

logoAIF.pdf

# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Michel RAIBAUT

**Fibre de Milnor motivique à l'infini et composition avec un polynôme non dégénéré**

Tome 62, n° 5 (2012), p. 1943-1981.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2012\\_\\_62\\_5\\_1943\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2012__62_5_1943_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

logocedram.pdf

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

## FIBRE DE MILNOR MOTIVIQUE À L'INFINI ET COMPOSITION AVEC UN POLYNÔME NON DÉGÉNÉRÉ

par Michel RAIBAUT (\*)

---

RÉSUMÉ. — Soit  $k$  un corps de caractéristique nulle,  $P$  un polynôme de Laurent en  $d$  variables, à coefficients dans  $k$  et non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini. Soit  $d$  fonctions non constantes  $f_l$  à variables séparées et définies sur des variétés lisses. A la manière de Guibert, Loeser et Merle, dans le cas local, nous calculons dans cet article, la fibre de Milnor motivique à l'infini de la composée  $P(f)$  en termes du polyèdre de Newton à l'infini de  $P$ . Pour  $P$  égal à la somme  $x_1 + x_2$  nous obtenons une formule du type Thom-Sébastiani. Ceci permet d'introduire une notion de cycles évanescents motiviques d'une fonction  $g$  pour la valeur infinie notée  $S_{g,\infty,U}^\Phi$ , qui vérifie comme dans le cas local une formule de convolution. En particulier si  $g$  est le polynôme  $x_1 + \dots + x_n + 1/x_1 \dots x_n$ , nous montrons que le spectre de  $S_{g,\infty,U}^\Phi$  vaut  $1 + t + \dots + t^n$  ce qui coïncide avec le spectre à l'infini de  $g$  considéré par Douai et Sabbah.

ABSTRACT. — Let  $k$  be a field of characteristic zero and  $P$  be a Laurent polynomial in  $d$  variables, with coefficients in  $k$  and non degenerate for its Newton polyhedron at infinity. Let  $(f_l)$  be  $d$  non constant functions with separated variables and defined on smooth varieties. As Guibert, Loeser and Merle in the local case, we compute in this article the motivic Milnor fiber at infinity of  $P(f)$  in terms of the Newton polyhedron at infinity of  $P$ . For  $P$  equal to the sum  $x_1 + x_2$ , we obtained a Thom-Sebastiani formula. Then we can introduce a notion of motivic vanishing cycles of a function  $g$  for the infinite value denoted by  $S_{g,\infty,U}^\Phi$ , and which verified, as in the local case, a convolution formula. In particular if  $g$  is the polynomial  $x_1 + \dots + x_n + 1/x_1 \dots x_n$ , we show that the spectrum  $S_{g,\infty,U}^\Phi$  is  $1 + t + \dots + t^n$  which coincides with the spectrum at infinity of  $g$  considered by Douai and Sabbah.

---

Mots-clés : Géométrie Algébrique, Singularités à l'infini, Fibre de Milnor, Intégration motivique, Fibre de Milnor motivique, Thom-Sébastiani, Cycles proches.

Classification math. : 14-99, 14J17, 14B05.

(\*) Ce travail a bénéficié d'une aide des Agence Nationales de la Recherche portant les références ANR-08-JCJC-0118-0, et ANR-06-BLAN-0183, d'une aide du Projet de Recherche G.0318.06N de la Fondation de Recherche - Flandre (FWO) et d'une aide du projet ERC Advanced Grant NMNAG..

## Introduction

Soit  $U$  une variété algébrique complexe lisse et  $f : U \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$  une application régulière non constante. Il existe  $R > 0$  tel que la restriction de  $f$  de  $U \setminus f^{-1}(\overline{D}(0, R))$  vers  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \overline{D}(0, R)$  est une fibration topologique localement triviale [17]. La fibre et la monodromie de cette fibration sont appelées *fibre de Milnor à l'infini* et *monodromie à l'infini de  $f$* . Les espaces de cohomologie à support compact  $H_c^*(f^{-1}(t), \mathbb{Q})$  de la fibre en  $t$  sont munis d'une structure de Hodge mixte naturelle [2]. Steenbrink et Zucker [23] puis M. Saito [22] ont montré comment construire une structure de Hodge mixte limite lorsque  $t$  tend vers l'infini. Sabbah [21] l'a retrouvée en considérant la transformation de Fourier sur des modules convenables sur l'anneau des opérateurs différentiels. Cette structure de Hodge mixte est appelée *structure de Hodge mixte de la fibre de Milnor de  $f$  à l'infini*.

Dans [18], [20] et [19], grâce à l'intégration motivique, nous définissons  $S_{f, \infty}$ , la *fibre de Milnor motivique de  $f$  à l'infini*. Cet invariant de  $f$ , est construit à l'aide d'une compactification mais n'en dépend pas. Il se réalise par exemple en la classe de la structure de Hodge mixte de la fibre de Milnor à l'infini dans le groupe de Grothendieck des structures de Hodge munies d'un endomorphisme quasi-unipotent. Pour d'autres propriétés de cet objet on pourra se référer aux travaux de Kiyoshi Takeuchi et Yutaka Matsui [16] et [15].

Soit  $k$  un corps de caractéristique 0. Considérons  $d$  variétés sur  $k$  lisses  $(\mathcal{U}_l)$ ,  $d$  morphismes non constants  $f_l$  de  $\mathcal{U}_l$  vers  $\mathbb{A}_k^1$  et  $P$  un polynôme de Laurent en  $d$  variables non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini. A la manière de Guibert, Loeser et Merle [9], nous calculons dans cet article, la fibre de Milnor motivique à l'infini de la composée  $P(f_1, \dots, f_d)$  en termes du polyèdre de Newton à l'infini de  $P$ . Si les fonctions  $f_i$  sont les coordonnées de l'espace affine  $\mathbb{A}_k^d$ , la formule alors obtenue coïncide avec l'expression de la fibre de Milnor motivique à l'infini d'un polynôme non dégénéré pour son polyèdre de Newton [20, théorème 3.3]. Pour  $P$  égal à la somme  $x_1 + x_2$  nous obtenons une formule du type Thom-Sébastieni. Ceci permet d'introduire une notion de *cycles évanescents motiviques de  $f$  pour la valeur infini* notée  $S_{f, \infty, U}^{\Phi}$ , qui vérifie comme dans le cas local une formule de convolution. En particulier si  $f$  est le polynôme  $x_1 + \dots + x_n + 1/x_1 \dots x_n$ , nous montrons que le spectre de  $S_{f, \infty, U}^{\Phi}$  vaut  $1 + t + \dots + t^n$  ce qui coïncide avec le spectre à l'infini de  $f$  considéré par Douai et Sabbah [5], [6]

L'auteur tient à remercier les professeurs Johannes Nicaise et Wim Veys pour leur invitation pendant l'automne 2010 au département de mathématiques de l'université de Leuven où cet article a été rédigé.

L'auteur tient particulièrement à remercier Michel Merle, pour l'avoir intéressé à ces questions, pour ses conseils et enfin pour toute l'attention qu'il a portée à ce travail au cours de sa réalisation.

### 1. Notations

Dans cette partie nous rappelons quelques définitions et propriétés constamment utilisées par la suite, on pourra se référer à [4], [13], [14], [10] et [9].

