lambda|}) \quad (|\lambda| \geq 1),$$

si bien que la fonction caractéristique de  $H$  admet des moments de tout ordre.

2) Soit  $p$  la densité de  $H$ . Supposons que  $\int_0^\infty x^4 c(dx) < \infty$  (ce qui équivaut à  $\int_1^\infty x^4 c(dx) < \infty$ ). D'après (I.10), on a

$$(I.20) \quad E(e^{-\lambda H}) = \exp - \int_0^\infty (e^{-\sqrt{2\lambda}x} + \sqrt{2\lambda}x - 1) c(dx).$$

Soit, en notant  $C_i = \int_0^\infty x^i c(dx)$  pour  $i = 2, 3, 4$ ,

$$(I.21) \quad \int_0^\infty (e^{-\sqrt{2\lambda}x} + \sqrt{2\lambda}x - 1) c(dx) = \lambda C_2 - \frac{\sqrt{2}}{3} C_3 \lambda^{3/2} + O(\lambda^2)$$

et par dérivation de (I.20),

$$(I.22) \quad \begin{aligned} E(H^2 e^{-\lambda H}) &= \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left( -\lambda C_2 + \frac{\sqrt{2}}{3} C_3 \lambda^{3/2} + O(\lambda^2) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}\lambda} C_3 + O(1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^2 p(x) dx = \frac{C_3}{2\sqrt{2}\lambda} + O(1).$$

Par application d'un théorème taubérien :

$$p(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{C_3}{2\sqrt{2}\pi} \frac{1}{x^{5/2}}.$$

□

*Remarque I.3.2.* — Sans utiliser le point précédent, on peut voir directement que, si  $c$  n'est pas dégénérée, i.e. s'il existe  $a > 0$  tel que  $c([a, \infty[) > 0$ , alors  $E(H^2) = \infty$ . En effet, par dérivation de (I.3) :

$$(I.23) \quad E(H^2) = \left( \int_0^\infty t \nu(t) dx \right)^2 + \int_0^\infty t^2 \nu(t) dt.$$

Or

$$(I.24) \quad \begin{aligned} \int_0^\infty t^2 \nu(t) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{t} (1 - e^{-x^2/2t}) x c(dx) dt \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty x c(dx) \int_0^\infty \sqrt{t} (1 - e^{-a^2/2t}) dt = +\infty. \end{aligned}$$

*Remarque I.3.3.* — Les moments de  $X$  peuvent se calculer, à partir de (I.2), en fonction de ceux de  $c$ . Plus précisément :

$$(I.25) \quad E(X^3) = - \int_0^\infty x^3 c(dx),$$

$$(I.26) \quad E(X^5) = - \int_0^\infty x^5 c(dx) - 10 \int_0^\infty x^2 c(dx) \cdot \int_0^\infty x^3 c(dx).$$

En particulier,  $X$  admet des moments de tout ordre si et seulement si

$$(I.27) \quad \forall n \geq 2, \quad \int_0^\infty x^n c(dx) < \infty.$$

Notons aussi que l'on a, en utilisant la définition (I.4) de  $\nu(t)$ ,

$$\int_0^\infty t^\alpha \nu(t) dt = k_\alpha \int_0^\infty x^{2\alpha} c(dx)$$

où la constante  $k_\alpha$  vaut

$$k_\alpha = \int_0^\infty (1 - e^{-1/2t}) t^{\alpha - \frac{3}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}.$$

La constante  $k_\alpha$  est finie si et seulement si  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$ . En effet, après le changement de variable  $t = 1/u$ , il vient

$$\begin{aligned} k_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}u}}{u^{\alpha - \frac{3}{2}}} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{2u^{\alpha + \frac{1}{2}}} \int_0^u e^{-\frac{1}{2}v} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{u^{\alpha + \frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{1}{2}u} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t} dt \int_{2t}^\infty \frac{du}{u^{\alpha + \frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t} \frac{(2t)^{-\alpha + \frac{1}{2}}}{\alpha - \frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \alpha)}{2^{\alpha - \frac{1}{2}} (\alpha - \frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - \alpha)}{2^\alpha \sqrt{\pi} (\alpha - \frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

*Remarque I.3.4.* — Si l'on suppose que la relation

$$E(e^{\lambda X})E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}) = 1$$

est vraie pour tout  $\lambda$  réel, alors  $c$  est dégénérée, i.e.  $c(dx) = k\delta_0(dx)$ . En effet, sous cette hypothèse,  $X$  est symétrique et admet des moments de tout ordre. En particulier, d'après le point précédent,

$$E(X^3) = - \int_0^\infty x^3 c(dx) = 0.$$

**PROPOSITION I.3.5.** — Si  $\int_0^\infty x c(dx) = C_1 < \infty$ , alors on a

$$P(X \leq C_1) = 1.$$

*Démonstration.* — Puisque  $\int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c(dx) \leq \lambda C_1$ , pour tout  $\lambda \geq 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\begin{aligned} P(X \geq C_1 + \varepsilon) &= P(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda(C_1 + \varepsilon)}) \\ &\leq e^{-\lambda(C_1 + \varepsilon)} E(e^{\lambda X}) \\ &\leq \exp \left\{ \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c(dx) - \lambda(C_1 + \varepsilon) \right\} \\ &\leq \exp -\lambda(C_1 + \varepsilon - C_1) = e^{-\lambda\varepsilon} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

**I.4. Réalisation de  $H$  à l'aide de la formule des fluctuations.**

Nous allons voir que  $H$  peut être réalisée (en loi) comme la valeur d'un subordonateur explicite pris au temps 1. Soit  $\nu(t)$  définie par (I.4). Il est clair que  $\nu$  est une fonction décroissante de  $t$ ; on a donc

$$(I.28) \quad \nu(t) = \int_t^\infty (-\nu'(u)) du \quad \text{avec } -\nu'(u) \geq 0.$$

Soit maintenant  $(Y_t, t \geq 0)$  le processus de Lévy issu de 0 tel que

$$(I.29) \quad E(e^{-\lambda Y_t}) = \exp t\rho(\lambda) \quad (\lambda \geq 0),$$

avec

$$(I.30) \quad \rho(\lambda) := \int_0^\infty (e^{-\lambda t} - 1 + \lambda t)(-\nu'(t)) dt.$$

Notons que

$$(I.31) \quad \int_0^\infty (t^2 \wedge t)(-\nu'(t)) dt < \infty,$$

ce qui assure que  $(Y_t, t \geq 0)$  est convenablement défini. On pourra consulter



[LG, p. 132–133] pour ce qui figure dans cet alinéa. Le processus  $(Y_t, t \geq 0)$  n'a pas de sauts négatifs et 0 est un point régulier pour  $]0, \infty[$ , i.e.

$$\inf\{t > 0; Y_t > 0\} = 0 \quad \text{p.s.}$$

puisque

$$(I.32) \quad \int_0^1 t(-\nu'(t)) dt = +\infty.$$

Soit  $S_t = \sup_{s \leq t} Y_s$ . Dans ces conditions, le processus  $(S_t - Y_t, t \geq 0)$  admet un temps local en 0, noté  $L_t$ . Désignant par  $\tau_\ell = \inf\{t; L_t > \ell\}$ , la « formule des fluctuations » (cf. [LG]) donne l'exposant caractéristique du subordonateur  $S_{\tau_\ell}$  :

$$(I.33) \quad E(e^{-\lambda S_{\tau_\ell}}) = \exp\left(-\ell \frac{\rho(\lambda)}{\lambda}\right).$$

Mais, en intégrant par parties, on déduit de (I.30) que

$$(I.34) \quad \frac{\rho(\lambda)}{\lambda} = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) \nu(t) dt,$$

si bien que

$$(I.35) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 S_{\tau_\ell}}) = \exp\left(-\ell \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 u}) \nu(u) du\right).$$

Comparant alors (I.35) et (I.3), on a

$$(I.36) \quad H \stackrel{\text{loi}}{=} S_{\tau_1}.$$

### I.5. Couples de Wald indéfiniment divisibles et couples de Wald browniens.

Le théorème I.1.1 fournit l'existence de couples de Wald indéfiniment divisibles. D'autres couples de Wald sont définis dans [DRVY], couples que nous appellerons ici *couples de Wald browniens*. Plus précisément, si  $(B_t, t \geq 0)$  est un mouvement brownien issu de 0,  $T$  un temps d'arrêt tel que la martingale  $(B_{t \wedge T}, t \geq 0)$  soit uniformément intégrable et si de plus  $T$  et  $B_T$  sont indépendantes, alors on a (cf. [DRVY, th. 2]), pour tout  $\lambda$  réel,

$$(I.37) \quad E(e^{\lambda B_T}) E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T}) = 1.$$

Ainsi,  $B_T$  et  $T$  forment un « couple de Wald brownien ». Une question naturelle est de chercher à décrire l'intersection de ces deux classes de couples de Wald. En fait, les couples de Wald browniens indéfiniment divisibles sont peu intéressants. En effet :

PROPOSITION I.5.1. — Soit  $(B_T, T)$  un couple de Wald brownien tel que  $B_T$  soit indéfiniment divisible. Alors  $T$  est constant et  $B_T$  est gaussienne (cf. également II.1.1, le cas  $\mu = 0$ , ci-dessous).

Démonstration. — Soit  $(T, B_T)$  un couple de Wald brownien. Soit  $h(z) = E(e^{zB_T})(z \in \mathbb{C})$ . On sait (voir [DRVY, th. 2]) que  $h$  est une fonction holomorphe, paire et d'ordre inférieur ou égal à 2. Par ailleurs, si  $B_T$  est indéfiniment divisible,  $h$  ne s'annule pas (cf. [Lu1, th. 8.4.1, p. 258]). La décomposition d'Hadamard de  $h$  s'écrit donc (cf. [Va]) :

$$h(z) = \exp\left(a + bz + \frac{1}{2}cz^2\right).$$

Mais puisque  $h(0) = 1$  et que  $h$  est paire,  $h(z) = \exp\frac{1}{2}cz^2$ , ce qui prouve que  $B_T$  est gaussienne. La relation de Wald implique alors que

$$E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 c\right), \quad \text{et donc } T = c \text{ p.s.} \quad \square$$

### I.6. Sur la complète auto-décomposabilité de $H$ .

Nous avons vu dans le théorème I.1.1 que  $H$  est auto-décomposable, i.e., pour tout  $c \in ]0, 1[$ , on peut écrire

$$(I.38) \quad H \stackrel{\text{loi}}{=} cH + R_c$$

avec  $H$  et  $R_c$  indépendantes. Une question naturelle est : « peut-on recommencer, i.e.  $R_c$  est-elle encore auto-décomposable, et ainsi de suite ? ». Nous allons essayer de donner une réponse à cette question.

DÉFINITION I.6.1. —  $H \geq 0$  est dite *complètement auto-décomposable* si, pour tout  $n$  et tous  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  ( $0 < \gamma_i < 1$ ) on peut écrire

$$(I.39) \quad H \stackrel{\text{loi}}{=} \gamma_1 H + H_1, \quad H_1 \stackrel{\text{loi}}{=} \gamma_2 H_1 + H_2, \quad \dots, \quad H_{n-1} \stackrel{\text{loi}}{=} \gamma_n H_{n-1} + H_n,$$

où les v.a.  $H_1, \dots, H_n$  sont positives, et où les seconds membres des égalités (I.39) sont constitués de v.a. indépendantes.

Plusieurs auteurs (K. Sato, Z. Jurek, W. Vervaat, etc.) ont étudié cette notion de complète auto-décomposabilité, et également celle de  $p$ -auto-décomposabilité (i.e. quand (I.39) est vraie pour tout  $n \leq p$ ), cf. ([JV], [MSW]).

THÉORÈME I.6.2. — Soit

$$(I.40) \quad c(x) = \int_0^1 \frac{\sigma(d\beta)}{x^{2+\beta}}$$

où  $\sigma$  est une mesure positive telle que

$$(I.41) \quad \int_0^1 \left( \frac{1}{\beta} + \frac{1}{1-\beta} \right) \sigma(d\beta) < \infty.$$

Alors, la v.a.  $H$  associée à la mesure  $c(x) dx$  par le théorème I.1.1 est complètement auto-décomposable.

*Démonstration.* — (i) Vérifions que la mesure  $c(x) dx$  définie par (I.40) satisfait à (I.1). D'après (I.41), on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 c(dx) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sigma(d\beta)}{x^\beta} dx = \int_0^1 \frac{\sigma(d\beta)}{1-\beta} < \infty, \\ \int_1^\infty x c(dx) &= \int_1^\infty dx \int_0^1 \frac{\sigma(d\beta)}{x^{1+\beta}} = \int_0^1 \frac{\sigma(d\beta)}{\beta} < \infty. \end{aligned}$$

(ii) Remplaçons, dans la définition I.6.1, les  $\gamma_i$  par  $\gamma_i^2$ . On a ainsi :

$$\begin{aligned} E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\gamma_1^2 H}) &= \exp - \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\gamma_1^2 t}) \nu(t) dt \\ &= \exp - \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 u}) \frac{1}{\gamma_1^2} \nu\left(\frac{u}{\gamma_1^2}\right) du, \\ \frac{1}{\gamma_1^2} \nu\left(\frac{u}{\gamma_1^2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}} \int_0^\infty (1 - e^{-x^2/2u}) x \frac{1}{\gamma_1} c\left(\frac{x}{\gamma_1}\right) dx. \end{aligned}$$

On se souvient (cf. [Lu1, p. 164]) que, dès que la fonction  $u \mapsto \nu(u)$  est décroissante, alors  $H$  est auto-décomposable. Si l'on définit l'opérateur  $T_{\gamma_1} : c \rightarrow T_{\gamma_1}(c)$  par

$$(I.42) \quad T_{\gamma_1}(c)(x) = c(x) - \frac{1}{\gamma_1} c\left(\frac{x}{\gamma_1}\right),$$

il est alors clair qu'une condition suffisante pour que  $H$  soit complètement auto-décomposable est

$$(I.43) \quad \forall n, \forall \gamma_1, \dots, \gamma_n, (\gamma_i \in ]0, 1[), \quad T_{\gamma_n} \circ T_{\gamma_{n-1}} \circ \dots \circ T_{\gamma_1} c(x) \geq 0,$$

et

$$(I.44) \quad \int_0^\infty (x^2 \wedge x) T_{\gamma_n} \circ \dots \circ T_{\gamma_1} c(x) dx < \infty.$$

Or on a

$$\begin{aligned} T_\gamma c(x) &= \int_0^1 \frac{\sigma(d\beta)}{x^{2+\beta}} - \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \frac{\gamma^{2+\beta}}{x^{2+\beta}} \sigma(d\beta) \quad (0 < \gamma < 1) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^{2+\beta}} (1 - \gamma^{1+\beta}) \sigma(d\beta) \end{aligned}$$

et donc

$$T_{\gamma_n} \circ \dots \circ T_{\gamma_1} c(x) = \int_0^1 \frac{\sigma(d\beta)}{x^{2+\beta}} \left( \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i^{1+\beta}) \right) \geq 0,$$

ce qui prouve (I.43) et (I.44) d'après le point (i) de cette démonstration.  $\square$

QUESTION I.6.3. — La réciproque est-elle exacte : si  $H$  est complètement auto-décomposable, est-ce que  $c$  est de la forme (I.40) ?

### I.7. Décomposition affine de la loi stable $\frac{1}{2}$ .

Dans l'étude des marches aléatoires sur le groupe affine de  $\mathbb{R}$ , lorsque la marche est récurrente, de nombreux auteurs (cf. par exemple [BBE]) sont amenés, pour décrire la mesure invariante associée à cette marche, à étudier l'équation

$$(I.45) \quad T \stackrel{\text{loi}}{=} S + L^2 T \quad (L \geq 0)$$

où, dans le second membre de (I.45), le couple  $(S, L)$  est indépendant de  $T$ . Dans [DGY], le cas particulier important où  $T$  est une v.a. positive stable  $(\frac{1}{2})$  est étudié en détail. Dans ce cas, l'équation (I.45) peut s'écrire encore

$$(I.46) \quad T \stackrel{\text{loi}}{=} S + V_L$$

où, dans le second membre de (I.46),  $(V_y, y \geq 0)$  est un subordonateur stable d'indice  $(\frac{1}{2})$  indépendant du couple  $(S, L)$ . Notre but est ici de montrer qu'il existe un lien étroit entre l'équation (I.46) et la notion de couple de Wald indéfiniment divisible.

DÉFINITION I.7.1 (cf. [DGY]). — Nous dirons que le couple  $(S, L)$  de v.a. positives et indépendantes *fournit une décomposition indépendante affine de  $T$*  si on peut écrire

$$(I.47) \quad T \stackrel{\text{loi}}{=} S + V_L$$

où  $(V_y, y \geq 0)$  est un subordonateur stable d'indice  $(\frac{1}{2})$  indépendant du couple  $(S, L)$ . Nous dirons que la décomposition (I.47) est *indéfiniment divisible d'espérance finie* si  $L$  est indéfiniment divisible et d'espérance finie.

PROPOSITION I.7.2. — 1) Soit  $c$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\int_0^\infty x c(dx) = C < \infty$  et soit  $(X, H)$  le couple de Wald indéfiniment divisible associé. Alors le couple  $(S, L)$ , avec  $S = H/C^2$ ,  $L = 1 - X/C$  fournit une décomposition affine de  $T$  indéfiniment divisible et d'espérance finie.

2) Réciproquement, soit  $(S, L)$  le couple satisfaisant à (I.47) et tel que  $L$  soit indéfiniment divisible de mesure de Lévy  $c$ , avec  $E(L) = \int_0^\infty x c(dx) < \infty$ . Alors on a  $E(L) = 1$  et le couple  $(X, H)$ , avec  $X = 1 - L$  et  $H = S$  est un couple de Wald indéfiniment divisible associé à  $c$ . En particulier,  $S$  est indéfiniment divisible.

Démonstration. — 1) Soit  $\tilde{L} := C - X$ . On sait (cf. proposition I.3.5) que  $\tilde{L}$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . De la relation

$$(I.48) \quad 1 = E(e^{\lambda X})E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}) \\ = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}) \cdot \exp \left\{ - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) c(dx) + \lambda C \right\}$$

on tire  $E(e^{-\lambda \tilde{L}}) = \exp - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) c(dx)$  et

$$(I.49) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T_C}) = e^{-\lambda C} = E(e^{-\lambda \tilde{L}})E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}). \\ = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 V_{\tilde{L}}})E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}).$$

D'où

$$(I.50) \quad T_C \stackrel{\text{loi}}{=} H + V_{\tilde{L}}$$

où, dans le membre de droite,  $H, (V_\ell, \ell \geq 0)$  et  $\tilde{L}$  sont indépendants et où  $T_C$  désigne le premier temps d'atteinte du niveau  $C$  par un mouvement brownien standard. On déduit par scaling de (I.50) que

$$T_1 \stackrel{\text{loi}}{=} T = \frac{H}{C^2} + V_{\tilde{L}/C},$$

d'où le point 1) de la proposition I.7.2.

2) Réciproquement, supposons (I.47) réalisée avec

$$(I.51) \quad E(e^{-\lambda L}) = \exp \left( - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) c(dx) \right)$$

et  $\int_0^\infty x c(dx) = E(L) < \infty$ . D'après (I.47), on a

$$(I.52) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T}) = e^{-\lambda} = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 S})E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 V_L}),$$

soit  $e^{-\lambda} = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 S})E(e^{-\lambda L})$ . Par dérivation de (I.52), on a

$$E(L) = \int_0^\infty x c(dx) = 1,$$

d'où

$$(I.53) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 S}) = \exp\left(-\int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c(dx)\right),$$

ce qui prouve, en comparant (I.53) avec (I.3) et (I.6) que  $(1 - L, S)$  forme un couple de Wald indéfiniment divisible associé à  $c$ . □

**I.8. Utilisation de la subordination et le problème de Van Dantzig.**

Soit  $c$  une mesure satisfaisant à (I.1), et soit  $(X, H)$  le couple de Wald indéfiniment divisible associé. Nous pouvons par subordination associer à  $H$  une nouvelle v.a.  $\hat{H}$  de la façon suivante. Soit  $(B_t, t \geq 0)$  un mouvement brownien issu de 0 et indépendant de  $H$ . Définissons

$$(I.54) \quad \hat{H} = B_H$$

et donc

$$(I.55) \quad E(e^{i\lambda\hat{H}}) = E(e^{i\lambda B_H}) = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}),$$

d'où la :

PROPOSITION I.8.1. — 1) Le couple  $(X, \hat{H})$  satisfait à

$$(I.56) \quad E(e^{\lambda X})E(e^{i\lambda\hat{H}}) = 1 \quad (\lambda \geq 0).$$

2)  $\hat{H}$  est indéfiniment divisible de mesure de Lévy  $\hat{\nu}(t) dt$ , avec

$$(I.57) \quad \hat{\nu}(t) = \int_0^\infty \nu(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-t^2/2u} du$$

(où  $\nu(u)$  est définie par (I.4)).

*Démonstration.* — Le point 1) résulte de (I.55) et du fait que  $(X, H)$  est un couple de Wald. Le point (I.57) s'obtient par calcul direct (cf. [Sa1, p. 198]). Plus précisément, si  $(X_u, u \geq 0)$  est un processus de Lévy et  $(Z_t, t \geq 0)$  est un subordonateur,  $(X_t, t \geq 0)$  et  $(Z_t, t \geq 0)$  étant indépendants, alors  $(Y_t := X_{Z_t}, t \geq 0)$  est encore un processus de Lévy, de mesure de Lévy  $\nu_Y$  donnée par

$$(I.58) \quad \nu_Y(dt) = \int_0^\infty p(u, dt) \rho(du),$$

où  $p(u, dt)$  est la loi de  $X_u$  et où  $\rho$  est la mesure de Lévy de  $(Z_t, t \geq 0)$ .

Appliquant ceci à notre situation, on a

$$(I.59) \quad \widehat{\nu}(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-t^2/2u} \nu(u) du$$

puisque la densité de  $B_u$  est  $1/\sqrt{2\pi u} e^{-t^2/2u}$  et  $\nu$  est la densité de Lévy de  $H$ .  $\square$

*Remarque I.8.2.* — L'exemple probablement le plus connu de subordination consiste à prendre  $\nu(t) = 1/\sqrt{2\pi t^3}$ , la densité de Lévy associée au premier temps d'atteinte du niveau 1 par un mouvement brownien standard (cf. lemme I.1.3). Cet exemple n'entre pas dans notre cadre des couples de Wald indéfiniment divisibles, mais nous utiliserons plus loin ce résultat. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}(y) dy &= \left( \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-y^2/2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} dt \right) dy \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{t^2} e^{-y^2/2t} dt \right) dy = \frac{dy}{\pi y^2}. \end{aligned}$$

C'est la mesure de Lévy de la loi de Cauchy standard.

*Remarque I.8.3.* — Dans un article célèbre, E. Lukacs [Lu2] décrit plusieurs familles de couples  $(X, \widehat{H})$  de v.a. telles que

$$(I.60) \quad E(e^{\lambda X}) \cdot E(e^{i\lambda \widehat{H}}) = 1$$

pour tout  $\lambda$  appartenant à une bande d'holomorphie du plan complexe. Le point 1) de la proposition (I.8.1) fournit, via la définition des couples de Wald indéfiniment divisibles donnée par le théorème I.1.1, de nombreuses solutions à l'équation (I.56).

## II. Familles d'Esscher de couples de Wald indéfiniment divisibles.

### II.1. Définition d'une famille d'Esscher de couples de Wald indéfiniment divisibles.

Le but de ce paragraphe est d'associer à la mesure  $c_\alpha(dx) = e^{-\alpha x} c(dx)$  ( $x \geq 0$ ) des v.a.  $X_\alpha$  et  $H_\alpha$ , comme nous l'avons fait à l'alinéa

précédent. Commençons par fixer nos notations. Soit  $c$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+$  telle qu'il existe  $\alpha_0 \geq 0$  avec

$$(II.1) \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^2 c(dx) < \infty \quad \text{pour tout } \alpha > \alpha_0,$$

ce qui équivaut à

$$(II.2) \quad \int_0^1 x^2 c(dx) < \infty$$

et

$$(II.3) \quad \int_1^\infty e^{-\alpha x} c(dx) < \infty$$

pour tout  $\alpha > \alpha_0$ . Désignons par  $\varphi$  une primitive, sur  $] \alpha_0, \infty[$ , de la fonction

$$(II.4) \quad \varphi'(\alpha) := \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^2 c(dx).$$

Il est clair que  $\varphi'$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $] \alpha_0, \infty[$  et que,  $\alpha_1$  étant choisi plus grand que  $\alpha_0$ , on peut choisir

$$(II.5) \quad \varphi(\alpha) = \int_0^\infty (e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha x}) x c(dx).$$

Définissons, pour  $\alpha_2 > \alpha_0$ ,

$$(II.6) \quad F(\alpha) := \exp \int_{\alpha_2}^\alpha \varphi(u) du, \quad \alpha > \alpha_0.$$

En d'autres termes, on a  $\varphi(\alpha) = (\log F)'(\alpha) = (F'/F)(\alpha)$ . Soit encore

$$(II.7) \quad \Lambda(\alpha, \lambda) := \frac{F(\alpha)}{F(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \varphi(\alpha).$$

Notons que  $\Lambda(\alpha, \lambda)$  ne dépend pas du point  $\alpha_2 > \alpha_0$  choisi. Nous avons besoin du

LEMME II.1.1. — 1) *La fonction  $\Lambda(\alpha, \lambda)$  ne dépend pas du choix de la primitive  $\varphi$ .*

2) *Pour tous  $\alpha > \alpha_0$  et  $\lambda \geq 0$ , on a*

$$(II.8) \quad \Lambda(\alpha, \lambda) = \exp - \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) e^{-\alpha x} c(dx).$$



*Démonstration.* — 1) Soient  $k$  une constante et  $\Lambda_k(\alpha, \lambda)$  la fonction définie par (II.5), (II.6) et (II.7), où l'on a remplacé  $\varphi$  par  $\varphi + k$ . On a alors

$$\Lambda_k(\alpha, \lambda) = \frac{F(\alpha)}{F(\alpha + \lambda)} \frac{\exp k(\alpha - \alpha_2)}{\exp k(\alpha + \lambda - \alpha_2)} \exp(\lambda(k + \varphi(\alpha))) = \Lambda(\alpha, \lambda).$$

2) Choisissons la fonction  $\varphi(\alpha) = \int_0^\infty (e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha x}) x c(dx)$  pour primitive de  $\varphi'$ . On a alors

$$\begin{aligned} \text{(II.9)} \quad \Lambda(\alpha, \lambda) &= \exp \left\{ - \int_\alpha^{\alpha+\lambda} \varphi(u) du + \lambda \varphi(\alpha) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_\alpha^{\alpha+\lambda} du \int_0^\infty (e^{-\alpha_1 x} - e^{-ux}) x c(dx) + \lambda \int_0^\infty (e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha x}) x c(dx) \right\} \\ &= \exp - \left\{ \int_0^\infty x c(dx) \left( \int_\alpha^{\alpha+\lambda} (e^{-\alpha_1 x} - e^{-ux}) du - \lambda (e^{-\alpha_1 x} - e^{-\alpha x}) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_0^\infty (e^{-\alpha x} + \lambda x - 1) e^{-\alpha x} c(dx) \right\}. \quad \square \end{aligned}$$

Nous appliquons maintenant le théorème I.1.1 en remplaçant  $c(dx)$  par  $c_\alpha(dx) = e^{-\alpha x} c(dx)$ , ce qu'il est légitime de faire, puisque d'après (II.1), la mesure  $c_\alpha$  satisfait à (I.1). Compte-tenu du lemme II.1.1, nous avons donc obtenu :

**THÉORÈME II.1.2.** — *Soit  $c$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+$  satisfaisant à (II.1) (ou (II.2) et (II.3)). Pour tout  $\alpha > \alpha_0$ , il existe un couple de Wald indéfiniment divisible  $(X_\alpha, H_\alpha)$  tel que :*

1) Pour tout  $\lambda \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \text{(II.10)} \quad E(e^{\lambda X_\alpha}) &= \frac{F(\alpha + \lambda)}{F(\alpha)} \exp - \lambda \varphi(\alpha) \\ &= \exp \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) e^{-\alpha x} c(dx). \end{aligned}$$

La v.a.  $X_\alpha$  admet un moment d'ordre 1 et est centrée; elle admet des moments de tout ordre et on a

$$E(X_\alpha^2) = \int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} c(dx).$$

2)  $H_\alpha$  est positive et pour tout  $\lambda \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \text{(II.11)} \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha}) &= \frac{F(\alpha)}{F(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \varphi(\alpha) \\ &= \exp - \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}) \nu_\alpha(t) dt \end{aligned}$$

avec

$$(II.12) \quad \nu_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty (1 - e^{-x^2/2t}) x e^{-\alpha x} c(dx).$$

On a

$$(II.13) \quad E(H_\alpha) = \varphi'(\alpha)$$

et  $H_\alpha$  est auto-décomposable.

3)  $X_\alpha$  et  $H_\alpha$  forment un couple de Wald indéfiniment divisible, i.e.

$$(II.14) \quad E(e^{\lambda X_\alpha}) E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha}) = 1 \quad (\lambda \geq 0).$$

En particulier,

$$(II.14') \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha}) = \exp - \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) e^{-\alpha x} c(dx).$$

Exemple II.1.3. — Soit  $c(dx) = \frac{1}{2}x^\gamma (\exp - [ax + b/x]) \mathbf{1}_{x \geq 0} dx$  avec  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ . On a ici, pour tout  $\alpha > -a$ ,

$$\varphi(\alpha) = - \int_0^\infty e^{-\alpha x} x c(dx) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\gamma+1} \exp - \left[ (a + \alpha)x + \frac{b}{x} \right] dx.$$

Compte tenu de la formule de représentation intégrale des fonctions de Bessel-Mc Donald (cf. [Er], [Leb, p. 108])

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\gamma-1} \exp - \left( ax + \frac{b}{x} \right) dx = K_\gamma(\sqrt{4ab}) \left( \frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{2}\gamma},$$

on a

$$\varphi(\alpha) = -K_{\gamma+2}(\sqrt{4b(a + \alpha)}) \left( \frac{b}{a + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}(\gamma+2)}.$$

D'autre part  $(F'/F)(\alpha) = \varphi(\alpha)$ , d'où

$$\begin{aligned} \log F(\alpha) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty x^\gamma \exp - \left[ (a + \alpha)x + \frac{b}{x} \right] dx \\ &= K_{\gamma+1}(\sqrt{4b(a + \alpha)}) \left( \frac{b}{a + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}. \end{aligned}$$

Finalement, on a dans cet exemple

$$\begin{aligned} [E(e^{\lambda X_\alpha})]^{-1} &= E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha}) = \frac{F(\alpha)}{F(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \varphi(\alpha) \quad (\lambda > 0, \alpha > -a) \\ &= \exp \left\{ K_{\gamma+1}(\sqrt{4b(a + b)}) \left( \frac{b}{a + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \right. \\ &\quad - K_{\gamma+1}(\sqrt{4b(a + \alpha + \lambda)}) \left( \frac{b}{a + \alpha + \lambda} \right)^{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \\ &\quad \left. - \lambda K_{\gamma+2}(\sqrt{4b(a + \alpha)}) \left( \frac{b}{a + \alpha} \right)^{\frac{1}{2}(\gamma+2)} \right\}. \end{aligned}$$

## II.2. Caractérisation d'une famille d'Esscher de couples de Wald indéfiniment divisibles.

Pour simplifier les notations, nous établirons le théorème II.2.1 (qui est une réciproque du théorème II.1.2) avec  $\alpha_0 = 0$ .

THÉORÈME II.2.1. — Soit  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction régulière et soit  $F$  définie par

$$F(\alpha) = \exp \int_1^\alpha \varphi(u) du \quad (\alpha > 0).$$

Supposons que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe une v.a.  $X_\alpha$  telle que l'on ait, pour tout  $\lambda \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{(II.15)} \quad E(e^{\lambda X_\alpha}) &= \frac{F(\alpha + \lambda)}{F(\alpha)} \exp -\lambda\varphi(\alpha) \\ &= \exp \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c_\alpha(x) dx, \end{aligned}$$

où  $c_\alpha$  est une fonction régulière de  $\alpha$  et de  $x$ . Alors, il existe une fonction  $c(x) \geq 0$  telle que la mesure  $c(x) dx$  satisfasse à (II.1) et telle que

$$\text{(II.16)} \quad \varphi'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^2 c(x) dx \quad (\alpha > 0).$$

*Démonstration.* — Prenant le logarithme de (II.15), on a

$$\log F(\alpha + \lambda) - \log F(\alpha) - \lambda\varphi(\alpha) = \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c_\alpha(x) dx.$$

En dérivant cette identité, d'une part par rapport à  $\lambda$  et d'autre part par rapport à  $\alpha$ , on obtient

$$\text{(II.17)} \quad \varphi(\alpha + \lambda) - \varphi(\alpha) = \int_0^\infty (-x e^{-\lambda x} c_\alpha(x) + x c_\alpha(x)) dx,$$

$$\text{(II.18)} \quad \varphi(\alpha + \lambda) - \varphi(\alpha) - \lambda\varphi'(\alpha) = \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c'_\alpha(x) dx,$$

où  $c'_\alpha$  est la dérivée de  $c_\alpha(x)$  par rapport à  $\alpha$ . Soustrayant (II.18) à (II.17) membre à membre, on obtient

$$\lambda\varphi'(\alpha) = \int_0^\infty [-x e^{-\lambda x} c_\alpha(x) + x c_\alpha(x) - e^{-\lambda x} c'_\alpha(x) - \lambda x c'_\alpha(x) + c'_\alpha(x)] dx.$$

Dérivant de nouveau par rapport à  $\lambda$  :

$$(II.19) \quad \varphi'(\alpha) = \int_0^\infty [e^{-\lambda x}(x^2 c_\alpha(x) + x c'_\alpha(x)) - x c'_\alpha(x)] dx.$$

Le membre de gauche de (II.19) ne dépendant pas de  $\lambda$  tandis que celui de droite est une transformée de Laplace en  $\lambda$ , on en déduit

$$(II.20) \quad \varphi'(\alpha) = - \int_0^\infty x c'_\alpha(x) dx,$$

$$(II.21) \quad x c_\alpha(x) + c'_\alpha(x) = 0.$$

L'équation (II.21) s'intègre, et on obtient

$$c_\alpha(x) = k(x) e^{-x\alpha},$$

avec  $k(x) \geq 0$  puisque  $c_\alpha(x) \geq 0$ . Finalement, d'après (II.20)

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^2 k(x) dx. \quad \square$$

II.2.2. *Comment reconnaître qu'une fonction  $\Lambda(\alpha, \lambda)$  est de la forme  $F(\alpha)/F(\alpha + \lambda) \exp \lambda\varphi(\alpha)$  ?* — La réponse à cette question est donnée par la

PROPOSITION II.2.2. — *Soit  $\Lambda : ]\alpha_0, \infty[ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  régulière. Pour qu'il existe une fonction  $\varphi : ]\alpha_0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  régulière telle que*

$$\Lambda(\lambda, \alpha) = \frac{\exp \int_{\alpha_1}^\alpha \varphi(u) du}{\exp \int_{\alpha_1}^{\alpha+\lambda} \varphi(u) du} \exp(\lambda\varphi(\alpha)), \quad (\alpha_1 > \alpha_0),$$

*il faut et il suffit que*

- (i)  $\partial^2 \log \Lambda(\alpha, \lambda) / \partial \lambda^2 = -\varphi'(\alpha + \lambda)$ ,
- (ii)  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-2} \log \Lambda(\alpha, \lambda)$  existe pour tout  $\alpha > \alpha_0$ .