#### 1.1. Anneaux de Grothendieck

*1.1.1. Variétés.* Dans tout ce qui suit,  $k$  est un corps de caractéristique 0 et  $\mathbb{G}_m$  est son groupe multiplicatif. On appelle  $k$ -variété, un schéma séparé réduit de type fini sur  $k$ . Si  $X$  est un schéma, on notera  $|X|$  ou  $X_{red}$  le schéma réduit associé. On note  $Var_k$  la catégorie des  $k$ -variétés et pour une  $k$ -variété  $S$  on note  $Var_S$  la catégorie des  $S$ -variétés, c'est à dire des morphismes  $X \rightarrow S$ . Soit  $G$  un groupe algébrique, et  $X$  une variété sur laquelle  $G$  agit. L'action est dite *bonne*, si toute  $G$ -orbite est contenue dans un ouvert affine de  $X$ .

Soit  $X$  une variété sur  $k$ , et  $p : A \rightarrow X$  un fibré affine pour la topologie de Zariski. Les fibres de  $p$  sont des espaces affines et les morphismes de transition entre les cartes sont des applications affines. Soit  $G$  un groupe algébrique linéaire. Une bonne action de  $G$  sur  $A$  est dite *affine* si et seulement si elle relève une bonne action de  $G$  sur  $X$  et sa restriction à toutes les fibres est affine. Dans toute la suite nous supposons les actions bonnes.

*1.1.2. Anneaux de Grothendieck.* Soit  $S$  une  $k$ -variété. On considère une  $S$ -variété  $X$  munie d'une bonne action de  $\mathbb{G}_m$  notée  $\sigma$ . On dit qu'un morphisme  $\pi : X \rightarrow \mathbb{G}_m$  est *homogène* de poids  $n$ , si  $\pi(\sigma(\lambda, x))$  est égal à  $\lambda^n \pi(x)$  pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{G}_m$  et pour tout  $x$  dans  $X$ . Pour un entier  $n$  strictement positif, on note  $Var_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n}$  la catégorie des variétés  $X \rightarrow S \times \mathbb{G}_m$  munies d'une bonne action de  $\mathbb{G}_m$ , telle que les fibres de la projection sur  $S$  soient  $\mathbb{G}_m$ -invariantes et la projection sur  $\mathbb{G}_m$  soit homogène de poids  $n$ .

DÉFINITION 1.1. — Pour tout entier  $n$  strictement positif, l'anneau de Grothendieck noté  $K_0(\text{Var}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n})$  est défini dans [10] comme le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes des variétés relatives  $X \rightarrow S \times \mathbb{G}_m$  de la catégorie  $\text{Var}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n}$ , modulo les relations :

(1)

$$[X \rightarrow S \times \mathbb{G}_m, \sigma] = [X' \rightarrow S \times \mathbb{G}_m, \sigma] + [X \setminus X' \rightarrow S \times \mathbb{G}_m, \sigma]$$

pour  $X'$  un fermé de  $X$  invariant sous  $\mathbb{G}_m$

(2)

$$[X \times \mathbb{A}_k^n \rightarrow S \times \mathbb{G}_m, \sigma] = [X \times \mathbb{A}_k^n \rightarrow S \times \mathbb{G}_m, \sigma']$$

lorsque  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux actions qui relèvent la même  $\mathbb{G}_m$ -action sur  $X$  en actions affines sur le fibré,

(3)

$$[X \rightarrow S \times \mathbb{G}_m, \sigma] = [X \rightarrow S \times \mathbb{G}_m, \sigma_l]$$

où  $\sigma_l(\lambda, x)$  est égal à  $\sigma(\lambda^l, x)$  pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{G}_m$  et pour tout  $x$  dans  $X$ , ceci pour tout entier  $l$  strictement positif et pour toute action  $\sigma$  de  $\mathbb{G}_m$  sur une variété  $X$ .

Pour tout entier  $n$  strictement positif, le produit fibré au dessus de  $S \times \mathbb{G}_m$  muni de l'action diagonale, induit naturellement un produit dans la catégorie  $\text{Var}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n}$  et une structure d'anneau sur le groupe  $K_0(\text{Var}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n})$ . L'élément unité pour le produit, noté  $1_{S \times \mathbb{G}_m}$ , est la classe du morphisme identité sur  $S \times \mathbb{G}_m$  où  $\mathbb{G}_m$  agit trivialement sur  $S$  et par translation sur lui même. En particulier, l'anneau  $K_0(\text{Var}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n})$  a une structure de  $K_0(\text{Var}_k)$ -module.

1.1.3. *Localisation.* Pour tout entier  $n$  strictement positif, dans l'anneau  $K_0(\text{Var}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n})$  on note  $\mathbb{L}$  la classe  $[\mathbb{A}_k^1 \times S \times \mathbb{G}_m, \pi_{S \times \mathbb{G}_m}, \tau_n]$  où  $\pi_{S \times \mathbb{G}_m}$  est la projection sur  $S \times \mathbb{G}_m$  et  $\tau_n(\lambda, (a, x, \mu))$  est égal à  $(a, x, \lambda^n \mu)$ , pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{G}_m$  et  $(a, x, \mu)$  dans  $\mathbb{A}_k^1 \times S \times \mathbb{G}_m$ . On note alors  $\mathcal{M}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n}$  l'anneau localisé  $K_0(\text{Var}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n})[\mathbb{L}^{-1}]$ .

1.1.4. *Image directe, image inverse.* Soit  $f : S \rightarrow S'$  un morphisme de variétés. La composition par  $f$  fournit le morphisme de groupes image directe  $f_! : \mathcal{M}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n} \rightarrow \mathcal{M}_{S' \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n}$ . Le produit fibré au dessus de  $S'$  fournit le morphisme d'anneaux image inverse  $f^{-1} : \mathcal{M}_{S' \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n} \rightarrow \mathcal{M}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n}$ . On peut définir ces morphismes au niveau du  $K_0$ .

1.1.5. *Limite inductive.* Les catégories  $Var_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n}$  et les anneaux  $K_0(Var_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n})$  et  $\mathcal{M}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, n}$  forment un système inductif induit par l'ordre partiel donné par la divisibilité entre les entiers. On note alors  $Var_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ ,  $K_0(Var_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m})$  et  $\mathcal{M}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$  les colimites.

1.1.6. *Séries rationnelles.* Soit  $A$  l'un des anneaux  $\mathbb{Z}[\mathbb{L}, \mathbb{L}^{-1}]$ ,  $\mathbb{Z}[\mathbb{L}, \mathbb{L}^{-1}, (1/(1 - \mathbb{L}^{-i}))_{i>0}]$  et  $\mathcal{M}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ . On note  $A[[T]]_{sr}$  le sous  $A$ -module de  $A[[T]]$  engendré par 1 et par un produit fini de termes  $\mathbb{L}^e T^i / (1 - \mathbb{L}^e T^i)$  notés  $p_{e,i}(T)$  avec  $e$  dans  $\mathbb{Z}$  et  $i$  dans  $\mathbb{N}_{>0}$ . Il existe un unique morphisme  $A$ -linéaire  $\lim_{T \rightarrow \infty} : A[[T]]_{sr} \rightarrow A$  tel que pour toute famille  $(e_i, j_i)_{i \in I}$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$  avec  $I$  fini ou vide,  $\lim_{T \rightarrow \infty} (\prod_{i \in I} p_{e_i, j_i}(T))$  vaut  $(-1)^{|I|}$ .