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur.

### II.3. La transformation d'Esscher.

Dans l'étude des processus de Lévy, la transformation d'Esscher consiste à changer la loi d'origine d'un processus de Lévy  $(X_t, t \geq 0)$  au moyen d'une martingale exponentielle de la forme  $\exp\{\lambda X_t - t\psi(\lambda)\}$  pour  $\lambda$  tel que  $E(\exp \lambda X_t) < \infty$  (cf. [Sa1]). Cette terminologie nous semble bien adaptée à la discussion qui suit.

DÉFINITION II.3.1. — Soit  $X$  une v.a. telle que  $E(e^{\mu X}) < \infty$  pour un certain  $\mu \geq 0$ . On appelle *transformée d'Esscher d'ordre  $\mu$*  la v.a.  $\tilde{X}^{(\mu)}$  dont la loi est telle que

$$(II.22) \quad E(f(\tilde{X}^{(\mu)})) = \frac{E(f(X)e^{\mu X})}{E(e^{\mu X})}$$

pour toute  $f$  borélienne bornée (ou positive). Dans le même esprit, si  $H \geq 0$ , nous désignerons par  $\tilde{H}^{(\mu)}$  la v.a. dont la loi satisfait à

$$(II.23) \quad E(f(\tilde{H}^{(\mu)})) = \frac{E(f(H)e^{-\frac{1}{2}\mu^2 H})}{E(e^{-\frac{1}{2}\mu^2 H})}.$$

PROPOSITION II.3.2. — Soit  $(X_\alpha, H_\alpha)$ , avec  $\alpha > \alpha_0$  comme dans le théorème II.1.2.

1) Pour tout  $\alpha > \alpha_0$  et  $\mu \geq 0$ , on a

$$(II.24) \quad \tilde{X}_\alpha^{(\mu)} \stackrel{\text{loi}}{=} X_{\alpha+\mu} + k(\alpha, \mu)$$

avec

$$(II.25) \quad k(\alpha, \mu) = \int_0^\infty x e^{-\alpha x} (1 - e^{-\mu x}) c(dx).$$

Notons que

$$(II.26) \quad k(\alpha, \mu) = \varphi(\alpha + \mu) - \varphi(\alpha) \geq 0.$$

2) Pour tout  $\alpha > \alpha_0$  et  $\mu \geq 0$ , on a

$$(II.27) \quad \tilde{H}_\alpha^{(\mu)} \stackrel{\text{loi}}{=} H_{\alpha+\mu} + T_{\varphi(\alpha+\mu) - \varphi(\alpha)}$$

où

- $\varphi(\alpha + \mu) - \varphi(\alpha) = \int_0^\infty x e^{-\alpha x} (1 - e^{-\mu x}) c(dx) = k(\alpha, \mu)$ ;
- $T_{\varphi(\alpha+\mu) - \varphi(\alpha)}$  est le temps d'atteinte par un mouvement brownien issu de 0 du niveau  $\varphi(\alpha + \mu) - \varphi(\alpha)$ ;
- $H_{\alpha+\mu}$  et  $T_{\varphi(\alpha+\mu) - \varphi(\alpha)}$  sont, dans le second membre de (II.27), supposées indépendantes.

Démonstration. — 1) On calcule  $E(e^{\lambda \tilde{X}_\alpha^{(\mu)}})$  en utilisant (II.22), puis on utilise (II.10).

2) On utilise

$$E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \tilde{H}_\alpha^{(\mu)}}) = \frac{E(\exp -\frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2)H_\alpha)}{E(e^{-\frac{1}{2}\mu^2 H_\alpha})},$$

puis on utilise (II.11) et (II.12). □

**II.4. Les accroissements de  $X_\alpha$  et de  $H_\alpha$ .**

Observant que, dans le théorème II.1.2, les mesures de Lévy  $c_\alpha(dx) = e^{-\alpha x}c(dx)$  et  $\nu_\alpha(t) dt$  sont des fonctions décroissantes de  $\alpha$ , on en déduit la

PROPOSITION II.4.1. — *Pour tout  $\beta > \alpha > \alpha_0$  :*

1) *Il existe une v.a.  $X_{\alpha,\beta}$  telle que*

$$(II.28) \quad X_\alpha \stackrel{\text{loi}}{=} X_\beta + X_{\alpha,\beta},$$

*où le second membre de (II.28) est constitué de v.a. indépendantes. La v.a.  $X_{\alpha,\beta}$  est indéfiniment divisible et*

$$(II.29) \quad E(e^{\lambda X_{\alpha,\beta}}) = \frac{F(\beta) F(\alpha + \lambda)}{F(\alpha) F(\beta + \lambda)} \exp -\lambda(\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)) \\ = \exp \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1)(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) c(dx).$$

2) *Il existe une v.a.  $H_{\alpha,\beta} \geq 0$  telle que*

$$(II.30) \quad H_\alpha \stackrel{\text{loi}}{=} H_\beta + H_{\alpha,\beta},$$

*où les v.a. dans le second membre de (II.30) sont supposées indépendantes. La v.a.  $H_{\alpha,\beta}$  est indéfiniment divisible et*

$$(II.31) \quad E(e^{-\frac{\lambda^2}{2} H_{\alpha,\beta}}) = \frac{F(\alpha) F(\beta + \lambda)}{F(\beta) F(\alpha + \lambda)} \exp \lambda(\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)) \\ = \exp - \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t})(\nu_\alpha(t) - \nu_\beta(t)) dt.$$

3) *Le couple  $(X_{\alpha,\beta}, H_{\alpha,\beta})$  est un couple de Wald indéfiniment divisible associé à la mesure  $(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) c(dx)$ , i.e.*

$$(II.32) \quad E(e^{\lambda X_{\alpha,\beta}})E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{\alpha,\beta}}) = 1 \quad (\lambda \geq 0).$$

PROPOSITION II.4.2. — *Pour tout  $\beta > \alpha > \alpha_0$  :*

1) *Il existe une v.a.  $G_{\alpha,\beta} \geq 0$ , indéfiniment divisible, de mesure de Lévy  $(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) c(dx)$  telle que*

$$(II.33) \quad E(\exp -\lambda G_{\alpha,\beta}) = \exp - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) c(dx) \\ = \frac{F(\beta) F(\alpha + \lambda)}{F(\alpha) F(\beta + \lambda)} \quad (\lambda \geq 0).$$

2) On a

$$(II.34) \quad H_{\alpha, \beta} + T_{G_{\alpha, \beta}} \stackrel{\text{loi}}{=} T_{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)},$$

où  $T_k$  désigne comme précédemment le temps d'atteinte du niveau  $k$  par un mouvement brownien issu de 0, et où les éléments  $H_{\alpha, \beta}$ , ( $T_u, u \geq 0$ ) et  $G_{\alpha, \beta}$  dans le membre de gauche de (II.34) sont indépendants.

Démonstration. — 1) Utilisant la définition (II.6) de  $F$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{F(\beta) F(\alpha + \lambda)}{F(\alpha) F(\beta + \lambda)} &= \exp - \left( \int_{\alpha + \lambda}^{\beta + \lambda} \varphi(u) du - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u) du \right) \\ &= \exp - \int_{\alpha}^{\beta} du \int_0^{\infty} (e^{-ux} - e^{-(u+\lambda)x}) x c(dx) \\ &\quad (\text{d'après la définition (II.5) de } \varphi) \\ &= \exp - \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda x}) x c(dx) \left( \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ux} du \right) \\ &= \exp - \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda x}) (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) c(dx), \end{aligned}$$

ce qui prouve le point 1) de la proposition (notons que la mesure  $(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}) c(dx)$  intègre la fonction  $x$  au voisinage de l'origine d'après (II.1)).

2) Pour obtenir (II.34), il suffit maintenant d'écrire

$$E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{\alpha, \beta}}) = \frac{F(\alpha) F(\beta + \lambda)}{F(\beta) F(\alpha + \lambda)} \exp - \lambda(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)),$$

soit encore

$$e^{-\lambda(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))} = E(e^{-\lambda G_{\alpha, \beta}}) E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{\alpha, \beta}})$$

et puisque  $\varphi$  est croissante, on a  $\varphi(\beta) \geq \varphi(\alpha)$  et

$$E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T_{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}}) = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T_{G_{\alpha, \beta}}}) E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{\alpha, \beta}}) \quad \square$$

## II.5. Comportement asymptotique de $\varepsilon^{-1} H_{\alpha, \alpha + \varepsilon}$ quand $\varepsilon \searrow 0$ .

Nous allons maintenant utiliser la proposition II.4.2 pour décrire le comportement asymptotique des v.a.  $H_{\alpha, \alpha + \varepsilon}$  quand  $\varepsilon \searrow 0$ .

THÉORÈME II.5.1. — Pour tout  $\alpha > \alpha_0$ , on a

$$(II.35) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} H_{\alpha, \alpha+\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{\text{loi}} T_{\varphi'(\alpha)},$$

où  $T_{\varphi'(\alpha)}$  est le temps d'atteinte du niveau  $\varphi'(\alpha)$  par un mouvement brownien issu de 0 (notons que  $\varphi'(\alpha) \geq 0$  d'après (II.4)).

Démonstration. — Remplaçant  $\beta$  par  $\alpha + \varepsilon$  dans (II.34), on a

$$(II.36) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} H_{\alpha, \alpha+\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} T_{G_{\alpha, \alpha+\varepsilon}} \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{\varepsilon^2} T_{\varphi(\alpha+\varepsilon) - \varphi(\alpha)}$$

puis, par changement d'échelle,

$$(II.37) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} H_{\alpha, \alpha+\varepsilon} + T_{\varepsilon^{-1} G_{\alpha, \alpha+\varepsilon}} \stackrel{\text{loi}}{=} T_{\varepsilon^{-1}(\varphi(\alpha+\varepsilon) - \varphi(\alpha))}.$$

Il est clair que  $T_{\varepsilon^{-1}(\varphi(\alpha+\varepsilon) - \varphi(\alpha))} \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{\text{loi}} T_{\varphi'(\alpha)}$ . Le théorème II.5.1 sera donc prouvé si nous montrons que

$$\frac{1}{\varepsilon} G_{\alpha, \alpha+\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} 0 \quad \text{en probabilité.}$$

Or, d'après (II.33), on a

$$(II.38) \quad E(e^{-\lambda \varepsilon^{-1} G_{\alpha, \alpha+\varepsilon}}) = \exp - \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda \varepsilon^{-1} x}) e^{-\alpha x} (1 - e^{-\varepsilon x}) c(dx).$$

Mais :

- $(1 - e^{-\lambda \varepsilon^{-1} x}) e^{-\alpha x} (1 - e^{-\varepsilon x}) \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} 0$ ;
- l'inégalité  $1 - e^{-u} \leq u$  (où  $u \geq 0$ ) implique

$$(1 - e^{-\lambda \varepsilon^{-1} x}) e^{-\alpha x} (1 - e^{-\varepsilon x}) \leq \frac{\lambda x}{\varepsilon} \varepsilon x e^{-\alpha x} = \lambda x^2 e^{-\alpha x}.$$

Puisque  $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} c(dx) < \infty$  d'après (II.1), le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique

$$(II.39) \quad \lim_{\varepsilon \searrow 0} E(e^{-\lambda \varepsilon^{-1} G_{\alpha, \alpha+\varepsilon}}) \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} 1,$$

ce qui entraîne que  $\varepsilon^{-1} G_{\alpha, \alpha+\varepsilon}$  tend vers 0 en probabilité quand  $\varepsilon \searrow 0$ . □

Remarque II.5.2. — Le théorème de Kolmogorov permet de construire deux processus  $(H_\alpha, \alpha > \alpha_0)$  et  $(X_\alpha, \alpha > 0)$ , c'est-à-dire continus à droite et limités à gauche, à accroissements indépendants, non stationnaires et tels que les trajectoires de  $H_\alpha$  sont p.s. décroissantes. Traduit en termes du processus  $H_\alpha$ , le théorème précédent implique

$$(II.40) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} (H_\alpha - H_{\alpha+\varepsilon}) \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{\text{loi}} T_{\varphi'(\alpha)}.$$



### III. Famille d'Esscher de couples de Wald associée à $c(dx) = k_0 dx/x^{3-\mu}$ , $\mu > 0$ .

#### III.1. Définition des v.a. $X_\alpha^{k,\mu}$ et $H_\alpha^{k,\mu}$ .

Soit

$$c(dx) = \frac{k_0 dx}{x^{3-\mu}} \quad (k_0 > 0, \mu > 0).$$

On a bien sûr

$$(III.1) \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^2 \frac{k_0}{x^{3-\mu}} dx < \infty.$$

Nous obtenons donc, en appliquant le théorème II.1.2 à cette mesure  $c$  particulière, une famille de v.a. que nous noterons  $X_\alpha^{(\mu)}, H_\alpha^{(\mu)}$ . La dépendance en  $k_0$  sera omise, sauf mention particulière ( $\alpha > 0, \mu > 0$ ). La fonction  $\varphi'$  définie par (II.5) vaut ici

$$(III.2) \quad \varphi'(\alpha) = k_0 \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{dx}{x^{1-\mu}} = k_0 \Gamma(\mu) \alpha^{-\mu}.$$

Nous choisissons

$$(III.3) \quad \varphi(\alpha) = \frac{k_0 \Gamma(\mu)}{1-\mu} \alpha^{1-\mu} \quad (\mu \neq 1)$$

et nous examinerons séparément le cas  $\mu = 1$ . Détaillons notre résultat.

III.1.1. *Le cas  $\mu = 0$ .* — Bien que nous ne puissions pas appliquer ici le théorème II.1.2 (puisque l'intégrale (II.1) diverge), une application formelle du théorème II.1.2 conduit à

$$E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^{(0)}}) = \exp \left\{ \frac{1}{2} k_0 (\alpha^2 - (\alpha + \lambda)^2) + k_0 \lambda \alpha \right\} = \exp -\frac{1}{2} \lambda^2 k_0,$$

si bien que  $H_\alpha^{(0)}$  est constante et  $X_\alpha^{(0)}$  est gaussienne (ces v.a. ne dépendent pas de  $\alpha$ ). Bien sûr, ce cas est à rapprocher de la proposition I.5.1.

III.1.2. *Le cas  $0 < \mu < 1$ .*

$$\varphi(\alpha) = k \alpha^{1-\mu} \quad \text{avec} \quad k = \frac{k_0 \Gamma(\mu)}{1-\mu}.$$

On a donc, avec  $\lambda \geq 0$ ,

$$(III.4) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^{(\mu)}}) = \exp \left\{ \frac{k \alpha^{2-\mu}}{2-\mu} - \frac{k(\alpha + \lambda)^{2-\mu}}{2-\mu} + k \lambda \alpha^{1-\mu} \right\},$$

$$(III.5) \quad E(e^{\lambda X_\alpha^{(\mu)}}) = \exp \left\{ -\frac{k \alpha^{2-\mu}}{2-\mu} + \frac{k(\alpha + \lambda)^{2-\mu}}{2-\mu} - k \lambda \alpha^{1-\mu} \right\},$$

$$(III.6) \quad \nu_\alpha^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty (1 - e^{-x^2/2t}) e^{-\alpha x} \frac{k_0 dx}{x^{2-\mu}}.$$

Dans cette situation, on peut faire  $\alpha = 0$  :

$$(III.7) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_0^{(\mu)}}) = \exp -\frac{k}{2-\mu} \lambda^{2-\mu} \quad (\lambda \geq 0),$$

$$(III.8) \quad E(e^{\lambda X_0^{(\mu)}}) = \exp \frac{k}{2-\mu} \lambda^{2-\mu} \quad (\lambda \geq 0).$$

En particulier,  $H_0^{(\mu)}$  suit une loi stable unilatère (positive) d'indice  $\frac{1}{2}(2-\mu)$  alors que  $X_0^{(\mu)}$  suit une loi stable d'indice  $2-\mu$ .

III.1.3. *Le cas  $\mu = 1$ .* — Au lieu d'utiliser (III.3), il convient de prendre  $\varphi(\alpha) = k \log \alpha$  (avec  $k \geq 0$ ). On a

$$(III.9) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^{(1)}}) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-k(\alpha+\lambda)} \exp \lambda k,$$

$$(III.10) \quad E(e^{\lambda X_\alpha^{(1)}}) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{k(\alpha+\lambda)} \exp -\lambda k$$

et  $c(dx) = k/x^2 dx$ . Ces v.a. ont déjà été étudiées par G. Letac [Let], (cf. III.4 ci-dessous).

III.1.4. *Le cas  $\mu > 1, \mu \neq 2$ .* On a, avec  $\lambda \geq 0$ ,

$$(III.11) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^{(\mu)}}) = \exp \left\{ -\frac{k'}{2-\mu} \alpha^{2-\mu} + \frac{k'}{2-\mu} (\alpha + \lambda)^{2-\mu} - k' \lambda \alpha^{1-\mu} \right\},$$

$$(III.12) \quad E(e^{\lambda X_\alpha^{(\mu)}}) = \exp \left\{ \frac{k'}{2-\mu} \alpha^{2-\mu} - \frac{k'}{2-\mu} (\alpha + \lambda)^{2-\mu} + k' \lambda \alpha^{1-\mu} \right\},$$

$$(III.13) \quad c(dx) = \frac{k'(\mu-1)}{\Gamma(\mu)} \frac{1}{x^{3-\mu}} dx, \quad k' = -k_0 \frac{\Gamma(\mu)}{1-\mu} > 0.$$

III.1.5. *Le cas  $\mu = 2$ .* — On a

$$\varphi(\alpha) = -\frac{k_0}{\alpha} \quad (k_0 > 0),$$

$$(III.14) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^{(2)}}) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{k_0} \exp -\frac{\lambda k_0}{\alpha},$$

$$(III.15) \quad E(e^{\lambda X_\alpha^{(2)}}) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-k_0} \exp \frac{\lambda k_0}{\alpha},$$

et donc  $X_d^{(2)} \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{\alpha} (k_0 - \gamma_{k_0})$ ,

$$c(dx) = \frac{k_0}{x} dx.$$

### III.2. Étude du cas $\mu = 2$ .

Le cas particulier  $\mu = 2$  conduit à des propriétés remarquables. Nous serons d'ailleurs amenés, dans le paragraphe IV consacré à la fonction gamma, à le rencontrer de nouveau. Nous désignons par  $H_\alpha^{(2,k)}$  et  $X_\alpha^{(2,k)}$  les v.a. définies par (III.14) et (III.15) (avec  $k_0 = k$ ). Nous noterons plus simplement  $H_\alpha^{(2)}$  et  $X_\alpha^{(2)}$  lorsque  $k = 1$ .

PROPOSITION III.2.1. — 1) Pour tout  $\alpha > 0$  et tout  $k > 0$ , on a

$$(III.16) \quad \alpha^2 H_\alpha^{(2,k)} \stackrel{\text{loi}}{=} H_1^{(2,k)}, \quad \alpha X_\alpha^{(2,k)} \stackrel{\text{loi}}{=} X_1^{(2,k)}.$$

2)

$$(III.17) \quad H_1^{(2)} \text{ a même loi que } \frac{1}{2} \gamma_{\frac{3}{2}},$$

où  $\gamma_{\frac{3}{2}}$  est une v.a. de loi gamma ( $\frac{3}{2}$ ) (cf. [Yo1, p. 111]).

3) La densité  $f_\alpha^{(2)}$  de  $H_\alpha^{(2)}$  est donnée par

$$(III.18) \quad f_\alpha^{(2)}(x) = \frac{1}{\alpha^3 \sqrt{2\pi x^5}} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2 x}\right) \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

*Démonstration.* — Le point 1) est une conséquence immédiate de (III.14) et (III.15). Le point 3) découle, après quelques calculs élémentaires, du point 2). Montrons 2) (cf. [Yo1]). Nous avons, d'après la définition des lois gamma,

$$(III.19) \quad E\left(\exp - \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{2\gamma_{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty e^{-\lambda^2/4x} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx.$$

Par ailleurs, il résulte du lemme I.1.3 que

$$(III.20) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} E(e^{-\lambda^2/4\gamma_{\frac{3}{2}}}) = -\frac{\lambda}{2\Gamma(\frac{3}{2})} \int_0^\infty e^{-\lambda^2/4x} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda}$$

puisque  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ . D'autre part, il résulte de (III.14) que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_1^{(2)}})) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \{(1 + \lambda) e^{-\lambda}\} = -\lambda e^{-\lambda} \quad \square$$

**III.3. Caractérisation des lois  $H_\alpha^{(2,k)}$ .**

Nous allons voir que, parmi tous les couples de Wald associés à une mesure  $c(dx)$ , la propriété d'échelle (III.16) caractérise les v.a.  $H_\alpha^{(2,k)}$ .

THÉORÈME III.3.1. — Soient  $c(dx)$  (avec  $c \neq 0$ ) une mesure satisfaisant (II.1) et  $(X_\alpha, H_\alpha; \alpha > 0)$  la famille d'Esscher associée par le théorème II.2.1. Supposons que, pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$(III.21) \quad \alpha^2 H_\alpha \stackrel{\text{loi}}{=} H_1.$$

Alors il existe  $k > 0$  telle que  $c(dx) = (k/x) dx$ , et pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$(III.22) \quad H_\alpha \stackrel{\text{loi}}{=} H_\alpha^{(2,k)}.$$

Démonstration. — Soit  $\varphi$  définie par (II.4) et (II.5). Par dérivation de (II.11), nous avons

$$(III.23) \quad \varphi(\alpha + \lambda) - \varphi(\alpha) = \lambda \int_0^\infty t e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t} \nu_\alpha(t) dt.$$

Effectuant le changement de variable  $t = u/\alpha^2$ , on a

$$(III.24) \quad \begin{aligned} \varphi(\alpha + \lambda) - \varphi(\alpha) &= \lambda \int_0^\infty \frac{u}{\alpha^2} e^{-\lambda^2 u/2\alpha^2} \nu_\alpha\left(\frac{u}{\alpha^2}\right) \frac{du}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\lambda u}{\alpha} e^{-\lambda^2 u/2\alpha^2} \nu_1(u) du \end{aligned}$$

en utilisant (III.21). D'où

$$(III.25) \quad \varphi(\alpha + \lambda) - \varphi(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left[ \varphi\left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) - \varphi(1) \right].$$

Dérivant (III.25) par rapport à  $\lambda$ , puis prenant  $\lambda = 0$ ,

$$(III.26) \quad \varphi'(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \varphi'(1).$$

Soit  $k = \varphi'(1) > 0$ . Nous avons

$$\varphi'(\alpha) = \frac{k}{\alpha^2}, \quad \varphi(\alpha) = -\frac{k}{\alpha}, \quad F(\alpha) = \frac{1}{\alpha^k},$$

et donc

$$E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha}) = \frac{F(\alpha)}{F(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \varphi(\alpha) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^k \exp -\frac{k\lambda}{\alpha}$$

ainsi que  $c(dx) = (k/x) dx$ . □

III.3.2. *Calcul de la mesure de Lévy associée à la v.a.  $\widehat{H}_\alpha^{(2)}$ .* — Soit  $\widehat{H}_\alpha^{(2)}$  définie à partir de  $H_\alpha^{(2)}$  par subordination (cf. proposition I.8.1). On a donc

$$E(e^{i\lambda\widehat{H}_\alpha^{(2)}}) = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^{(2)}}) = \left(1 + \frac{|\lambda|}{\alpha}\right) e^{-|\lambda|/\alpha} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Le but de ce qui suit est de calculer la mesure de Lévy  $\widehat{\nu}(t) dt$  associée à  $\widehat{H}_\alpha^{(2)}$ . Soit  $\psi(1, 1, \cdot)$  la fonction hypergéométrique confluyente de seconde espèce (cf. [Leb, p. 263]), définie pour  $|\text{Arg } z| < \pi$ .

PROPOSITION III.3.2. — *La densité de Lévy  $\widehat{\nu}(t)$  est donnée par*

$$(III.27) \quad \widehat{\nu}(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha t^2} + \frac{1}{|t|} \text{Im}(\psi(1, 1, -i\alpha|t|)) \right\} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

*Démonstration.* — Puisque la densité de Lévy  $\nu_\alpha(t)$  associée à  $H_\alpha^{(2)}$  vaut

$$\nu_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty e^{-\alpha x} (1 - e^{-x^2/2t}) dx$$

on a, par subordination (cf. proposition I.8.1)

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}_\alpha(y) &= \int_0^\infty \frac{dt}{2\pi t^2} e^{-y^2/2t} \int_0^\infty e^{-\alpha x} (1 - e^{-x^2/2t}) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha y^2} - \frac{1}{|y|} \int_0^\infty e^{-\alpha|y|z} \frac{dz}{1+z^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha y^2} - \frac{1}{|y|} k(\alpha|y|) \right\}, \end{aligned}$$

où nous notons

$$k(\beta) := \int_0^\infty e^{-\beta u} \frac{du}{1+u^2} \quad (\beta > 0).$$

Il s'agit donc de calculer cette fonction  $k$ . Mais, après avoir écrit

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{u+i} - \frac{1}{u-i} \right)$$

on déduit  $k(\beta) = -\text{Im}(K(i\beta))$  avec

$$K(z) = \begin{cases} e^z \int_z^\infty e^{-w}/w dw & \text{si } z \in \mathbb{R}_+, \\ \psi(1, 1, z) & \text{si } |\text{Arg } z| < \pi \end{cases}$$

(cf. [Leb, p. 272]). La proposition III.3.2 s'en déduit alors sans peine.  $\square$

**III.4. Une remarque sur le cas  $\mu = 1$ .**

Les v.a.  $X_\alpha^{(1)}, H_\alpha^{(1)}$  définies par (III.9), lorsque  $k = 1$ , satisfont à

$$(III.28) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^{(1)}}) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-(\lambda+\alpha)} e^\lambda,$$

$$(III.29) \quad E(\exp \lambda(X_\alpha^{(1)} + 1)) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\alpha+\lambda},$$

soit, en posant  $Y_\alpha := \exp(1 + X_\alpha^{(1)})$ ,

$$(III.30) \quad E(Y_\alpha^\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\alpha+\lambda} \quad (\lambda \geq 0).$$

Ces v.a. ont déjà été étudiées par G. Letac [Let] et fournissent une caractérisation de la loi gamma de paramètre  $\alpha$ . Plus précisément, le théorème suivant est prouvé dans [Let] :

THÉORÈME III.4. — *Soit  $\alpha > 0$  fixé,  $U$  et  $V$  deux v.a. positives indépendantes, la loi de  $V$  étant définie par*

$$(III.31) \quad E(V^\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{\alpha+\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

*Alors  $U(\exp -(U/\alpha))V$  et  $U$  ont même loi si et seulement si la loi de  $U$  est une variable gamma de paramètre  $\alpha$ .*

**IV. La famille d'Esscher de couples de Wald indéfiniment divisibles associée à la fonction Gamma.**

**IV.1. Définition des v.a.  $X_\alpha^\Gamma$  et  $H_\alpha^\Gamma$ .**

Soient  $\Gamma$  la seconde fonction d'Euler

$$(IV.1) \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du \quad (x > 0)$$

et  $\psi$  sa dérivée logarithmique

$$(IV.2) \quad \psi(x) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(x), \quad \Gamma(x) = \exp \int_1^x \psi(u) du \quad (x > 0).$$

On sait (cf. [WW, p. 250], [Pa] ou [Leb]) que

$$(IV.3) \quad \psi'(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + \alpha)^2},$$

$$(IV.4) \quad = \int_0^{\infty} \frac{xe^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

La fonction  $\psi$  est une primitive de  $\psi'$ . Elle vaut, d'après la formule de Gauss (voir [WW, p. 247])

$$(IV.5) \quad \psi(\alpha) = \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

En appliquant les formules (II.4)–(II.7) avec  $c(dx) = (x(1 - e^{-x}))^{-1} dx$  et en notant  $\psi$  ce qui est appelé  $\varphi$  dans (II.5), afin de conserver la notation classique de  $\psi$  pour la dérivée logarithmique de  $\Gamma$ , il vient

$$(IV.6) \quad c(dx) = \frac{1}{x(1 - e^{-x})} dx, \quad \psi'(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{xe^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx,$$

$$(IV.7) \quad \Lambda(\alpha, \lambda) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \psi(\alpha) \quad (\lambda, \alpha > 0).$$

La mesure  $c(dx)$  définie par (IV.6) satisfait aux hypothèses du théorème II.1.2. On a donc :

THÉORÈME IV.1.1. — *Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe des v.a.  $X_{\alpha}^{\Gamma}$  et  $H_{\alpha}^{\Gamma}$  indéfiniment divisibles telles que*

1) *Pour tout  $\lambda \geq 0$ , on a*

$$(IV.8) \quad E(e^{\lambda X_{\alpha}^{\Gamma}}) = \frac{\Gamma(\alpha + \lambda)}{\Gamma(\alpha)} \exp -\lambda \psi(\alpha) \\ = \exp \int_0^{\infty} (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) \frac{e^{-\alpha x}}{x(1 - e^{-x})} dx,$$

$E|X_{\alpha}^{\Gamma}| < \infty$  et  $E(X_{\alpha}^{\Gamma}) = 0$ . La v.a.  $X_{\alpha}^{\Gamma}$  a des moments de tout ordre.

2) *Pour tout  $\lambda \geq 0$ , on a*

$$(IV.9) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{\alpha}^{\Gamma}}) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \psi(\alpha) \\ = \exp - \int_0^{\infty} (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}) \nu_{\alpha}(t) dt,$$

avec

$$(IV.10) \quad \nu_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2/2t}}{1 - e^{-x}} e^{-\alpha x} dx,$$

$$(IV.11) \quad E(H_\alpha^\Gamma) = \psi'(\alpha) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n + \alpha)^2}$$

et  $H_\alpha^\Gamma$  est auto-décomposable.

3) Le couple  $(X_\alpha^\Gamma, H_\alpha^\Gamma)$  est un couple de Wald indéfiniment divisible :

$$(IV.12) \quad E(e^{\lambda X_\alpha^\Gamma}) E(\exp - \frac{1}{2} \lambda^2 H_\alpha^\Gamma) = 1.$$

Remarque IV.1.2. — On peut montrer aisément que la fonction  $\Gamma(\alpha)/\Gamma(\alpha + \lambda) \exp(\lambda k)$  est la transformée de Laplace en  $\frac{1}{2} \lambda^2$  d'une v.a. positive si et seulement si  $k \leq \psi(\alpha)$ . Dans le cas  $\alpha = 1$  (et  $\psi'(1) = -\gamma$ , où  $\gamma = 0,577215\dots$  est la constante d'Euler-Mascheroni), ce résultat a été prouvé par Hartman [Ha]. Notre théorème IV.1.1 est donc une extension du résultat de Hartman et nous appellerons les v.a.  $H_\alpha^\Gamma$  des « v.a. de Hartman généralisées ».

Remarque IV.1.3. — Soit  $\gamma_\alpha$  une v.a. de loi gamma de paramètre  $\alpha$ , i.e.

$$(IV.13) \quad E(\gamma_\alpha^\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha + \lambda)}{\Gamma(\alpha)}.$$

La formule de dualité (IV.12) peut donc également s'écrire

$$(IV.14) \quad E(\gamma_\alpha^\lambda) E(\exp - \frac{1}{2} \lambda^2 H_\alpha^\Gamma) = \exp \lambda \psi(\alpha).$$

En d'autres termes,

$$(IV.15) \quad X_\alpha^\Gamma \stackrel{\text{loi}}{=} (\log \gamma_\alpha) - \psi(\alpha).$$

Nous utiliserons la formule (IV.14) pour transcrire sur les lois  $\gamma$  des propriétés des v.a.  $H_\alpha^\Gamma$ . Nous retrouverons ainsi des résultats de L. Gordon [Go] qui obtient des démonstrations probabilistes de certaines propriétés de la fonction gamma à partir de propriétés probabilistes des v.a.  $\gamma_\alpha$  (cf. également [Gr]).

Remarque IV.1.4. — Il est montré dans [RVY] que, si  $(R_s, s \geq 0)$  est un processus de Bessel de dimension 2, issu de  $x_0$ , alors

$$(IV.16) \quad E_x \left( \exp -2\lambda^2 \int_0^t \frac{ds}{R_s^2} \right) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \lambda)} \exp \lambda (\log x^2 - \log t - \log 8).$$

Ainsi la loi de  $H_{\frac{1}{2}}^\Gamma$  « apparaît naturellement » liée au comportement asymptotique d'une fonctionnelle du processus de Bessel de dimension 2.