1.1.7. *Cône convexe polyédral.* Soit  $I$  un ensemble fini. Un cône convexe polyédral rationnel de  $\mathbb{R}^{*|I|}$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^{*|I|}$  définie par un nombre fini d'inégalités linéaires à coefficients entiers du type  $a \leq 0$  et  $b > 0$  et stable sous la multiplication de  $\mathbb{R}_{>0}$ .

1.1.8. *Lemme de rationalité.* Le lemme suivant est bien connu, on peut se référer à [8, 2.1.5] et [10, 2.9].

LEMME 1.2. — *Soit  $I$  un ensemble fini. Soit  $\Delta$  un cône polyédral rationnel convexe dans  $\mathbb{R}_{>0}^I$ . On note  $\overline{\Delta}$  l'adhérence de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}_{\geq 0}^I$ . Soit  $l$  et  $\nu$  deux formes linéaires sur  $\mathbb{Z}^I$ , supposons  $l$  strictement positive et  $\nu$  positive sur  $\overline{\Delta} \setminus \{0\}$ . Dans l'anneau  $\mathbb{Z}[\mathbb{L}, \mathbb{L}^{-1}][[T]]$  notons  $S_{\Delta, l, \nu}(T)$  les séries  $\sum_{k \in \Delta \cap \mathbb{N}_{>0}^I} T^{l(k)} \mathbb{L}^{-\nu(k)}$ . Lorsque  $\Delta$  est ouvert dans son propre espace vectoriel engendré et  $\overline{\Delta}$  est engendré par une famille de vecteurs que l'on peut compléter en une  $\mathbb{Z}$ -base du  $\mathbb{Z}$ -module  $\mathbb{Z}^I$ , les séries  $S_{\Delta, l, \nu}(T)$  sont rationnelles et leur limite  $\lim_{T \rightarrow \infty} S_{\Delta, l, \nu}(T)$  est égale à  $(-1)^{\dim(\Delta)}$ . Dans le cas général, par additivité par rapport à l'union disjointe des cônes, grâce à l'hypothèse de positivité, les séries  $S_{\Delta, l, \nu}(T)$  sont rationnelles et leur limite est égale à la caractéristique d'Euler à support compact du cône  $\Delta$ .*

Notons que dans [10, 2.9], les formes linéaires  $l$  et  $\nu$  sont supposées strictement positives sur  $\overline{\Delta} \setminus \{0\}$ , mais la même preuve permet de supposer seulement  $l$  strictement positive sur  $\overline{\Delta} \setminus \{0\}$ .

### 1.2. Résolutions

Soit  $X$  une variété lisse de dimension pure  $d$ , et soit  $Z$  une partie fermée de  $X$  de codimension partout plus grande que 1. Une *log-résolution* du couple  $(X, Z)$  est un morphisme propre  $h : Y \rightarrow X$  avec  $Y$  lisse tel que

la restriction  $h : Y \setminus h^{-1}(Z) \rightarrow X \setminus Z$  est un isomorphisme et  $h^{-1}(Z)$  est un diviseur à croisements normaux. Nous supposons toujours que les composantes irréductibles du diviseur sont lisses. L'existence d'une log-résolution est due à Hironaka [11].

*1.2.1. Stratification du diviseur exceptionnel.* On note  $(E_i)_{i \in A}$  les composantes irréductibles du diviseur  $h^{-1}(Z)$ . Pour  $I$  une partie de  $A$ , on note  $E_I$  l'intersection  $\cap_{i \in I} E_i$  et  $E_I^0$  le constructible  $\cap_{i \in I} E_i \setminus \cup_{j \notin I} E_j$ .

*1.2.2. Diviseurs.* Si  $\mathcal{I}$  est un faisceau d'idéaux définissant un sous schéma fermé  $Z$ , et  $h^{-1}(\mathcal{I})\mathcal{O}_Y$  est localement principal, on définit alors la multiplicité de  $\mathcal{I}$  le long de  $E_i$ , notée  $N_i(\mathcal{I})$ , par l'égalité des diviseurs

$$h^{-1}(Z) = \sum_{i \in A} N_i(\mathcal{I})E_i.$$

Si  $\mathcal{I}$  est un faisceau d'idéaux principaux engendré par une fonction  $g$ , on écrira  $N_i(g)$  à la place de  $N_i(\mathcal{I})$ . De la même manière on définit les  $\nu_i$  par l'égalité

$$\operatorname{div} \operatorname{Jac} h = \sum_{i \in A} (\nu_i - 1)E_i$$

où  $\operatorname{Jac} h$  est le diviseur de l'idéal jacobien de  $h$ .

*1.2.3.  $U_I$ .* Pour tout  $i$  dans  $A$ , on note  $\nu_{E_i}$  le fibré normal de  $E_i$  dans  $Y$  et  $U_{E_i}$  le complémentaire de la section nulle dans le fibré  $\nu_{E_i}$ . Pour  $I$  une partie de  $A$  non vide, telle que  $E_I$  soit non vide, on note  $\nu_I$  le produit fibré des restrictions à  $E_I$  des fibrés  $\nu_{E_i}$  où  $i$  appartient à  $I$ ,  $U_I$  le produit fibré des restrictions à  $E_I^0$  des fibrés  $U_{E_i}$  pour  $i$  dans  $I$  et  $\pi_I$  la projection canonique des deux fibrés sur leur base.

*1.2.4.* Soit  $X$  une variété lisse de dimension pure  $d$  et  $f$  un morphisme défini sur  $X$ . On suppose la fibre spéciale  $f^{-1}(0)$  nulle part dense dans  $X$  et on la note  $X_0(f)$ . Soit  $F$  un diviseur réduit contenant  $X_0(f)$ , et  $h : Y \rightarrow X$  une log-résolution de  $(X, F)$ . On note  $E$  le diviseur exceptionnel,  $A$  l'ensemble indiquant les composantes irréductibles  $E_i$  de  $E$  et  $N_i(f)$  les multiplicités du diviseur  $\operatorname{div}(f \circ h)$ . Fixons une partie non vide  $I$  de  $A$  telle qu'il existe  $i$  dans  $I$  avec  $N_i(f)$  strictement positif,  $h(E_I^0)$  est alors contenu dans  $X_0(f)$ . En suivant [10, 3.4, 3.5] et [9, 2.6], nous montrons ici comment munir  $U_I$  d'une flèche  $f_I$  vers  $\mathbb{G}_m$  et d'une action  $\sigma$  de  $\mathbb{G}_m$  telles que l'objet  $(U_I, (h \circ \pi_I, f_I), \sigma_I)$  appartienne à  $\operatorname{Var}_{X_0(f) \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ .

Le groupe  $\mathbb{G}_m$  agit naturellement sur chaque  $U_{E_i}$ , l'action diagonale induit alors une  $\mathbb{G}_m$ -action  $\sigma$  sur  $U_I$ . Le morphisme  $f_I$  peut être défini à l'aide

de la déformation au cône normal de  $E_I$  dans  $Y$  [7]. On considère l'espace affine  $\mathbb{A}_k^{|I|}$  égal à  $\text{Spec } k[(u_i)_{i \in I}]$  et le sous-faisceau de  $\mathcal{O}_{Y \times \mathbb{A}_k^{|I|}}[(u_i^{-1})_{i \in I}]$

$$\mathcal{A}_I := \sum_{n \in \mathbb{N}^{|I|}} \mathcal{O}_{Y \times \mathbb{A}_k^{|I|}} \left( - \sum_{i \in I} n_i (E_i \times \mathbb{A}_k^{|I|}) \right) \prod_{i \in I} u_i^{-n_i}.$$

On note  $CY_I$  le spectre  $\text{Spec } \mathcal{A}_I$ . L'inclusion naturelle de  $\mathcal{O}_{Y \times \mathbb{A}_k^{|I|}}$  dans  $\mathcal{A}_I$  induit un morphisme  $\pi : CY_I \rightarrow Y \times \mathbb{A}_k^{|I|}$  et donc par composition avec la projection, un morphisme  $p : CY_I \rightarrow \mathbb{A}_k^{|I|}$ . L'anneau  $\mathcal{A}_I$  étant un sous anneau gradué de l'anneau  $\mathcal{O}_Y[(u_i, u_i^{-1})_{i \in I}]$ , on considère l'action  $\sigma_I$  de  $\mathbb{G}_m^I$  sur  $CY_I$  laissant invariante les sections de  $\mathcal{O}_Y$  et agissant par  $(\lambda_i, u_i) \mapsto \lambda_i^{-1} u_i$ .

On dispose alors du lemme [10, 3.5, Lemme 5.12] :

LEMME 1.3. — *Le fibré  $\nu_{E_I}$  est lisse et s'identifie de manière équivariante avec la fibre  $p^{-1}(0)$ . L'image de la fonction  $f \circ h$  par l'inclusion de  $\mathcal{O}_{Y \times \mathbb{A}_k^{|I|}}$  dans  $\mathcal{A}_I$  est divisible par  $\prod_{i \in I} u_i^{N_i(f)}$ . On note  $\tilde{f}_I$  le quotient dans  $\mathcal{A}_I$ . La restriction de  $\tilde{f}_I$  à la fibre  $p^{-1}(0)$  est l'application  $f_I$  cherchée. Cette fonction ne s'annule pas sur  $U_I$  et induit un morphisme monomial lisse  $f_I : U_I \rightarrow \mathbb{G}_m$ .*

### 1.3. Arcs

1.3.1. *Espaces d'arcs.* Soit  $X$  une  $k$ -variété. On note  $\mathcal{L}_n(X)$  l'espace des  $n$ -jets. Cet ensemble est un  $k$ -schéma dont les  $K$ -points rationnels, sont les morphismes  $\text{Spec } K[t]/t^{n+1} \rightarrow X$ , pour tout corps  $K$  contenant  $k$ . Il existe des morphismes canoniques  $\mathcal{L}_{n+1}(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(X)$ . Ces morphismes sont des fibrés en  $\mathbb{A}_k^d$  quand  $X$  est lisse de dimension pure  $d$ . L'espace des arcs noté  $\mathcal{L}(X)$  est la limite projective de ce système. On note  $\pi_n : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}_n(X)$  les morphismes canoniques.

1.3.2. *Action et coefficient angulaire.* Le groupe  $\mathbb{G}_m$  agit canoniquement sur  $\mathcal{L}_n(X)$  et sur  $\mathcal{L}(X)$  par  $\lambda \cdot \varphi(t) := \varphi(\lambda t)$ . Dans toute la suite de l'article on note  $\sigma$  cette action.

Pour un élément  $\varphi$  de  $K[[t]]$  ou de  $K[t]/t^{n+1}$ , on désigne par  $\text{ord}_t(\varphi)$  la valuation de  $\varphi$  et par  $\text{ac}(\varphi)$  son premier coefficient non nul. Par convention  $\text{ac}(0)$  est nul. Le scalaire  $\text{ac}(\varphi)$  est appelé coefficient angulaire de  $\varphi$ .



1.3.3. *Ordre de contact.* Soit  $X$  une variété et  $F$  un fermé de  $X$ . On note  $\mathcal{I}_F$  l'idéal des fonctions s'annulant sur  $F$ . On désigne par  $\text{ord}_t F$  la fonction qui à tout arc  $\varphi$  dans  $\mathcal{L}(X)$  associe la borne inférieure  $\inf \text{ord}_t g(\varphi)$  où  $g$  parcourt les sections locales de  $\mathcal{I}_F$  en l'origine de  $\varphi$ .

1.3.4. *Un lemme de réécriture.* Par la suite nous utiliserons le lemme [3, 4.2] qui découle du lemme de Hensel.

LEMME 1.4. — Soit  $X$  une variété lisse de dimension  $d$ ,  $U$  un ouvert affine de  $X$  et une application étale  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{A}^d$ . Dans la catégorie  $\text{Var}_k$ , pour tout entier  $n$ ,  $\Phi$  induit l'isomorphisme  $\Psi_n : \mathcal{L}_n(U) \rightarrow U \times_{\mathbb{A}^d} \mathcal{L}_n(\mathbb{A}^d)$  qui associe à un  $n$ -jet  $\varphi$  le couple  $(\varphi(0), \Phi \circ \varphi)$  où  $U \times_{\mathbb{A}^d} \mathcal{L}_n(\mathbb{A}^d)$  est le produit fibré de  $\Phi$  et de l'application "origine des arcs". Ceci induit par limite inductive un isomorphisme  $\Psi : \mathcal{L}(U) \rightarrow U \times_{\mathbb{A}^d} \mathcal{L}(\mathbb{A}^d)$  qui associe à un arc  $\varphi$  le couple  $(\varphi(0), \Phi \circ \varphi)$ .

## 1.4. Le morphisme fibre de Milnor motivique

Considérons  $X$  une variété et un morphisme  $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ . Grâce au théorème de factorisation faible, Bittner [1] étend la fibre de Milnor motivique en un morphisme défini sur tout l'anneau de Grothendieck  $\mathcal{M}_X$ . Guibert, Loeser et Merle [10] donnent une construction différente basée sur l'intégration motivique. Nous l'expliquons ci-dessous et nous l'utiliserons par la suite.