Plus généralement, soit  $(X_t, t \geq 0)$  un processus de Wishart d'indice  $\nu$ , à valeurs dans l'ensemble des matrices  $m \times m$ , réelles et symétriques (cf. [Br] et [DDMY]). Notons

$$(IV.17) \quad \delta = m + 1 + 2\nu$$

la « dimension » de ce processus et  $Q_x^{(\nu)}$  sa loi, lorsque  $X_0 = x$ . La relation d'absolue continuité (cf. [DDMY]) suivante généralise la relation d'absolue continuité pour les processus de Bessel (cf. [RY, chap. XI]; voir également [Yo3]) :

$$(IV.18) \quad Q_x^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_t} = \left( \frac{\det X_t}{\det x} \right)^{\frac{1}{2}\nu} \exp \left( -\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \text{Tr}(X_u^{-1}) \, du \right) Q_x^{(0)}|_{\mathcal{F}_t}.$$

Nous déduisons de (IV.18) par changement d'échelle que

$$(IV.19) \quad E_x^{(0)} \left( \exp -\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \text{Tr}(X_u^{-1}) \, du \right) = E_x^{(\nu)} \left( \left( \frac{\det x}{\det X_t} \right)^{\frac{1}{2}\nu} \right)$$

$$(IV.20) \quad = \frac{(\det x)^{\frac{1}{2}\nu}}{t^\gamma} E_{x/t}^{(\nu)} ((\det X_1)^{\frac{1}{2}\nu})$$

avec  $\gamma = \frac{1}{2}m\nu$ . Puisque, d'après [Mu, p. 99], on a

$$(IV.21) \quad E_0^{(\nu)} ((\det X_1)^{\frac{1}{2}\nu}) = 2^{-\frac{1}{2}m\nu} \frac{\Gamma_m(\frac{1}{2}(\delta - \nu))}{\Gamma_m(\frac{1}{2}\delta)}$$

avec

$$(IV.22) \quad \Gamma_m(a) = \prod_{i=1}^m \Gamma(a - \frac{1}{2}(i-1)),$$

nous déduisons de (IV.20) que

$$(IV.23) \quad t^\gamma E_x^{(0)} \left( \exp -\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \text{Tr}(X_u^{-1}) \, du \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 2^{-\frac{1}{2}m\nu} (\det x)^{\frac{1}{2}\nu} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\nu)}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}k + \nu)}.$$

Le membre de droite de (IV.23) est égal à

$$(IV.24) \quad \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(1 + \frac{k}{2} + \frac{\nu}{2})}{\Gamma(1 + \frac{k}{2} + \nu)} \exp \frac{\nu}{2} (\log \det x - m \log 2).$$

Notons d'autre part  $H_{\alpha,\rho}^\Gamma$  la v.a. positive telle que

$$(IV.25) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{\alpha,\rho}^\Gamma}) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \lambda)} e^{\lambda\rho} \quad (\rho \leq \psi(\alpha)).$$

Nous déduisons de l'autodécomposabilité de  $H_{\alpha,\rho}^\Gamma$  l'existence d'une v.a.  $R_{\alpha,\frac{1}{4},\rho}^\Gamma$  telle que

$$(IV.26) \quad H_{\alpha,\rho}^\Gamma \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{4} H_{\alpha,\rho}^\Gamma + R_{\alpha,\frac{1}{4},\rho}^\Gamma.$$

Nous déduisons de (IV.26) et de (IV.25) que

$$(IV.27) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 R_{\alpha,\frac{1}{4},\rho}^\Gamma}) = \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}\lambda)}{\Gamma(\alpha + \lambda)} \exp \frac{\lambda\rho}{2}.$$

Soient maintenant  $R_{1,\frac{1}{4},\rho}^\Gamma, R_{1+\frac{1}{2},\frac{1}{4},\rho}^\Gamma, R_{1+\frac{3}{2},\frac{1}{4},\rho}^\Gamma, \dots, R_{1+\frac{m-1}{2},\frac{1}{4},\rho}^\Gamma$  des v.a. indépendantes de lois données par (IV.27), avec

$$(IV.28) \quad \rho = \frac{\log \det x}{m \log 2} - 1.$$

On a alors, d'après (IV.27),

$$(IV.29) \quad E\left(\exp -\frac{\nu^2}{2} \sum_{k=0}^{m-1} R_{1+\frac{k}{2},\frac{1}{4},\rho}^\Gamma\right) = \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\nu)}{\Gamma(1 + \frac{1}{2}k + \nu)} \exp \frac{\nu}{2} (\log \det x - m \log 2).$$

Comparant alors (IV.24) avec (IV.29), nous en déduisons que

$$t^\gamma E_x^{(0)} \left[ \exp -\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \text{Tr}(X_u^{-1}) du \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E\left(\exp -\frac{\nu^2}{2} \sum_{k=0}^{m-1} R_{1+\frac{k}{2},\frac{1}{4},\rho}^\Gamma\right),$$

ce qui établit un lien étroit entre les processus de Wishart et nos v.a.  $H_\alpha^\Gamma$  de Hartman généralisées.

*Remarque IV.1.5.* — Revenons maintenant aux v.a.  $G_{\alpha,\delta}$  ( $\delta > \alpha$ ) définies par la proposition II.4.2 et où la fonction  $F$  est maintenant égale à  $\Gamma$ . Nous avons donc, pour  $\delta > \alpha$ ,

$$(IV.30) \quad E(e^{-\lambda G_{\alpha,\delta}}) = \frac{\Gamma(\delta) \Gamma(\alpha + \lambda)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\delta + \lambda)}.$$

Alors

$$(IV.31) \quad G_{\alpha,\delta} = -\log \beta_{\alpha,\delta-\alpha}$$

où  $\beta_{\alpha,\delta-\alpha}$  est une v.a. de loi bêta de paramètres  $\alpha$  et  $\delta - \alpha$ .

*Démonstration de la remarque IV.1.5.* — On déduit de la relation classique

$$E\left(\frac{\gamma_a}{\gamma_a + \gamma_b}\right)^\lambda E(\gamma_{a+b})^\lambda = E(\gamma_a^\lambda)$$

(qui découle de l'algèbre beta-gamma, cf. [CY, p. 93]) que l'on a

$$E(\beta_{a,b}^\lambda) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+\lambda)} \frac{\Gamma(a+\lambda)}{\Gamma(a)}.$$

D'où  $E(\beta_{\alpha,\delta-\alpha}^\lambda) = E(\exp \lambda \log(\beta_{\alpha,\delta-\alpha})) = E(e^{-\lambda G_{\alpha,\delta}})$ . □

## IV.2. Les cumulants de $H_\alpha^\Gamma$ et la fonction d'Hurwitz.

La fonction  $\zeta$  d'Hurwitz est définie par

$$(VI.32) \quad \zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1, a > 0)$$

En particulier, pour  $a = 1$ ,  $\zeta(s, 1)$  est la fonction  $\zeta$  de Riemann :

$$(IV.33) \quad \zeta(s, 1) = \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (\operatorname{Re} s > 1)$$

THÉORÈME IV.2.1. — La transformée de Laplace de  $H_\alpha^\Gamma$  est donnée par la formule

$$(IV.34) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^\Gamma}) = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \lambda^n \zeta(n, \alpha)\right).$$

En particulier, on a

$$(IV.35) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_1^\Gamma}) = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \lambda^n \zeta(n)\right).$$

*Démonstration.* — Il n'est pas difficile de voir, à partir de (IV.32) que

$$(IV.36) \quad \zeta(n, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} e^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

Par ailleurs, d'après (IV.12) et (IV.8), on a

$$\begin{aligned} E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^\Gamma}) &= \exp - \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) \frac{e^{-\alpha x}}{x(1 - e^{-x})} dx \\ &= \exp \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^\infty \frac{\lambda^n x^{n-1}}{n!} \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx \\ &= \exp \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \lambda^n \zeta(n, \alpha) \quad \text{d'après (IV.36)}. \end{aligned} \quad \square$$

**IV.3. La formule d'addition.**

THÉORÈME IV.3.1. — Pour tout entier  $n$  et tout  $\alpha > 0$ , on a

$$(IV.37) \quad H_{n\alpha}^\Gamma \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} H_{\alpha+k/n}^\Gamma,$$

où le second membre de (IV.37) est constitué de v.a. indépendantes.

Démonstration. — Présentons brièvement deux démonstrations.

1) Utilisant la formule (IV.9), il vient

$$E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^\Gamma}) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \psi(\alpha).$$

Il s'agit donc de voir que

$$(IV.38) \quad \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n(\alpha + \lambda))} \exp n\lambda\psi(n\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{k}{n})}{\Gamma(\alpha + \frac{k}{n} + \lambda)} \exp \lambda\psi\left(\alpha + \frac{k}{n}\right).$$

Mais (IV.38) résulte de la formule de multiplication de Gauss (voir [WW, p. 240])

$$(IV.39) \quad \Gamma(nz) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}} n^{nz-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right).$$

2) Une autre approche pour prouver (IV.37) consiste à utiliser

$$(IV.40) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^\Gamma}) = \exp - \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}) \nu_\alpha(t) dt$$

et à lire (IV.37) sur les mesures de Lévy  $\nu_\alpha$  données par (IV.10). Ainsi, (IV.37) est équivalente à

$$(IV.41) \quad \frac{e^{-n\alpha x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-nx(\alpha+k/n)}}{1 - e^{-nx}} \quad (x > 0),$$

i.e., posant  $e^{-x} = q < 1$ , à

$$(IV.42) \quad \frac{1}{1 - q} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^k}{1 - q^n}. \quad \square$$

Remarque IV.3.2. — On obtient une démonstration probabiliste élémentaire de la formule de multiplication de Gauss en utilisant la seconde démonstration du théorème IV.3.1. Par ailleurs, en termes de v.a.  $\hat{H}^\Gamma$  (cf. proposition I.8.1), (IV.37) s'écrit

$$\hat{H}_{n\alpha}^\Gamma \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{H}_{\alpha+k/n}^\Gamma.$$

COROLLAIRE IV.3.3. — Faisant  $\alpha = \beta/n$  dans (IV.37), on a

$$(IV.43) \quad H_\beta^\Gamma \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} H_{(\beta+k)/n}^\Gamma.$$

En particulier, la loi du second membre de (IV.43) ne dépend pas de  $n$ .

COROLLAIRE IV.3.4. — Prenant  $n = 2$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$  dans (IV.43) et itérant la relation obtenue, il vient

$$(IV.44) \quad H_1^\Gamma \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} {}_{(n)}H_{\frac{1}{2}}^\Gamma$$

où dans le membre de droite de (IV.44), les v.a.  $({}_{(n)}H_{\frac{1}{2}}^\Gamma, n \geq 1)$  sont i.i.d. de loi  $H_{\frac{1}{2}}^\Gamma$ .

Lue à l'aide de (IV.9), la formule (IV.44) s'écrit

$$(IV.45) \quad \Gamma(1 + \lambda) = 2^{2\lambda} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 2^{-n}\lambda)}{\sqrt{\pi}}.$$

C'est la formule de Knar (voir [Er, vol. 1, p. 6] et également [CY, exercice 4.5]).

Lue sur les mesures de Lévy des v.a.  $H_1^\Gamma$  et  $H_{\frac{1}{2}}^\Gamma$ , (IV.44) est équivalente à

$$(IV.46) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{q^{2^{n-1}}}{1 - q^{2^n}} = \frac{q}{1 - q}, \quad q = e^{-x} < 1,$$

formule qui se vérifie aisément. Ainsi, la formule (IV.46) fournit une démonstration élémentaire et probabiliste de la formule de Knar.

Remarque IV.3.5. — Exploitant la formule de dualité (IV.14), le théorème IV.3.1 admet la traduction suivante sur les v.a. gamma :

$$(IV.47) \quad \prod_{k=0}^{n-1} \gamma_{\alpha+k/n}^{1/n} \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{n} \gamma_{n\alpha},$$

où les v.a. du premier membre de (IV.47) sont indépendantes. Cette formule a été obtenue par L. Gordon [Go, th. 6, p. 131] (cf. également [CY, p. 99]). De même, la formule (IV.44), lue dans la dualité (IV.14), conduit à

$$(IV.48) \quad \frac{1}{2} \gamma_1 \stackrel{\text{loi}}{=} \prod_{p=0}^{\infty} |N_p|^{2^{-p}},$$

où, dans le second membre de (IV.48) les v.a.  $(N_p, p \geq 0)$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**IV.4. La formule d'addition caractérise la fonction Gamma.**

Nous avons vu au paragraphe III que la formule  $\alpha^2 H_\alpha \stackrel{\text{loi}}{=} H_1$  caractérise les v.a.  $H_\alpha^{(\mu)}$  avec  $\mu = 2$ . Dans le même esprit, nous avons :

THÉORÈME IV.4.1. — Soit  $c$  une mesure satisfaisant à (II.1) et  $H_\alpha$  les v.a. associées par le théorème II.1.2. Supposons que, pour tout  $n$ ,

$$(IV.49) \quad H_{n\alpha} \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} H_{\alpha+k/n},$$

où les v.a.  $(H_{\alpha+k/n}, k = 0, 1, \dots, n-1)$  sont indépendantes. Alors, il existe  $k > 0$  tel que  $c(dx) = k/(x(1 - e^{-x})) dx$  et

$$(IV.50) \quad E\left(\exp - \frac{\lambda^2}{2} H_\alpha\right) = \left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \lambda)}\right)^k \exp k\lambda\psi(\alpha).$$

Démonstration. — Les notations sont celles du théorème II.1.2 :  $c(dx), \varphi, F$  et  $\Lambda$ . Écrivant la relation (IV.49) sur les mesures de Lévy, nous avons

$$(IV.51) \quad \frac{1}{n^2} \nu_{n\alpha}\left(\frac{u}{n^2}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \nu_{\alpha+k/n}(u).$$

Notant  $\nu'_\alpha(u)$  la dérivée de  $\nu_\alpha(u)$  par rapport à  $\alpha$ ,

$$\frac{1}{n^2} \nu'_{n\alpha}\left(\frac{u}{n^2}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \nu'_{\alpha+k/n}(u),$$

d'où l'on tire

$$(IV.52) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \nu'_{n\alpha}\left(\frac{u}{n^2}\right) = \int_\alpha^{\alpha+1} \nu'_\beta(u) d\beta = \nu_{\alpha+1}(u) - \nu_\alpha(u).$$

Notons

$$(IV.53) \quad \rho_\alpha(u) = \nu_\alpha(u) - \nu_{\alpha+1}(u).$$

La mesure  $\rho_\alpha(u) du$  est la mesure de Lévy de la v.a.  $H_{\alpha,\alpha+1}$  (définie par la proposition II.4.1) et d'après, (IV.52), nous avons, pour  $\gamma > 0$  :

$$\rho_1(u) = \frac{1}{\gamma^2} \rho_\gamma\left(\frac{u}{\gamma^2}\right).$$

Soit, en d'autres termes, pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$(IV.54) \quad \alpha^2 H_{\alpha,\alpha+1} \stackrel{\text{loi}}{=} H_{1,2}.$$

On peut donc appliquer le théorème III.3.1 à ces v.a.  $H_{\alpha,\alpha+1}$  : il existe  $k > 0$  (avec  $k = \varphi'(1) - \varphi'(2) > 0$ ) tel que  $H_{\alpha,\alpha+1}$  est associée à la mesure  $k/x \, dx$ , soit encore d'après (II.11), (II.12),

$$E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{\alpha,\alpha+1}}) = \exp -k \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}) \, dt \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} (1 - e^{-x^2/2t}) e^{-\alpha x} \, dx.$$

D'où, puisque  $\nu_\alpha(t)$  tend vers zéro quand  $\alpha$  tend vers l'infini,

$$\nu_\alpha(t) = \sum_{n=0}^\infty (\nu_{\alpha+n}(t) - \nu_{\alpha+n+1}(t)) = \sum_{n=0}^\infty \rho_{\alpha+n}(t),$$

soit

$$\begin{aligned} \nu_\alpha(t) &= \frac{k}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha+n)x} (1 - e^{-x^2/2t}) \, dx \\ &= \frac{k}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{1 - e^{-x^2/2t}}{1 - e^{-x}} \, dx, \end{aligned}$$

ce qui, par comparaison avec (II.12) montre que

$$c(dx) = \frac{k \, dx}{x(1 - e^{-x})}, \quad \varphi(\alpha) = k \psi(\alpha), \quad F(\alpha) = (\Gamma(\alpha))^k. \quad \square$$

### IV.5. Développement en série des v.a. $(H_\alpha^\Gamma)$ .

Dans tout ce paragraphe, nous désignons par  $H_\alpha^{(2)}$  une v.a. telle que

$$(IV.55) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^{(2)}}) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) \exp -\frac{\lambda}{\alpha}.$$

La v.a.  $H_\alpha^{(2)}$  est donc celle définie en III.1.5 : le cas  $\mu = 2$ , avec  $k_0 = 1$ . Sa densité est donnée par la proposition III.2.1.

THÉORÈME IV.5.1. — Pour tout  $\alpha > 0$ , on a

$$(IV.56) \quad H_\alpha^\Gamma \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(\alpha + n)^2} L_n,$$

où  $(L_n, n \geq 0)$  est une suite i.i.d. de loi  $H_1^{(2)}$ .

*Démonstration.* — Nous allons faire deux démonstrations.

1) Puisque (cf. proposition III.2.1),  $\alpha^2 H_\alpha^{(2)} \stackrel{\text{loi}}{=} H_1^{(2)}$ , (IV.56) équivaut à

$$(IV.57) \quad H_\alpha^\Gamma \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{n=0}^\infty H_{\alpha+n}^{(2)},$$

où la suite  $(H_{\alpha+n}^{(2)}, n \geq 0)$  est constituée de v.a. indépendantes. Ainsi, (IV.56), lue sur les mesures de Lévy, s'écrit (avec des notations évidentes)

$$\nu_\alpha^\Gamma(t) = \sum_{n=0}^\infty \nu_{\alpha+n}^{(2)}(t),$$

ce qui équivaut, d'après les définitions de ces mesures, à (cf. IV.10)

$$\frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n \geq 0} e^{-(\alpha+n)x} \quad (x > 0).$$

2) Une autre façon de prouver (IV.57) consiste à voir que

$$(IV.58) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^\Gamma}) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \psi(\alpha) = \prod_{n=0}^\infty E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{\alpha+n}^{(2)}}) \\ = \prod_{n=0}^\infty \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha + n}\right) e^{-\frac{\lambda}{\alpha+n}}.$$

Mais (IV.58) n'est autre que la formule de Mellin-Weierstrass (voir [Er, p. 6])

$$(IV.59) \quad \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \psi(\alpha) = \prod_{n=0}^\infty \left(1 + \frac{\lambda}{n + \alpha}\right) e^{-\frac{\lambda}{\alpha+n}}. \quad \square$$

En d'autres termes, la première démonstration du théorème IV.5.1, basée sur les mesures de Lévy, fournit une démonstration élémentaire de la formule de Mellin-Weierstrass.