DÉFINITION 1.5. — Pour une variété  $X$  lisse de dimension  $d$ ,  $U$  un ouvert partout dense de  $X$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  un morphisme, on considère pour deux entiers  $n$  et  $\delta$  strictement positifs, l'espace d'arcs

$$\mathcal{X}_n^\delta(f) := \{\varphi \in \mathcal{L}(X) \mid \text{ord}_t f(\varphi) = n, \text{ord}_t F \cdot \varphi \leq n\delta\}$$

muni de la flèche "origine, coefficient angulaire" notée  $(\pi_0, \text{ac}(f))$  vers  $X_0(f) \times \mathbb{G}_m$  et de l'action standard de  $\mathbb{G}_m$  sur les arcs. On considère alors la fonction zêta modifiée

$$Z_{f,U}^\delta(T) := \sum_{n \geq 1} \mu(\mathcal{X}_n^\delta(f)) T^n \in \mathcal{M}_{X_0(f) \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}[[T]].$$

On dispose du théorème de rationalité à la Denef-Loeser démontré en [10, 3.8]

PROPOSITION 1.6. — Soit  $U$  un ouvert dense d'une variété  $X$  lisse et de dimension pure  $d$ . Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  un morphisme. Il existe un entier

$\delta_0$  tel que pour tout entier  $\delta$  supérieur à  $\delta_0$ , les séries  $Z_{f,U}^\delta(T)$  sont rationnelles et leur limite est indépendante de  $\delta$ . On désignera par  $\mathcal{S}_{f,U}$  la limite  $-\lim_{T \rightarrow \infty} Z_{f,U}^\delta(T)$ . De plus si  $X_0(f)$  est nulle part dense dans  $X$ , et  $h : Y \rightarrow X$  est une log-résolution de  $(X, F \cup X_0(f))$  on dispose d'une formule d'image directe

$$\mathcal{S}_{f,U} = - \sum_{\substack{I \neq \emptyset \\ I \subset C}} (-1)^{|I|} [U_I] = h_!(\mathcal{S}_{f \circ h, h^{-1}(U)}) \in \mathcal{M}_{X_0(f) \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}.$$

où  $C$  est l'ensemble  $\{i \in A \mid N_i(t) \neq 0\}$ .

Bittner, puis Guibert, Loeser et Merle prouvent alors le théorème d'extension à tout le groupe de Grothendieck ([1], [10, 3.9]) :

**THÉORÈME 1.7.** — Soit  $X$  une variété et  $f : X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  un morphisme. Il existe un unique morphisme de groupe  $\mathcal{M}_k$ -linéaire  $\mathcal{S}_f : \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_{X_0(f) \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$  tel que pour tout morphisme propre  $p : Z \rightarrow X$  avec  $Z$  lisse, et pour toute partie  $U$  ouverte et dense dans  $Z$ ,  $\mathcal{S}_f([p : U \rightarrow X])$  vaut  $p_!(\mathcal{S}_{f \circ p, U})$ .

### 1.5. Convolution

Nous suivons dans ce paragraphe [10, partie 5] et [9, partie 3].

**DÉFINITION 1.8.** — Fixons  $X$  une variété,  $n$  et  $m$  deux entiers strictement positifs et considérons la catégorie  $Var_{X \times \mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^2, (n,m)}$ . Ses objets sont de la forme  $(A, (f, a, b), \alpha)$  où  $\alpha$  est une bonne action de  $\mathbb{G}_m^2$  sur la variété  $A$ ,  $(a, b)$  est un morphisme  $(n, m)$ -monomial tel que  $(a, b)(\alpha((\lambda, \mu), x))$  est égal à  $(\lambda^n a(x), \mu^m b(x))$  pour tout  $x$  appartenant à  $A$  et pour tout  $(\lambda, \mu)$  appartenant à  $\mathbb{G}_m^2$  et  $f$  est un morphisme dont les fibres sont stables sous  $\alpha$ . On note  $K_0(Var_{X \times \mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^2, (n,m)})$  son groupe de Grothendieck défini comme en 1.1.2. On note  $\mathbb{L}$  la classe  $[\mathbb{A}^1 \times X \times \mathbb{G}_m^2, pr_{X \times \mathbb{G}_m^2}, \tau_{n,m}]$  où  $\tau_{n,m}$  est la translation définie par  $\tau_{n,m}(\lambda, (x, a, b))$  égal à  $(x, \lambda^n a, \mu^m b)$ .

**DÉFINITION 1.9.** — On considère le morphisme  $\mathcal{M}_k$ -linéaire de groupes

$$\Psi_\Sigma^{n,m} : \mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^2, (n,m)} \rightarrow \mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m, nm}$$

défini par

$$\begin{aligned} & \Psi_\Sigma^{n,m}([(A, (f, a, b), \alpha)]) \\ &= -[a+b \neq 0, (f, a+b), \alpha \circ (\cdot^m, \cdot^n)] + [(a+b = 0) \times \mathbb{G}_m, (f \circ pr_A, pr_2), \tau_{nm}] \end{aligned}$$

où " $a+b \neq 0$ " désigne  $(a+b)^{-1}(\mathbb{G}_m)$ , " $a+b = 0$ " désigne la fibre  $(a+b)^{-1}(0)$ ,  $\alpha \circ (\cdot^m, \cdot^n)$  est l'action de  $\mathbb{G}_m$  définie par  $(\lambda, x) \mapsto \alpha((\lambda^m, \lambda^n), x)$  et  $\tau_{nm}$  est la translation de poids  $nm$  définie par  $(\lambda, (x, \mu) \mapsto (x, \lambda^{mn}\mu)$ . On vérifie dans ces cas là que les morphismes sont bien  $nm$ -monomiaux.

PROPOSITION 1.10. — Comme en 1.1.5, avec des morphismes de transition du même type, les catégories  $Var_{X \times \mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^{2, (n,m)}}$  forment un système inductif et on note  $Var_{X \times \mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^2}$  la limite [10, 2.5]. Le morphisme précédent s'étend alors en un morphisme de groupes  $\mathcal{M}_k$ -linéaire

$$\Psi_\Sigma : \mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^2} \rightarrow \mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}.$$

DÉFINITION 1.11. — Considérons le morphisme canonique noté  $\boxtimes$  de  $\mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \times \mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$  vers  $\mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m^2}^{\mathbb{G}_m^2}$  qui envoie le couple formé de  $(A, a, \sigma_A)$  et  $(B, b, \sigma_B)$  sur  $(A \times_X B, (a, b), (\sigma_A, \sigma_B))$  où  $(\sigma_A, \sigma_B)$  est l'action produit. Le produit de convolution est alors défini par

$$\begin{aligned} * : \mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \times \mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} &\rightarrow \mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \\ (A, B) &\mapsto A * B = \Psi_\Sigma(A \boxtimes B). \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.12. — Le produit de convolution sur  $\mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$  est commutatif et associatif. L'élément neutre est la classe de l'identité de  $X \times \mathbb{G}_m$  muni de la translation  $\tau$  sur  $\mathbb{G}_m$ .

## 2. Calcul de la fibre de Milnor motivique à l'infini au dessus du tore

Soit  $k$  un corps de caractéristique 0. Nous noterons dans la suite  $\mathbb{A}^1$  au lieu de  $\mathbb{A}_k^1$ . Considérons  $d$  variétés algébriques lisses sur  $k$  notées  $(\mathcal{U}_i)$ ,  $d$  morphismes non constants  $f_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathbb{G}_m$  et  $P$  un polynôme de Laurent en  $d$  variables et à coefficients dans  $k$  notés  $(\alpha_d)_{d \in \mathbb{Z}}$ . Ce polynôme définit une fonction  $P : \mathbb{G}_m^d \rightarrow \mathbb{A}^1$ . Nous supposons  $P$  non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini  $\Gamma$ . Notons  $\mathcal{U}$  la variété  $\prod_{i=1}^d \mathcal{U}_i$ ,  $P(f)$  la fonction  $P(f_1, \dots, f_d)$  et  $\mathcal{U}^*$  l'ouvert  $\mathcal{U} \setminus P(f)^{-1}(0)$ . A la manière de Guibert, Loeser et Merle dans [9], nous calculons ici la fibre de Milnor motivique à l'infini de la composée  $P(f)$  en termes du polyèdre de Newton à l'infini de  $P$ . Lorsque les  $f_i$  sont les fonctions coordonnées de  $\mathbb{A}^d$ , nous retrouvons la formule [20, théorème 3.3].