### IV.6. Comportement asymptotique des v.a. $H_\alpha^\Gamma$ .

THÉORÈME IV.6.1. — *Les deux convergences en loi suivantes ont lieu :*

$$(IV.60) \quad \alpha^2 H_\alpha^\Gamma \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{\text{loi}} H_1^{(2)},$$

$$(IV.61) \quad \alpha^{\frac{1}{3}}(1 - \alpha H_\alpha^\Gamma) \xrightarrow[\alpha \rightarrow \infty]{\text{loi}} Z,$$



où  $Z$  est une v.a. stable d'indice  $\frac{3}{2}$ , complètement asymétrique, i.e.

$$(IV.62) \quad E(e^{i\mu Z}) = \exp -\frac{1}{3} |\mu|^{\frac{3}{2}} (1 + i \operatorname{sgn} \mu) \quad (\mu \in \mathbb{R}).$$

La densité  $f_Z$  de  $Z$  vaut

$$(IV.63) \quad f_Z(x) = \frac{1}{\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (3^{\frac{2}{3}} x)^n \frac{\Gamma(\frac{2}{3}n + 1)}{n!} \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

*Démonstration.* — 1) Preuve de (IV.60) : il s'agit de s'assurer que l'on a  $E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \alpha^2 H_\alpha^\Gamma}) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_1^{(2)}})$ , c'est-à-dire que

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha(1+\lambda))} \exp \lambda \alpha \psi(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} (1+\lambda) e^{-\lambda} \quad (\lambda \geq 0).$$

Mais cela résulte de

$$\Gamma(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\alpha}, \quad \psi(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\alpha}.$$

2) Pour prouver (IV.61), il s'agit d'étudier la limite, quand  $\alpha \rightarrow \infty$ , de

$$E \exp(i\lambda \alpha^{\frac{1}{3}} (1 - \alpha H_\alpha^\Gamma))$$

et de voir que cette quantité converge vers (IV.62). Pour cela, on commence par montrer que

$$(IV.64) \quad E \exp(-\frac{1}{2} \lambda^2 \alpha^{\frac{1}{3}} (\alpha H_\alpha^\Gamma - 1)) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{6} \lambda^3} \quad (\lambda > 0)$$

en utilisant les formules de Binet ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) :

$$\log \Gamma(\alpha) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \log \alpha - \alpha + \frac{1}{2} \log 2\pi + O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad (\text{cf. [WW, p. 249]}),$$

$$\psi(\alpha) = \log \alpha - \frac{1}{2\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \quad (\text{cf. [Er, vol. 1, p. 18]}).$$

Puis on montre, par prolongement holomorphe, qu'on peut remplacer  $\lambda$  par  $e^{\frac{1}{4}i\pi} \cdot 2\mu$  et par  $e^{-\frac{1}{4}i\pi} \cdot 2\mu$  dans (IV.64).

3) L'expression de la densité  $f_Z$  est classique (cf. [Zo]). □

*Remarque IV.6.2.* — Soit  $\text{Ai}$  la fonction d'Airy :

$$(IV.65) \quad \begin{aligned} \text{Ai}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{3}i(zt+t^3)} dt \\ &= \frac{1}{\pi 3^{2/3}} \sum_{n=0}^{\infty} (3^{\frac{1}{3}} z)^n \frac{\Gamma(\frac{1}{3}(n+1))}{n!} \sin \frac{2(n+1)\pi}{3}. \end{aligned}$$

Soit  $a$  la densité de probabilité définie sur  $\mathbb{R}$  (cf. [BFSS, p. 5]) par

$$(IV.66) \quad a(x) = 2 e^{-\frac{2}{3}x^3} (x \operatorname{Ai}(x^2) - \operatorname{Ai}'(x^2)).$$

La comparaison de (IV.63) et (IV.66) montre que la densité de  $Z$  est  $a$ . Notons (cf. [BFSS]) le comportement très asymétrique de  $a$  :

$$(IV.67) \quad a(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} |x|^{-\frac{5}{2}}, \quad a(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \exp -\frac{4x^2}{3}.$$

En particulier,  $Z$  admet un moment d'ordre  $\delta$  si et seulement si  $\delta < \frac{3}{2}$ . Il n'est pas difficile de voir qu'il en va de même pour  $H_\alpha^\Gamma$  (cf. proposition I.3.1).

*Remarque IV.6.2.* — La transcription, via la dualité (IV.14), de la convergence (IV.61), s'écrit

$$(IV.68) \quad \left(\frac{\gamma_\alpha}{\alpha}\right)^{\sqrt{\alpha}} \underset{\alpha \rightarrow \infty}{\text{loi}} e^N,$$

où  $\gamma_\alpha$  est une v.a. gamma de paramètre  $\alpha$  et  $N$  une variable gaussienne réduite. Notons que (IV.68) résulte élémentairement du théorème central limite.

**IV.7. Généralisation : v.a. associées aux fonctions de Bernoulli.**

On considère ici la mesure

$$c(dx) = \frac{1}{x^{3-\rho}(1 - e^{-x})} dx, \quad \rho > 1.$$

Cette mesure satisfait à la condition (II.1) et on va pouvoir lui associer une famille d'Esscher de couples de Wald  $(^{(\rho)}X_\alpha, ^{(\rho)}H_\alpha)$ . La formule (II.4) est ici

$$(IV.69) \quad \begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{x^{3-\rho}(1 - e^{-x})} dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha+n)x} x^{\rho-1} dx \\ &= \Gamma(\rho) \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(\alpha + n)^\rho} = \Gamma(\rho) \zeta(\rho, \alpha), \end{aligned}$$

si bien que le cas  $\rho = 2$  est celui des v.a.  $X_\alpha^\Gamma$  et  $H_\alpha^\Gamma$ . La fonction  $\varphi$  est une primitive de  $\varphi'$ , par exemple telle que  $\varphi(1) = 1$ . La fonction  $\varphi$  est alors la fonction de Bernoulli d'indice  $\rho$  (cf. [Ca, p. 100 et suivantes]).

IV.7.1. *La formule d'addition.* — Soit  $(^{(\rho)}H_\alpha(t), t \geq 0)$  le processus de Lévy dont la valeur au temps 1 a comme loi celle de  $(^{(\rho)}H_\alpha)$  ( $\alpha > 0, \rho > 1$ ). Alors, pour tout  $m$  entier, on a

$$(IV.70) \quad \left( ^{(\rho)}H_{m\alpha} \left( \frac{t}{m^{2-\rho}}, t \geq 0 \right) \stackrel{\text{loi}}{=} \left( \frac{1}{m^2} \sum_{k=0}^{m-1} ^{(\rho)}H_{\alpha+k/m}(t), t \geq 0 \right), \right.$$

où les processus du membre de droite de (IV.70) sont indépendants. Notons que, pour  $\rho = 2$ , on retrouve le théorème IV.3.1.

La formule (IV.70) peut aussi être démontrée à partir de

$$(IV.71) \quad P_\mu(\alpha) + P_\mu\left(\alpha + \frac{1}{m}\right) + \cdots + P_\mu\left(\alpha + \frac{m-1}{m}\right) = \frac{1}{m^\mu} [P_\mu(m\alpha) + k],$$

où  $P_\mu$  désigne la fonction de Bernoulli d'indice  $\mu$  et où  $k$  est une constante (cf. [Ca, p. 103, formule (7)]).

IV.7.2. *Développement en série.* — L'analogie de la formule (IV.57) est ici

$$(IV.72) \quad ^{(\rho)}H_\alpha \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+\alpha}^{(\rho)},$$

où les v.a.  $H_{n+\alpha}^{(\rho)}$  du membre de droite sont supposées indépendantes et ont été définies au paragraphe III.

## V. La famille d'Esscher de couples de Wald indéfiniment divisibles associée à la fonction zeta de Riemann.

### V.1. Définition de la famille d'Esscher associée à $\zeta$ .

Nous allons dans cet alinéa associer à la fonction  $\zeta$  de Riemann des v.a.  $X_\alpha^\zeta$  et  $H_\alpha^\zeta$  comme nous l'avons fait au paragraphe IV avec la fonction  $\Gamma$ . Soit donc

$$(V.1) \quad \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1).$$

De façon générale, le lecteur intéressé par les liens entre la fonction  $\zeta$  de Riemann et les probabilités pourra consulter l'article de P. Biane [Bi].

Désignant par  $M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction de von Mangoldt définie par

$$M(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas de la forme } p^\gamma \text{ (} p \text{ premier, } \gamma \in \mathbb{N}^* \text{),} \\ \log p & \text{sinon,} \end{cases}$$

la formule de Dirichlet (cf. [WW, p. 275]) s'écrit

$$(V.2) \quad \frac{\zeta'}{\zeta}(\alpha) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(n)}{n^\alpha} \quad (\alpha > 1).$$

Désignons par  $c(dx)$  la mesure sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$(V.3) \quad c(dx) := \sum_{n \geq 2} \frac{M(n)}{\log n} \delta_{\log n}(dx),$$

où  $\delta_c$  désigne la mesure de Dirac au point  $c$ . Ainsi, en définissant  $\varphi(\alpha) = (\zeta'/\zeta)(\alpha)$ , on a

$$(V.4) \quad \varphi'(\alpha) = \sum_{n \geq 2} M(n) \log n e^{-\alpha \log n} = \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^2 c(dx).$$

On peut donc appliquer le théorème II.1.2 avec  $c(dx)$  définie par (V.3) :

THÉORÈME V.1.1. — *Pour tout  $\alpha > 1$ , il existe des v.a.  $X_\alpha^\zeta$  et  $H_\alpha^\zeta$  indéfiniment divisibles telles que :*

1)  $X_\alpha^\zeta$  est une v.a. centrée ayant des moments de tout ordre et

$$(V.5) \quad \begin{aligned} E(e^{\lambda X_\alpha^\zeta}) &= \frac{\zeta(\alpha + \lambda)}{\zeta(\alpha)} \exp -\lambda \frac{\zeta'}{\zeta}(\alpha) \\ &= \exp \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) e^{-\alpha x} c(dx). \end{aligned}$$

2) On a

$$(V.6) \quad \begin{aligned} E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^\zeta}) &= \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \frac{\zeta'}{\zeta}(\alpha) \\ &= \exp - \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}) \nu_\alpha(t) dt \end{aligned}$$

avec 
$$\nu_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{n \geq 2} \frac{M(n)}{n^\alpha} (1 - e^{-(\log^2 n)/2t}),$$

$$(V.7) \quad E(H_\alpha) = \sum_{n \geq 2} M(n) \frac{\log n}{n^\alpha}.$$

3) Le couple  $(X_\alpha^\zeta, H_\alpha^\zeta)$  forme un couple de Wald indéfiniment divisible.

En particulier,

$$(V.8) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^\zeta}) = [E(e^{\lambda X_\alpha^\zeta})]^{-1} \\ = \exp - \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1)e^{-\alpha x} c(dx).$$

*Remarque V.1.2.* — Les v.a.  $X_\alpha^\zeta$  sont étroitement liées à celles de Khintchine [Kh, p. 35]) qui prouve l'existence de v.a.  $K_\alpha$  telles que

$$E(e^{itK_\alpha}) = \frac{\zeta(\alpha + it)}{\zeta(\alpha)} \quad (\alpha > 1),$$

soit encore

$$(V.9) \quad X_\alpha^\zeta \stackrel{\text{loi}}{=} K_\alpha - \frac{\zeta'(\alpha)}{\zeta(\alpha)}.$$

Les v.a.  $K_\alpha$  ont été étudiées récemment par G.D. Lin et C.Y. Hu [LH, p. 817–828], notamment du point de vue de leur densité. Puisque  $X_\alpha^\zeta$  est centrée, nous avons (cf. [LH, cor. 1, p. 821])

$$(V.10) \quad E(K_\alpha) = \frac{\zeta'(\alpha)}{\zeta(\alpha)}.$$

Par ailleurs, il n'est pas difficile de décrire la loi des v.a.  $K_\alpha$  : soit  $(N_p, p \text{ premier})^{(1)}$ , une suite de v.a. géométriques indépendantes telles que

$$P(N_p = n) = p^{-n\alpha}(1 - p^\alpha) \quad (n \text{ entier}, n \geq 0)$$

Alors on a

$$K_\alpha \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{p \text{ premier}} (-\log p) N_p$$

d'où

$$X_\alpha^\zeta \stackrel{\text{loi}}{=} \left( \sum_{p \text{ premier}} (-\log p) N_p \right) - \frac{\zeta'(\alpha)}{\zeta(\alpha)}.$$

## V.2. Développement en série des v.a. $H_\alpha^\zeta$ ( $\alpha > 1$ ).

Nous allons montrer dans cet alinéa que la formule d'Euler

$$(V.11) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \text{ premier}} \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right),$$

fournit un développement en série des v.a.  $H_\alpha^\zeta$ .

<sup>(1)</sup>  $p$  premier signifie ici  $p = 2, 3, 5, 7, \dots$

Définissons, pour tout entier  $p$  premier,

$$(V.12) \quad \zeta_p(\alpha) = \frac{p^\alpha}{p^\alpha - 1},$$

$$(V.13) \quad \varphi_p(\alpha) := \frac{\zeta'_p}{\zeta_p}(\alpha) = -\log p \left( \frac{1}{p^\alpha - 1} \right) = (-\log p) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{r\alpha}},$$

$$(V.14) \quad \varphi'_p(\alpha) = (\log p)^2 \sum_{r=1}^{\infty} r e^{-r\alpha \log p} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x^2 c_p(dx),$$

avec

$$(V.15) \quad c_p(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \delta_{n \log p}(dx)$$

d'où, toujours grâce au théorème II.1.2, l'existence de v.a.  $(H_\alpha^{\zeta,p}, \alpha > 1)$  telles que

$$\begin{aligned} E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^{\zeta,p}}) &= \frac{\zeta_p(\alpha)}{\zeta_p(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \frac{\zeta'_p}{\zeta_p}(\alpha) = \frac{p^{\alpha+\lambda} - 1}{p^\lambda(p^\alpha - 1)} \exp -\frac{\log p^\lambda}{p^\alpha - 1} \\ &= \exp \left( -\int_0^{\infty} (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}) \nu_{p,\alpha}^\zeta(t) dt \right) \end{aligned}$$

avec

$$(V.16) \quad \nu_{p,\alpha}^\zeta(t) = \frac{\log p}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{r\alpha}} (1 - e^{-(r^2 \log^2 p)/2t}).$$

La formule d'Euler, écrite sous la forme

$$(V.17) \quad \zeta(\alpha) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{p^\alpha}{p^\alpha - 1} \quad (\alpha > 1)$$

conduit, d'après la définition de  $\zeta_p(\alpha)$  (cf. (V.12)) à :

THÉORÈME V.2.1. — Pour  $\alpha > 1$ , on a le développement

$$(V.18) \quad H_\alpha^\zeta \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{p \text{ premier}} H_\alpha^{\zeta,p},$$

où les v.a. du membre de droite de (V.18) sont indépendantes.

Notons que (V.18), lue sur les mesures de Lévy, équivaut à

$$(V.19) \quad \begin{aligned} \sum_{p \text{ premier}} \log p \sum_{r \geq 1} \frac{1}{p^{r\alpha}} (1 - e^{-(r^2 \log^2 p)/2t}) \\ = \sum_n \frac{M(n)}{n^\alpha} (1 - e^{-(\log^2 n)/2t}). \end{aligned}$$

*Remarque V.2.2.* — Il est facile de vérifier sur la définition (V.16) que, pour deux nombres premiers  $p$  et  $q$  et  $\beta$  réel tels que  $\beta(1 \wedge \beta \log q / \log p) > 1$ , on a

$$(V.20) \quad H_{\beta}^{\zeta, q} \stackrel{\text{loi}}{=} \left( \frac{\log q}{\log p} \right)^2 H_{\beta \log q / \log p}^{\zeta, p}.$$

### V.3. Relation avec la fonction $\xi$ .

Soit  $\xi$  la fonction définie par

$$(V.21) \quad \xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \zeta(s).$$

Cette fonction, définie pour  $\text{Re } s > 1$ , possède en fait un prolongement holomorphe sur  $\mathbb{C}$  tout entier, qui est d'ordre 1 (cf. [Pa]). Elle satisfait à l'équation fonctionnelle  $\xi(s) = \xi(1-s)$ ,  $s \in \mathbb{C}$ . De plus, les zéros de  $\xi$  sont ceux de  $\zeta$ . Nous allons dans cet alinéa essayer de remplacer la fonction  $\zeta$  de l'alinéa précédent par la fonction  $\xi$ .