### 2.1. Polyèdre de Newton à l'infini

Fixons  $d$  un entier strictement positif et  $P$  un polynôme de Laurent appartenant à l'anneau  $k[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_d, x_d^{-1}]$ . Nous noterons  $(\alpha_d)_{d \in \mathbb{Z}}$  ses coefficients. L'ensemble  $\{\underline{k} \in \mathbb{Z}^d \mid \alpha_{\underline{k}} \neq 0\}$  est appelé *support* de  $f$  et on le note  $\text{supp}(P)$ . L'enveloppe convexe de  $\text{supp}(P) \cup \{0\}$  notée  $\Gamma_-$  est un polyèdre que nous appelons *polyèdre de Newton à l'infini* de  $P$ . On note  $\Gamma$  les faces de  $\Gamma_-$  ne contenant pas l'origine.

Pour  $\gamma$  une face de  $\Gamma_-$  on note  $P_\gamma$  le polynôme  $\sum_{\underline{k} \in \gamma} \alpha_{\underline{k}} x^{\underline{k}}$ . Au sens de Kouchnirenko [12], on dit que le polynôme  $P$  est *non dégénéré* pour son polyèdre de Newton à l'infini, si pour toute face  $\gamma$  de  $\Gamma$  le polynôme  $P_\gamma$  est lisse sur  $\mathbb{G}_m^d$ . Nous supposons dans toute la suite que le polynôme de Laurent  $P$  est non dégénéré pour  $\Gamma$ .

Enfin pour toute face  $\gamma$  de  $\Gamma$ , on introduit la variété

$$X_\gamma(0) := \{x \in \mathbb{G}_m^d \mid P_\gamma(x) = 0\}.$$

### 2.2. Compactifications

On considère  $j : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  l'injection qui a un élément  $a$  associe  $[1 : a]$ . On désignera par  $\infty$  l'élément  $[0 : 1]$  et on notera par abus  $a$  l'élément  $[1 : a]$ .

2.2.1. *Compactification des  $f_l$* . Pour tout entier  $l$  dans  $\{1, \dots, d\}$ , soit  $(X_l, i_l, \hat{f}_l)$  une compactification du morphisme  $(\mathcal{U}_l, f_l)$  c'est à dire :  $X_l$  est une variété,  $i_l : \mathcal{U}_l \rightarrow X_l$  est une immersion ouverte dominante et  $\hat{f}_l : X_l \rightarrow \mathbb{P}^1$  est une application propre, telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{CD} U_l @>i_l>> X_l \\ @Vf_lVV @VV\hat{f}_lV \\ \mathbb{A}^1 @>j>> \mathbb{P}^1 \end{CD}$$

Désignons par  $F_l$ , le fermé à l'infini  $X_l \setminus i_l(\mathcal{U}_l)$  et par  $X_l^a$ , la fibre de  $\hat{f}_l$  en  $a$ , pour tout  $a$  dans  $\mathbb{P}^1$ . Notons enfin  $1/f_l$ , l'application régulière définie sur  $X_l \setminus X_l^0$  qui prolonge  $1/f_l$  et  $\hat{f}_l - a$ , l'application régulière définie sur  $X_l \setminus X_l^\infty$  qui prolonge  $f_l - a$  pour toute valeur  $a$  dans  $\mathbb{A}^1$ .

*Remarque 2.1.* — Les fibres  $X_l^\infty$  et  $X_l^0$  sont respectivement les zéros et les pôles de la fonction rationnelle  $1/\hat{f}_l$  définie sur  $X_l$ . Notons que le fermé à l'infini  $F_l$  contient  $X_l^\infty$  et  $X_l^0$ .

2.2.2. *Compactification de  $P(f)$ .* On désignera par  $X$  l'adhérence du graphe de  $P(f)$  dans la variété propre  $(\prod_{l=1}^d X_l) \times \mathbb{P}^1$ . On notera  $\widehat{P(f)}$  la restriction de la projection  $(\prod_{l=1}^d X_l) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  à  $X$  et  $i$  le plongement naturel de  $\mathcal{U}$  dans  $X$  :

$$\begin{aligned} i &: \mathcal{U} \rightarrow X \\ \underline{a_l} &\mapsto (\underline{i_l(a_l)}, [1 : P(f)(a_l)]) \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.2. — *Le triplet  $(X, i, \widehat{P(f)})$  est une compactification de  $(\mathcal{U}, P(f))$ .*

*Démonstration.* — La variété  $X$  est propre comme fermé contenu dans la variété propre  $(\prod_{l=1}^d X_l) \times \mathbb{P}^1$ . Par conséquent, la projection  $\widehat{P(f)}$  est propre. Les variables étant séparées, le produit  $i$  des immersions ouvertes  $i_l$  est une immersion ouverte dans le produit  $\prod_{l=1}^d X_l$ . L'ouvert  $i(\mathcal{U})$  est le produit des ouverts denses  $\prod_{l=1}^d i_l(\mathcal{U}_l)$ . Il est donc dense dans  $X$ . Enfin pour tout élément  $(u_l)$  du produit  $\prod_{l=1}^d \mathcal{U}_l$ , pour tout entier  $l$  de  $\{1, \dots, d\}$ , l'image  $\widehat{f}_l(i_l(u_l))$  vaut  $[1 : f_l(u_l)]$ . Ainsi  $\widehat{P(f)}(i(u_l))$  est égal à  $j(P(f))(u_l)$ .  $\square$

Notations 2.3. — On note  $F$  le fermé à l'infini  $X \setminus i(\mathcal{U})$ ,  $X_0$  la fibre de  $\widehat{P(f)}$  en zéro,  $X_\infty$  la fibre en la valeur infini,  $X^*$  l'ouvert  $X \setminus X_0$ ,  $F^*$  le constructible  $F \setminus X_0$  et  $1/\widehat{P(f)}$  l'application régulière définie sur  $X^*$  qui prolonge  $1/P(f)$ .

### 2.3. Fibre de Milnor motivique à l'infini de $P(f)$

2.3.1. *Espace d'arcs.* Soit  $\delta$  et  $n$  deux entiers strictement positifs, notons

$$\mathcal{X}_n^\delta := \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(X) \left| \begin{array}{l} \text{ord}_t F.\varphi \leq n\delta \\ \text{ord}_t 1/\widehat{P(f)}(\varphi(t)) = n \end{array} \right. \right\}.$$

Cet espace d'arcs est muni de  $\sigma$  l'action standard de  $\mathbb{G}_m$  sur les arcs et de la flèche  $(\pi_0, ac)$  vers  $X_\infty \times \mathbb{G}_m$ , qui à un arc  $\varphi$  associe son origine  $\varphi(0)$  et le coefficient angulaire  $ac(1/\widehat{P(f)}(\varphi))$ . Pour tout entier  $k$ , les tronqués  $(\pi_{n\delta+k}(\mathcal{X}_n^\delta), (\pi_0, ac), \sigma)$  appartiennent à  $Var_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ .

Cet espace d'arcs est mesurable, même si la compactification est singulière. L'ordre de contact des arcs avec le lieu singulier étant borné sa mesure appartient à l'anneau de Grothendieck  $\mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$  sans nécessité de complétion [3, lemme 4.1].

2.3.2. *Fonction zêta motivique et fibre de Milnor motivique à l'infini.*

DÉFINITION 2.4. — *Considérons la fonction zêta motivique à l'infini de  $P(f)$ ,*

$$Z_{1/\widehat{P(f)},i(U^*)}^\delta(T) = \sum_{n \geq 1} \mu(\mathcal{X}_n^\delta) T^n \in \mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}[[T]].$$

PROPOSITION 2.5. — *Il existe un entier  $\delta_0$ , tel que pour tout entier  $\delta$  supérieur à  $\delta_0$ , la fonction zêta modifiée  $Z_{1/\widehat{P(f)},i(U^*)}^\delta(T)$  est rationnelle et sa limite ne dépend pas de  $\delta$ . L'opposé de cette limite est*

$$S_{1/\widehat{P(f)}}([i : U^* \rightarrow X])$$

qui appartient à l'anneau  $\mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ .

Démonstration. — Cette proposition est une conséquence du théorème de rationalité (1.6) et du théorème d'extension (1.7). On pourra se référer à la preuve de [20, Proposition 2.3]. □

Dans notre contexte, rappelons la définition de la *fibre de Milnor motivique à l'infini*. On pourra se référer à la note [18] et au théorème [20, théorème 2.4]. Pour d'autres propriétés de cet objet on pourra se référer aux travaux en cours de Kiyoshi Takeuchi et Yutaka Matsui [16] et [15].

DÉFINITION 2.6. — *La fibre de Milnor motivique à l'infini de  $P(f)$ , notée  $S_{P(f),\infty}$ , est l'image directe  $\widehat{P(f)}_! S_{1/\widehat{P(f)},i(U^*)}$ . Elle appartient à l'anneau  $\mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$  et ne dépend pas des compactifications précédentes.*

Nous montrons dans cette partie le théorème

THÉORÈME 2.7. — *Pour une famille de fonctions  $f_l : \mathcal{U}_l \rightarrow \mathbb{G}_m$ , à source lisse, pour un polynôme non dégénéré  $P$ , la fibre de Milnor motivique à l'infini est égale à*

$$S_{P(f),\infty} = - \sum_{\gamma \in \Gamma} P_{\gamma!} i_{P_\gamma}^{-1} (S_{f,\infty}^{\sigma(\gamma)}),$$

où  $S_{f,\infty}^{\sigma(\gamma)}$  désigne les cycles proches motiviques généralisés à l'infini appartenant à  $\mathcal{M}_{\mathbb{G}_m^d}^{\mathbb{G}_m}$  et associés aux fonctions  $f_i$  et à la face  $\gamma$ .

La preuve s'organise comme suit : Dans la partie 2.4, nous construisons une log-résolution  $(Y^*, E^*)$  du couple  $(X^*, F^*)$  à partir de log-résolutions des couples  $(X_l, F_l)$ . Rappelons que par application du critère de propreté,  $h$  induit une bijection entre  $\mathcal{L}(Y^*) \setminus \mathcal{L}(E^*)$  et  $\mathcal{L}(X^*) \setminus \mathcal{L}(F^*)$ .

Dans la partie 2.5 nous donnons les propriétés du polyèdre de Newton à l'infini utiles par la suite. Nous pouvons alors classer en 2.6.1 les différents

arcs suivant les faces du polyèdre de Newton et les strates du diviseur  $E^*$ . On obtient à la proposition 2.15 et à la formule (2.2) une décomposition adéquate de la fonction zêta motivique à l'infini. Par le lemme clé 1.2 on obtient l'égalité

$$(2.1) \quad S_{P(f),\infty} = - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{(I_l) \in \mathcal{P}} \chi(C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}) [U_{\underline{I}_l} \setminus P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)].$$

Dans la partie 2.7, comme il est fait en [9, 2.8] dans le cas local, nous introduisons les *cycles proches motiviques généralisés à l'infini* notés  $S_{f,\infty}^{\sigma(\gamma)}$  et associés aux fonctions  $f_l$  et à la face  $\gamma$ . Modulo l'opérateur  $P_{\gamma!} i_{P_\gamma}^{-1}$ , leur calcul correspond aux sommes

$$\sum_{(I_l) \in \mathcal{P}} \chi(C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}) [U_{\underline{I}_l} \setminus P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)].$$

Si  $P$  est le polynôme  $x_1 + x_2$ , l'expression 2.1 fournit dans la partie 4, une formule du type Thom-Sébastiani à l'infini. De même, si les  $f_l$  sont les coordonnées de  $\mathbb{G}_m^d$ , on obtient la formule [20, théorème 3.3].

### 2.4. Log-résolutions

2.4.1. *Log-résolution de  $(X_l, F_l)$ .* Pour tout  $l$  dans  $\{1, \dots, d\}$  on fixe  $(Y_l, E_l, h_l)$  une log-résolution de  $(X_l, F_l)$ . Comme  $X_l^\infty$  et  $X_l^0$  sont des diviseurs contenus dans  $F_l$ , les fibres  $h_l^{-1}(X_l^\infty)$  et  $h_l^{-1}(X_l^0)$  sont des diviseurs contenus dans  $E_l$  et disjoints. On note  $A_l$  l'ensemble indiquant les composantes irréductibles  $E_l^{(i)}$  du diviseur  $E_l$  et  $N_{l,i}^\infty$  et  $N_{l,i}^0$  les multiplicités définies par :

$$h_l^{-1}(X_l^\infty) = \sum_{i \in A_l} N_{l,i}^\infty E_l^{(i)} \text{ et } h_l^{-1}(X_l^0) = \sum_{i \in A_l} N_{l,i}^0 E_l^{(i)}.$$

Nous noterons alors le diviseur

$$\text{div}(1/\hat{f}_l \circ h_l) := \sum_{i \in A_l} N_i(f_l) E_l^{(i)}.$$

En particulier  $N_i(f_l)$  vaut  $N_{l,i}^\infty$  pour  $E_l^{(i)}$  une composante irréductible de  $h_l^{-1}(X_l^\infty)$  et  $-N_{l,i}^0$  pour  $E_l^{(i)}$  une composante irréductible de  $h_l^{-1}(X_l^0)$ . On notera pour tout fermé  $F_l$

$$\text{div}(h_l^{-1}(F_l)) := \sum_{i \in A_l} N_i(F_l) E_l^{(i)}$$

et enfin le diviseur associé au jacobien  $\text{div}(\text{Jac}(h_l)) := \sum_{i \in A_l} (\nu_{l,i} - 1) E_l^{(i)}$ .