*Remarque V.3.1 (définition et discussion de la v.a.  $X_{\frac{1}{2}}^{\xi}$ ).*

1) On sait, depuis B. Riemann [Ri] qu'il existe une v.a.  $Y \geq 0$  telle que, pour tout  $s \in \mathbb{C}$

$$(V.22) \quad E(Y^s) = 2\xi(s).$$

On pourra consulter [BY] et [BPY] pour de nombreuses réalisations de  $Y$ , en particulier en termes d'excursion brownienne. On a par exemple

$$Y \stackrel{\text{loi}}{=} \left( \sup_{0 \leq s \leq 1} \eta_s^2 \right),$$

où  $(\eta_s, 0 \leq s \leq 1)$  désigne l'excursion brownienne normalisée. Ainsi, d'après (V.22), on a

$$(V.23) \quad \frac{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)}{\xi(\frac{1}{2})} = \frac{E(Y^{\frac{1}{2} + \lambda})}{E(Y^{\frac{1}{2}})} = \frac{E(Y^{\frac{1}{2}} \exp \lambda \log Y)}{E(Y^{\frac{1}{2}})},$$

$$(V.24) \quad = \tilde{E}(\exp \lambda \log Y).$$

Comme  $(\xi'/\xi)(\frac{1}{2}) = 0$  (puisque  $\xi(\frac{1}{2} + s)$  est paire), on a avec des notations évidentes

$$(V.25) \quad \tilde{E}(\exp \lambda \log Y) = \frac{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)}{\xi(\frac{1}{2})} \exp\left(-\lambda \frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{1}{2}\right)\right),$$

si bien que la loi de  $\log Y$ , sous  $\tilde{E}$ , est bien celle de  $X_{\frac{1}{2}}^{\xi}$ .

2) La loi de  $X_{\frac{1}{2}}^\xi$  est-elle indéfiniment divisible? Non, car d'après (V.22) et l'argument de la proposition I.5, la fonction  $\xi$  n'aurait pas de zéro sur  $\mathbb{C}$ , ce qui est absurde.

3) Peut-on cependant associer à  $X_{\frac{1}{2}}^\xi$  une v.a.  $H_{\frac{1}{2}}^\xi \geq 0$  de façon à ce que ces deux v.a. forment un couple de Wald? La réponse à cette question est fournie par le :

THÉORÈME V.3.2. — 1) (i) Si la conjecture de Riemann est vraie, il existe une v.a.  $H_{\frac{1}{2}}^\xi \geq 0$  telle que

$$(V.26) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{1/2}^\xi}) = \frac{\xi(\frac{1}{2})}{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)}.$$

(ii) Soit alors  $\widehat{H}_{\frac{1}{2}}^\xi$  (cf. proposition I.8.1) telle que

$$(V.27) \quad E(e^{i\lambda \widehat{H}_{1/2}^\xi}) = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{1/2}^\xi}) = \frac{\xi(\frac{1}{2})}{\xi(\frac{1}{2} + |\lambda|)}.$$

Alors, la densité de  $\widehat{H}_{\frac{1}{2}}^\xi$  est une fonction fréquence de Polya.

2) Réciproquement, s'il existe une v.a.  $\widehat{H}$ , de densité une fonction fréquence de Polya  $\Lambda$  telle que

$$(V.28) \quad E(e^{i\lambda \widehat{H}}) = \frac{\xi(\frac{1}{2})}{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)},$$

alors la conjecture de Riemann est satisfaite. (Notons qu'on peut insérer le facteur  $\exp \pm \lambda \xi'(\frac{1}{2})/\xi(\frac{1}{2})$  dans les formules (V.26) et (V.27) puisque  $\xi'(\frac{1}{2}) = 0!$ )

D'après [Sch, th. 1, p. 133], la fonction  $\Lambda(s)$  est une fonction fréquence de Polya si

$$\forall y_1 < \dots < y_n, x_1 < \dots < x_n, \quad \det \Lambda(x_i - y_j) \geq 0.$$

On pourra consulter I.J.Schoenberg [Sch] pour les propriétés de ces fonctions utilisées dans la démonstration ci-dessous.

Démonstration du théorème V.3.2.

1) (i) La fonction  $\xi$  étant holomorphe d'ordre 1 et n'ayant des zéros que de la forme  $(\frac{1}{2} + i\gamma)$  (c'est la conjecture de Riemann), son développement



d'Hadamard permet d'écrire

$$\xi(s) = \prod_{\gamma>0} \left(1 - \frac{s}{\frac{1}{2} + i\gamma}\right) \left(1 - \frac{s}{1 - (\frac{1}{2} + i\gamma)}\right)$$

(cf. [Pa, p. 349]), d'où

$$(V.29) \quad \frac{\xi(\frac{1}{2})}{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)} = \prod_{\gamma>0} \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \lambda^2} = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_{1/2}^\xi}),$$

où  $H_{\frac{1}{2}}^\xi$  est la somme de v.a. exponentielles  $\mathcal{E}_{\frac{1}{2}\gamma^2}$  de paramètre  $\frac{1}{2}\gamma^2$  et indépendantes :

$$H_{1/2}^\xi \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{\gamma \geq 0} \mathcal{E}_{\gamma^2/2}$$

(notons que  $\sum 1/\gamma^2 < \infty$ ). Ceci prouve l'existence de  $H_{\frac{1}{2}}^\xi$ .

(ii) Écrivons maintenant

$$E(e^{i\lambda \widehat{H}_{1/2}^\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda s} \Lambda(s) ds = \frac{\xi(\frac{1}{2})}{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)},$$

soit

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} \Lambda(s) ds = \frac{\xi(\frac{1}{2})}{\xi(\frac{1}{2} + i\lambda)}, \quad |\operatorname{Re} \lambda| < \gamma_0,$$

avec  $\gamma_0$  tel que toutes les racines de  $\xi(\frac{1}{2} + i\lambda)$  sont de valeur absolue  $\geq \gamma_0$ .

Présentons maintenant une autre démonstration du point 1) (ii). La variable  $H$  étant une somme de variables exponentielles indépendantes,  $\widehat{H}$  a comme densité la convolée de densités de la forme  $\frac{1}{2}a_n e^{-|x|^{a_n}}$ , densités qui possèdent la propriété de Polya, et la propriété de Polya est stable par convolution (cf. [Sch]).

2) Réciproquement, supposons que (V.28) soit vraie. Toujours d'après [Sch, th. 1, p. 333], la formule

$$(V.30) \quad h(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda s} \Lambda(s) ds$$

définit une fonction holomorphe sur  $|\operatorname{Re} \lambda| < \gamma_0$ , pour un  $\gamma_0 > 0$  et on a

$$(V.31) \quad \frac{1}{h(\lambda)} = C e^{-\gamma\lambda^2 + \delta\lambda} \prod_{\nu} (1 + \delta_{\nu}\lambda) e^{-\delta_{\nu}\lambda}$$

avec les  $\delta_{\nu}$  réels, ainsi que, d'après (V.26),

$$h(i\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda s} \Lambda(s) ds = \frac{\xi(\frac{1}{2})}{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)}.$$

Ceci prouve que  $h$  est une fonction paire et (V.31) devient, après regrou-

pement des termes opposés

$$\frac{\xi(\frac{1}{2} + \lambda)}{\xi(\frac{1}{2})} = \frac{1}{h(i\lambda)} = C e^{-\gamma\lambda^2} \prod (1 + \delta_v^2 \lambda^2)$$

(en fait  $\gamma = 0$ ), ce qui prouve que les zéros de  $\xi(\frac{1}{2} + \lambda)$  sont imaginaires purs. □

V.3.3. *Existe-t-il des v.a.  $H_\alpha^\xi$  et  $X_\alpha^\xi$  pour  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  ?*

1) Nous dirons qu'une v.a.  $X_\alpha^\xi$  est du type  $(\xi, \alpha)$  si elle satisfait à

$$(V.32) \quad E(\exp \lambda X_\alpha^\xi) = \frac{\xi(\alpha + \lambda)}{\xi(\alpha)} \exp -\lambda \frac{\xi'(\alpha)}{\xi} \quad (\lambda \geq 0).$$

Montrons qu'une telle v.a. existe pour tout  $\alpha > 0$ . En effet, puisque d'après (V.22) il existe  $Y \geq 0$  telle que

$$(V.33) \quad E(Y^\lambda) = E(\exp \lambda(\log Y)) = 2\xi(\lambda),$$

nous en déduisons, en utilisant la transformée de Esscher, l'existence de v.a.  $\tilde{X}_\alpha^\xi$  telles que

$$(V.34) \quad E(\exp \lambda \tilde{X}_\alpha^\xi) = \frac{\xi(\alpha + \lambda)}{\xi(\alpha)} \quad (\alpha, \lambda > 0).$$

Il suffit alors de poser

$$X_\alpha^\xi = \tilde{X}_\alpha^\xi - \frac{\xi'(\alpha)}{\xi(\alpha)}.$$

2) Nous ne savons pas s'il existe des v.a.  $H_\alpha^\xi$  pour  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , i.e. des v.a. telles que

$$(V.35) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H_\alpha^\xi}) = \frac{\xi(\alpha)}{\xi(\alpha + \lambda)} \exp \lambda \frac{\xi'(\alpha)}{\xi(\alpha)}$$

Par contre sous la conjecture de Riemann, il existe pour  $\alpha > \frac{1}{2}$  des v.a.  $\tilde{H}_\alpha^\xi \geq 0$  telles que

$$(V.36) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \tilde{H}_\alpha^\xi}) = \frac{\xi(\alpha)}{\xi(\alpha + \lambda)} = \frac{\xi(\alpha)}{\xi(\frac{1}{2})} \frac{\xi(\frac{1}{2})}{\xi(\frac{1}{2} + (\alpha - \frac{1}{2}) + \lambda)}.$$

En effet, toujours sous la conjecture de Riemann, (V.36) est vraie parce qu'il existe une v.a.  $\tilde{H}_{\frac{1}{2}}^\xi$  (cf. théorème V.3.2, point 1) et grâce au

LEMME V.3.4. — Si  $H \geq 0$  et si  $\alpha > 0$ , alors

$$\rho(\lambda) := \frac{E(\exp - \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)^2 H)}{E(\exp - \frac{1}{2}\alpha^2 H)}$$

est la transformée de Laplace en  $\frac{1}{2}\lambda^2$  d'une v.a.  $\geq 0$ .

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} E(\exp - \frac{1}{2}(\alpha + \lambda)^2 H) &= E(\exp - \frac{1}{2}\alpha^2 H - \frac{1}{2}\lambda^2 H - \alpha\lambda H) \\ &= E(\exp - \frac{1}{2}\alpha^2 H - \frac{1}{2}\lambda^2 H - \frac{1}{2}\lambda^2 T_{\alpha H}), \end{aligned}$$

où  $(T_\beta, \beta \geq 0)$  est un subordonateur stable d'indice  $(\frac{1}{2})$  indépendant de  $H$ . □

## VI. Appendice.

### VI.1. Définition d'un $\mu$ -couple de Wald indéfiniment divisible

$$(0 < \mu \leq \frac{1}{2}).$$

On se propose maintenant de définir un  $\mu$ -couple de Wald  $(X, H^{(\mu)})$  de v.a. indéfiniment divisibles, i.e. tels que

$$(VI.1) \quad E(e^{\lambda X})E(e^{-\lambda^{1/\mu} H^{(\mu)}}) = 1.$$

Le cas  $\mu = \frac{1}{2}$  est celui qui a été étudié tout au long de ce travail. Nous donnons deux définitions de  $H^\mu$  : l'une directe (cf. théorème VI.11), l'autre par subordination à partir de  $H^{\frac{1}{2}}$  (proposition VI.1.2).

Soient  $\mu \in ]0, 1[$  et  $(T_x^{(\mu)}, x \geq 0)$  le subordonateur stable d'indice  $\mu$ . Notons  $p^{(\mu)}(x, t)$  ( $t \geq 0$ ) la densité de  $T_x^{(\mu)}$ . On a donc

$$(VI.2) \quad \begin{aligned} E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu} T_x^{(\mu)}}) &= \exp -x\lambda \\ &= \exp \left( -\frac{x\mu 2^\mu}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu} t}) \frac{dt}{t^{1+\mu}} \right) \end{aligned}$$

$$(VI.3) \quad = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu} t} p^{(\mu)}(x, t) dt.$$

Notons que la normalisation choisie dans (VI.2) est telle que pour  $\mu = \frac{1}{2}$ ,

$$(VI.4) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T_x^{(\frac{1}{2})}}) = \exp -x\lambda = \exp \left( -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t}) dt}{t^{\frac{3}{2}}} \right).$$

THÉORÈME VI.1.1. — Soit  $c$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $\int_0^\infty (x^2 \wedge x) c(dx) < \infty$  et soit  $\mu \in ]0, \frac{1}{2}]$ . Alors il existe un  $\mu$ -couple de v.a. indéfiniment divisibles tel que :

1) On a

$$(VI.5) \quad E(e^{\lambda X}) = \exp \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c(dx).$$

2) On a  $H^{(\mu)} \geq 0$  et

$$(VI.6) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu}H^{(\mu)}}) = \exp \left( - \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu}t}) \nu_\mu(t) dt \right)$$

avec

$$(VI.7) \quad \nu_\mu(t) = \frac{\mu 2^\mu}{\Gamma(1-\mu)} \frac{1}{t^{1+\mu}} \int_0^\infty \left( 1 - \frac{t^{1+\mu}\Gamma(1-\mu)}{x\mu 2^\mu} p^{(\mu)}(x, t) \right) x c(dx).$$

3) On a  $E(e^{\lambda X})E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu}H^{(\mu)}}) = 1$ , i.e.

$$(VI.8) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu}H^{(\mu)}}) = \exp \left( - \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c(dx) \right).$$

Démonstration. — Le cas  $\mu = \frac{1}{2}$  ayant déjà été traité, nous supposons donc que  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ . L'existence des v.a.  $X$  et  $H^{(\mu)}$  se montre exactement comme pour le théorème I.1.1. Il suffit donc de voir que :

- 1)  $\nu_\mu(t)$ , définie par (VI.7), est positive;
- 2) (VI.8) est vraie.

1) Positivité de  $\nu_\mu$ . — Cela résulte du lemme suivant :

LEMME VI.1.2. — Pour tout  $\mu \in ]0, \frac{1}{2}[$ , pour tout  $t$  et tout  $x > 0$ , on a

$$(VI.9) \quad \frac{\mu 2^\mu}{\Gamma(1-\mu)} \frac{1}{t^{1+\mu}} \geq \frac{p^{(\mu)}(x, t)}{x}.$$

Démonstration. — On déduit de (VI.2) que, pour  $\gamma \geq 0$ , on a

$$(VI.10) \quad \exp(-x 2^\mu \gamma^\mu) = \int_0^\infty e^{-\gamma t} p^{(\mu)}(x, t) dt.$$

Soit, par dérivation par rapport à  $\gamma$ ,

$$(VI.11) \quad \mu 2^\mu \gamma^{\mu-1} \exp(-x 2^\mu \gamma^\mu) = \int_0^\infty e^{-\gamma t} \frac{t p^{(\mu)}(x, t)}{x} dt.$$

Par ailleurs, pour  $\gamma > 0$ , on a d'après (IV.11)

$$(VI.12) \quad \int_0^\infty e^{-\gamma t} \left( \frac{\mu 2^\mu}{\Gamma(1-\mu)} \frac{1}{t^\mu} - \frac{t p^{(\mu)}(x, t)}{x} \right) dt \\ = \mu 2^\mu \gamma^{\mu-1} - \mu 2^\mu \gamma^{\mu-1} \exp(-x 2^\mu \gamma^\mu).$$

D'où, en notant  $g$  le membre de gauche de (VI.12),

$$g = \mu 2^\mu \gamma^{\mu-1} (1 - e^{-x 2^\mu \gamma^\mu})$$

et en dérivant (VI.12) par rapport à  $x$ ,

$$(VI.13) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mu 2^{2\mu} \gamma^{2\mu-1} \int_0^\infty e^{-\gamma t} p^{(\mu)}(x, t) dt.$$

Mais puisque  $\gamma \mapsto \gamma^{2\mu-1}$  est une transformée de Laplace en  $\gamma$ , car  $2\mu-1 < 0$ , on a

$$(VI.14) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = k_\mu \int_0^\infty e^{-\gamma t} dt \int_0^t \frac{1}{s^{2\mu}} p^{(\mu)}(x, t-s) ds$$

avec  $k_\mu = \mu 2^{2\mu} 1/\Gamma(1-2\mu)$ . D'où, puisque  $g$  s'annule pour  $x=0$ ,

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} \left( \frac{\mu 2^\mu}{\Gamma(1-\mu)} \frac{1}{t^\mu} - \frac{t p^{(\mu)}(x, t)}{x} \right) dt \\ = k_\mu \int_0^\infty e^{-\gamma t} dt \int_0^x dy \int_0^t \frac{1}{s^{2\mu}} p^{(\mu)}(y, t-s) ds,$$

ce qui prouve que

$$\frac{\mu 2^\mu}{\Gamma(1-\mu)} \frac{1}{t^\mu} - \frac{t p^{(\mu)}(x, t)}{x} \geq 0,$$

ce qui est le lemme VI.1.2.

Prouvons maintenant le point 3) du théorème VI.1.1. On a

$$\int_0^\infty (1 - e^{-\frac{1}{2} \lambda^{1/\mu} t}) \nu_\mu(t) dt = \int_0^\infty x c(dx) \left[ \int_0^\infty \frac{\mu 2^\mu}{t^{1+\mu} \Gamma(1-\mu)} (1 - e^{-\frac{1}{2} \lambda^{1/\mu} t}) dt \right. \\ \left. - \int_0^\infty \frac{p^{(\mu)}(x, t)}{x} dt + \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \lambda^{1/\mu} t} \frac{p^{(\mu)}(x, t)}{x} dt \right] \\ = \int_0^\infty x c(dx) \left[ \lambda - \frac{1}{x} + \frac{e^{-\lambda x}}{x} \right] \quad \text{d'après (VI.2)} \\ (VI.15) \quad = \int_0^\infty (e^{-\lambda x} + \lambda x - 1) c(dx).$$

Notons que (VI.15) implique  $\int_0^\infty (t \wedge 1) \nu_\mu(t) dt < \infty$ .

**VI.2. Une autre définition de  $H^{(\mu)}$ .**

Soit  $c$  une mesure positive telle que  $\int_0^\infty (x^2 \wedge x) c(dx) < \infty$  et soit  $H$  la v.a. définie par le théorème I.1.1.

PROPOSITION VI.2.1. — Pour tout  $\mu \in ]1, \frac{1}{2}[$ , on a

$$(VI.16) \quad H^{(\mu)} \stackrel{\text{loi}}{=} T_{\frac{1}{2}H}^{(2\mu)}$$

où  $(T_u^{(2\mu)}, u \geq 0)$  et  $\frac{1}{2}H$  sont indépendants.

Démonstration. — On a, d'après (VI.2)

$$(VI.17) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu} T_{H/2}^{(2\mu)}}) = E\left(\exp - \frac{1}{2} H 2^{2\mu} \frac{\lambda^2}{2^{2\mu}}\right) \\ = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 H}) = E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu} H^{(\mu)}}),$$

la dernière égalité résultant de (VI.5).

Remarque VI.2.2. — Le théorème VI.1.1 donne la mesure de Lévy de  $H^{(\mu)}$  et la formule de subordination (I.58) donne également la mesure de Lévy de  $H^{(\mu)}$ . D'où, par identification

$$(VI.18) \quad \frac{\mu 2^\mu}{\Gamma(1-\mu)} \frac{1}{x^{1+\mu}} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^{1+\mu}}{y\mu 2^\mu} p^{(\mu)}(y, x)\right) y c(dy) \\ = \int_0^\infty p^{(2\mu)}(t, x) 2\nu(2t) dt$$

$$(VI.19) \quad = \int_0^\infty p^{(2\mu)}(t, x) \frac{dt}{2\sqrt{\pi t^3}} \int_0^\infty (1 - e^{-y^2/4t}) y c(dy)$$

où  $\nu(t) dt$  est la mesure de Lévy de  $H$  (cf. (I.4)). La formule (VI.18)-(VI.19) étant vraie pour toute mesure  $c$ , on en déduit que

$$(VI.20) \quad \frac{\mu 2^\mu}{\Gamma(1-\mu)} \frac{1}{x^{1+\mu}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty p^{(2\mu)}(t, x) \frac{dt}{\sqrt{\pi t^3}},$$

$$(VI.21) \quad p^{(\mu)}(y, x) = 2 \int_0^\infty p^{(2\mu)}(t, x) p^{(\frac{1}{2})}(y, 2t) dt.$$

On peut alors observer que (VI.20) et (VI.21) se vérifient directement :

- (VI.20) se vérifie par subordination (cf. (I.58)), puisque l'on a  $T_{T^{(1/2)}}^{(2\mu)} \stackrel{\text{loi}}{=} cT^{(\mu)}$  avec  $c = 2^{1/2\mu}$  ;

- (VI.21) se vérifie en montrant que les transformées de Laplace (en  $x$ ) des deux membres de (IV.21) sont égales.

**VI.3. Les v.a.  $H_\alpha^{(\mu),\Gamma}$ .**

Soit, pour  $\alpha > 0$  et  $\mu \in ]0, \frac{1}{2}[$ , une v.a.  $H_\alpha^{(\mu),\Gamma}$  telle que

$$(VI.22) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu} H_\alpha^{(\mu),\Gamma}}) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \lambda)} e^{\lambda\psi(\alpha)}.$$

La plupart des théorèmes du paragraphe IV se généralisent aux v.a.  $H_\alpha^{(\mu),\Gamma}$ . Par exemple, pour tout  $n$  entier, on a

$$(VI.23) \quad H_{n\alpha}^{(\mu),\Gamma} \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{n^{1/\mu}} \sum_{k=0}^{n-1} H_{\alpha+k/n}^{(\mu),\Gamma}.$$

Le développement en série (IV.56) s'écrit

$$(VI.24) \quad H_\alpha^{(\mu),\Gamma} \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + n)^{1/\mu}} H_{1,n}^{(\mu),(2)}$$

avec, pour le second membre de (VI.24), les v.a.  $H_{1,n}^{(\mu),(2)}$  i.i.d. telles que

$$(VI.25) \quad E(e^{-\frac{1}{2}\lambda^{1/\mu} H_{1,n}^{(\mu),(2)}}) = \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha}\right) e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}.$$

Notons toutefois une différence dans le comportement asymptotique des v.a.  $H_\alpha^{(\mu),\Gamma}$  quand  $\alpha \rightarrow \infty$ . On a ici, pour  $0 < \mu < \frac{1}{2}$

$$(VI.26) \quad \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2\mu} H_\alpha^{(\mu),\Gamma} \xrightarrow[\alpha \rightarrow \infty]{\text{loi}} T_1^{(2\mu)}.$$

(comparer avec le théorème IV.6.1).

**BIBLIOGRAPHIE**

- [BFSS] C. BANDERIER, P. FLAJOLET, G. SCHAEFFER, M. SORIA, Random maps, coalescing saddles, singularity analysis and Airy phenomena, *Random Struct. Algor.*, 19 (2001), 194–246.
- [Bi] P. BIANE, La fonction zêta et les probabilités, dans ‘La fonction zêta’, éd. N. Berline et C. Sabbah, Éditions de l'École Polytechnique, 2003.
- [BPY] P. BIANE, J. PITMAN, M. YOR, Probabilistic interpretation of the Jacobi theta and the Riemann zeta functions, via Brownian excursions, *Bull. AMS*, 38 (2001), 435–465.
- [BY] P. BIANE, M. YOR, Valeurs principales associées aux temps locaux browniens, *Bull. Sci. Math.* 2, 111 (1987), 23–101.

$F(\lambda)$	$c(dx)$	$X_\alpha$	$H_\alpha$	$\nu_\alpha(t)$	
$\frac{1}{\lambda^k} \quad (k > 0)$	$\frac{k}{x} \mathbf{1}_{x>0} dx$	$X_\alpha^{(2)} = \frac{1}{\alpha}(k - \gamma_k)$ $(\alpha > 0)$	$H_\alpha^{(2)} \wedge \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}}} \text{ si } k = 1$	$\frac{k}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{x^2}{2t}}) e^{-\alpha x} dx \quad (\alpha > 0)$	§ III.1.5 § III.2
$\Gamma(\lambda)$	$\frac{1}{x(1 - e^{-x})} \mathbf{1}_{x>0} dx$	$X_\alpha^\Gamma = (\log \gamma_\alpha) - \psi(\alpha)$ $(\alpha > 0)$	$H_\alpha^\Gamma \quad (\alpha > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\frac{x^2}{2t}}) e^{-\alpha x}}{1 - e^{-x}} dx$	§ IV
$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\delta + \lambda)} \quad (\delta > 0)$	$\frac{1 - e^{-\delta x}}{x(1 - e^{-x})} \mathbf{1}_{x>0} dx$	$X_{\delta, \alpha + \delta}^\Gamma = \log \beta_{\alpha, \delta}$ $-(\psi(\alpha) - \psi(\alpha + \delta))$	$H_{\alpha, \alpha + \delta}^\Gamma$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\frac{x^2}{2t}}) (e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha + \delta)x})}{1 - e^{-x}} dx$	Rem. IV.1.5
$\exp\left\{K_{\gamma+1}(\sqrt{4b(a+\lambda)})\right.$ $\left. \left(\frac{b}{a+\lambda}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}\right\}$ $a, b, \gamma > 0$	$\frac{1}{2} x^\gamma \exp\left(-\left(ax + \frac{b}{x}\right)\right) \mathbf{1}_{x>0} dx$			$\frac{1}{2\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{x^2}{2t}}) x^{\gamma-1} \exp(-ax + b/x + \alpha x) dx$	Ex. II.1.3
$\exp\left(\frac{b}{b+\lambda}\right)^a$ $b, a > 0$	$\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbf{1}_{x>0} dx$			$\frac{b^a}{\Gamma(a)\sqrt{2\pi t^3}} \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{x^2}{2t}}) x^{a-2} e^{-(b+\alpha)x} dx$	Ex. I.1.5
$\zeta(\lambda)$	$\sum_{n \geq 2} \frac{M(n)}{\log n} \delta_{\log n}(dx)$	$X_\alpha^\zeta \quad (\alpha > 1)$	$H_\alpha^\zeta \quad (\alpha > 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{n \geq 2} \frac{M(n)}{n^\alpha} (1 - e^{-\frac{\log^2 n}{2t}})$	§ V.1
$\zeta_p(\lambda) = \frac{p^\lambda}{p^\lambda - 1} (p \text{ premier})$	$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \delta_{n \log p}(dx)$	$X_\alpha^{\zeta_p} \quad (\alpha > 1)$	$H_\alpha^{\zeta_p} \quad (\alpha > 1)$	$\frac{\log p}{\sqrt{2\pi t^3}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{p^{n\alpha}} (1 - e^{-\frac{n^2 \log^2 p}{2t}})$	§ V.2
$\frac{k\lambda^{2-\mu}}{\exp\left(\frac{2-\mu}{2-\mu}\right)}$ $0 < \mu < 1, k > 0$	$k \frac{1-\mu}{\Gamma(\mu)} \frac{1}{x^{3-\mu}} \mathbf{1}_{x>0} dx$			$\frac{k}{\sqrt{2\pi t^3}} \frac{1-\mu}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{x^2}{2t}}) \frac{e^{-\alpha x}}{x^{2-\mu}} dx \quad (\alpha > 0)$	§ III.1.2
$\frac{\exp\left(-\frac{k\lambda^{2-\mu}}{2-\mu}\right)}{\mu > 1, \mu \neq 2, k > 0}$	$k \frac{\mu-1}{\Gamma(\mu)} \frac{1}{x^{3-\mu}} \mathbf{1}_{x>0} dx$			$\frac{k}{\sqrt{2\pi t^3}} \frac{\mu-1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{x^2}{2t}}) \frac{e^{-\alpha x}}{x^{2-\mu}} dx \quad (\alpha > 0)$	§ III.1.4
	$c$ , image de $\sigma(dy) \otimes du$ par $(y, u) \mapsto f(u)$	$(\alpha = 0)$ $X_0 = C - \int_0^\infty f(u) d\Sigma_u$ $C = \int_0^\infty \int_0^\infty f(u)y d\sigma(dy)$ avec $(\Sigma_u, u \geq 0)$ subordonateur de mesure de Levy $\sigma$ sans dérive			§ I.2.3
$F(\lambda) = \exp(qe^{-\lambda a})$ $q, a > 0$	$q\delta_a(dx)$	$X_\alpha = a(qe^{-\alpha a} - N_{qe^{-\alpha a}})$ $(N_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson standard $(\alpha \geq 0)$		$\frac{qa e^{-\alpha a}}{\sqrt{2\pi t^3}} (1 - e^{-\frac{x^2}{2t}})$	§ I.2.1

Récapitulation des différents exemples

[BBE] P. BOUGEROL, M. BABILLOT, L. ELIE, The random difference equation  $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$  in the critical case, Ann. Prob., 25 (1997), 478–493.

[Br] M.F. BRU, Wishart processes, J. Theor. Prob., 4 (1991), 725–751.

[Ca] R. CAMPBELL, Les intégrales eulériennes et leurs applications, Dunod, 1966.

[CY] L. CHAUMONT, M. YOR, Exercices in Probability. A guided Tour from Measure Theory to Random Processes, via conditioning, Cambridge Series in Stat. and Prob. Math., 2003.

[DDMY] C. DONATI-MARTIN, Y. DOUMERC, H. MATSUMOTO, M. YOR, Some properties of the Wishart processes and a matrix extension of the Hartman Watson laws, Publ. RIMS Kyoto Univ., 40 (2004), n° 4, 1385–1412.

[DGY] C. DONATI-MARTIN, R. GHOMRASNI, M. YOR, Affine random equations and the stable  $\frac{1}{2}$  distribution, Stud. Sci. Math. Hung., 36 (2000), 347–405.



- [DRVY] B. DE MEYER, B. ROYNETTE, P. VALLOIS, M. YOR, On independent times and positions for Brownian motions, *Rev. Mat. Iberoamericana*, 18 (2002), 541–586.
- [Er] A. ERDELYI and al., *Higher transcendental Functions*, vol. I, Mc Graw Hill, 1953.
- [Go] L. GORDON, A stochastic Approach to the Gamma Function, *Amer. Math. Monthly*, 101 (1994), 858–865.
- [Gr] B. GRIGELIONIS, On the self decomposability of Euler’s gamma function, trad. in *Lituanian Math.*, 43 (2003), n° 5, 295–385.
- [Ha] P. HARTMAN, Completely monotone families of solutions of  $n$ -th order linear differential equations and infinitely divisible distributions, *Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, serie IV III* (1976), 2, 267–287.
- [JPY] M. JEANBLANC, J. PITMAN, M. YOR, Self similar processes with independent increments associated with Lévy and Bessel Processes, *Stoch. Proc. Appl.*, 100 (2002), 188–223.
- [JV] Z.J. JUREK, W. VERVAAT, An integral representation for self-decomposable Banach space valued random variables, *Zeit. Wahr. Verw. Gebiet*, 62 (1983), 247–262.
- [Kh] A.Ya. KHINTCHINE, *Limit for Sums of independent Random variables*, Moscow and Lex, 1938.
- [Leb] N.N. LEBEDEV, *Special functions and their applications*, Dover Pub. Inc., 1972.
- [LeG] J.F. LE GALL, *Spatial Branching Processes, Random Snakes and Partial Differential Equations*, *Lecture Notes in Math.*, ETH Zürich, Birkhäuser, 1997.
- [Let] G. LETAC, A characterization of the Gamma distribution, *Adv. App. Prob.*, 17 (1985), 911–912.
- [LH] G.D. LIN, C.Y. HU, The Riemann zeta distribution, *Bernoulli*, 7 (2001), 817–828.
- [Lu1] E. LUKACS, *Characteristic functions*, 2<sup>nd</sup> ed., Griffin, London, 1970.
- [Lu2] E. LUKACS, Contribution to a problem of D. Van Dantzig, *Th. Prob. Appl*, XIII, (1968), n° 1, 116–127.
- [MNY] H. MATSUMOTO, L. NGUYEN-NGOC, M. YOR, Subordinators related to the exponential functionals of Brownian bridges and explicit formulae for the semigroups of hyperbolic Brownian motions, in *Proceedings École d’Hiver de Siegmundsborg, ‘Stochastic Processes and Related Topics’* (éd. H. Engelbert, R. Buckdahn, M. Yor), Taylor and Francis, 2000.
- [MSW] M. MAEJIMA, K. SATO, T. WATANABE, Completely operator self-decomposable distributions, *Tokyo J. Math.*, 23 (2000), 235–253.
- [Mu] R.J. MUIRHEAD, *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, *Wiley Series in Prob. and Math. Stat.*, 1982.
- [Pa] S.J. PATTERSON, *An introduction to the theory of the Riemann Zeta Function*, Cambridge University Press, 1988.
- [Ri] B. RIEMANN, Über die Anzahl der Primzahlen unter eine gegebner Grösse, *Monatsber. Akad. Berlin* (1859), 671–680.
- [RVY] B. ROYNETTE, P. VALLOIS, M. YOR, Limiting laws associated with brownian motion perturbed by normalized exponential weights, *Studia Math. Hung.* (à paraître), 2005.
- [RY] D. REVUZ, M. YOR, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, *Gründ. der Math. Wissenschaft*, 3<sup>e</sup> éd., Springer Verlag, Basel, 1999.

- [Sa1] K. SATO, Lévy processes and infinitely divisible distributions, Cambridge Univ. Press., 1999 (transl. from the 1990 Japanese original, revised by the author).
- [Sa2] K. SATO, Self similar processes with independent increments, Prob. Th. Rel. Fields, 89 (1991), 285–300.
- [Sch] I.J. SCHOENBERG, On Polya Frequency Functions I, J. Anal. Math., 1 (1951), 331–374.
- [Va] G. VALIRON, Théorie des fonctions, 2<sup>e</sup> éd., Masson, 1955.
- [Yo1] M. YOR, Some aspects of Brownian Motion II, Some recent Martingales problems, Lecture Notes in Math., ETZ Zürich, Birkhäuser, 1997.
- [Yo2] YOR, M., Exponential functionals of Brownian Motion and Related Processes, Springer Finance, 2001.
- [Yo3] YOR, M., Loi de l'indice du lacet brownien et distribution de Hartman Watson, Zeitschrift für Wahr. und Verw. Gebiete, 53 (1980), 71–95.
- [WW] E.T. WHITTAKER, G.N. WATSON, A course of Modern Analysis, 4<sup>e</sup> éd., Cambridge University Press, 1927.
- [Zo] V.M. ZOLOTAREV, One dimensional Stable Distributions, Translations of Math. Monographs 65, Amer. Math. Soc., 1986.

Manuscrit reçu le 4 mars 2004,  
accepté le 21 septembre 2004.

Bernard ROYNETTE,  
Institut Élie Cartan  
Département de Mathématiques  
BP 239  
54506 Vandœuvre Les Nancy Cedex (France)  
roynette@iecn.u-nancy.fr

Marc YOR,  
Université Paris VI  
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires  
Tour 56, 3<sup>e</sup> étage, Case 188  
75252 Paris Cedex 05 (France)  
deaproba@proba.jussieu.fr