2.4.2. Log-résolution de  $(X, F)$  et  $(X^*, F^*)$ .

PROPOSITION ET NOTATIONS 2.8. — Soit  $Y$  le produit  $\prod_{l=1}^d Y_l$ ,  $h$  le produit  $\prod_{l=1}^d h_l$  et  $E$  l'union des cylindres  $\bigcup_{l=1}^d (\prod_{i<l} Y_i) \times E_l \times (\prod_{i>l} Y_i)$ . Le triplet  $(Y, E, h)$  est une log-résolution de  $(X, F)$ . Les composantes irréductibles de  $E$  sont les  $(\prod_{j<l} Y_j) \times E_l^{(i)} \times (\prod_{j>l} Y_j)$  notés  $E_{l,i}$  où  $E_l^{(i)}$  désigne les composantes irréductibles du diviseur  $E_l$ . On note  $Y^*$  l'ouvert  $Y \setminus h^{-1}(X_0)$  et  $E^*$  le constructible  $E \setminus h^{-1}(X_0)$ . Le triplet  $(Y^*, E^*, h)$  est une log-résolution de  $(X^*, F^*)$ . On note

$$h^{-1}(X_\infty) := \sum_{l=1}^d \sum_{i \in A_l} N_{l,i}(1/\widehat{P}(f)) E_{l,i}.$$

Démonstration. — La variété  $Y$  est lisse comme produit de variétés lisses, l'application  $h$  est propre car ses composantes le sont et  $E$  est un diviseur à croisements normaux car les  $E_l$  le sont. Les ouverts  $Y \setminus E$  et  $X \setminus F$  sont égaux aux produits  $\prod_{l=1}^d Y_l \setminus E_l$  et  $\prod_{l=1}^d X_l \setminus F_l$ . Or pour tout  $l$ , le morphisme  $h_l : Y_l \setminus E_l \rightarrow X_l \setminus F_l$  est un isomorphisme, donc  $h : Y \setminus E \rightarrow X \setminus F$  est un isomorphisme comme produit d'isomorphismes. □

2.4.3. Partitions. Pour  $l$  appartenant à  $\{1, \dots, d\}$  et  $I_l$  une partie de  $A_l$ , on pose

$$E_{I_l}^0 := \begin{cases} Y_l \setminus E_l & \text{si } I_l = \emptyset \\ \bigcap_{i \in I_l} E_l^{(i)} \setminus \bigcup_{i \notin I_l} E_l^{(i)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note alors  $\mathcal{P}_l := \{I_l \subset A_l \mid E_{I_l}^0 \neq \emptyset\}$  et  $\mathcal{P} := (\prod_{l=1}^d \mathcal{P}_l) \setminus \{\emptyset\}^d$ . On obtient alors la stratification

$$E = \bigsqcup_{(I_l) \in \mathcal{P}} E_{I_l}^0$$

où  $E_{I_l}^0$  est le produit  $\prod_{l=1}^d E_{I_l}^0$ .

Remarquons que les fibres  $X_l^0$  et  $X_l^\infty$  sont disjointes donc pour tout élément  $I_l$  de  $\mathcal{P}_l$  non vide, les entiers  $N_i(f_l)$  sont de même signe.

2.5. Polyèdre de Newton à l'infini

Notation 2.9. — Pour tout arc  $\varphi_l(t)$  tracé dans  $X_l$ , l'arc de Laurent  $\hat{f}_l(\varphi_l(t))$  sera noté  $P_l(t)/t^{\omega_l}$  où  $P_l(t)$  est une série formelle inversible ( $P_l(0)$  est non nul) et  $\omega_l$  est l'ordre de  $1/\hat{f}_l(\varphi_l(t))$ .



*Remarque 2.10.* — Pour tout arc  $\varphi$  tracé dans  $X$  et non contenu dans le fermé à l'infini  $F$ , le point générique de l'arc appartient à l'ouvert affine, par conséquent on a

$$\text{ord}_t 1/\widehat{P(f)}(\underline{\varphi}_l(t)) = \text{ord}_t 1/P(\widehat{f}_l(\underline{\varphi}_l(t))) = \text{ord}_t 1/P(\underline{P_l(t)}/t^{\omega_l}),$$

car  $1/\widehat{P(f)}$  prolonge  $1/P(f)$ , et pour tout  $l$ ,  $\widehat{f}_l$  prolonge  $f_l$ .

PROPOSITION ET NOTATIONS 2.11. — Soit  $\omega$  dans  $\mathbb{Z}^d$  et  $\varphi$  un arc de Laurent de la forme  $(P_l(t)/t^{\omega_l})$  où chaque  $P_l(t)$  est une série formelle inversible.

- (1) Le maximum de la forme linéaire  $(\omega \mid \cdot)$  restreinte à  $\Gamma_-$  sera noté  $m_\Gamma(\omega)$ , il est positif et atteint sur une face de  $\Gamma_-$  notée  $\gamma(\omega)$ . La forme linéaire  $(\omega \mid \cdot)$  est constante sur la face  $\gamma(\omega)$ .
- (2) Notons  $(\alpha_{\underline{k}})_{\underline{k}}$  les coefficients de  $P$  et posons pour toute face  $\gamma$

$$\tilde{P}_\gamma(\underline{x}, u) := P_{\gamma(\omega)}(\underline{x}) + \sum_{\underline{k} \notin \gamma} \alpha_{\underline{k}} u^{m_\Gamma(\omega) - (\underline{k} \mid \omega)} \underline{x}^{\underline{k}}.$$

On dispose de l'égalité  $P(\varphi(t)) = (1/t^{m_\Gamma(\omega)}) \tilde{P}_{\gamma(\omega)}(\underline{P_l(t)}, t)$ .

- (3) L'ordre  $\text{ord}_t 1/P(\varphi(t))$  vaut  $m_\Gamma(\omega) - \text{ord}_t \tilde{P}_{\gamma(\omega)}(\underline{P_l(t)}, t)$ . En particulier, si cet ordre est strictement positif alors  $m_\Gamma(\omega)$  est strictement positif.
- (4) Si  $(P_l(0))$  n'annule pas  $P_{\gamma(\omega)}$ , le coefficient angulaire ac  $1/P(\varphi(t))$  est égal à  $1/P_{\gamma(\omega)}(\underline{P_l(0)})$ .
- (5) On note  $\Omega$  l'ouvert  $\{\omega \in \mathbb{Z}^d \mid m_\Gamma(\omega) > 0\}$ . Pour tout  $\omega$  dans  $\Omega$ , la face  $\gamma(\omega)$  ne contient pas 0, elle appartient à  $\Gamma$ .
- (6) Pour toute face  $\gamma$  dans  $\Gamma$ , on désigne par  $\sigma(\gamma)$  l'intérieur, dans son espace vectoriel engendré dans  $\mathbb{R}^d$ , du cône positif engendré par l'ensemble  $\{\omega \in \Omega \mid \gamma(\omega) = \gamma\}$ . Cet ensemble est un cône polyédral rationnel convexe relativement ouvert. L'ensemble  $\Omega$  est la réunion disjointe des cônes  $\sigma(\gamma)$  pour  $\gamma$  appartenant à  $\Gamma$ . Pour une face  $\gamma$  de la forme  $\gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_s$  intersections de faces de codimension 1, en notant  $\alpha^{(i)}$  le vecteur normal à  $\gamma_i$ , extérieur à  $\Gamma$ , à coordonnées entières et de plus petite norme, le cône  $\sigma(\gamma)$  est égal à la somme  $\sum_{i=1}^s \mathbb{R}_*^+ \alpha^{(i)}$  de dimension  $d - \dim \gamma$ .

*Démonstration.* — voir [20, proposition 3.8]. □

**2.6. Calcul de la fibre de Milnor motivique à l'infini au dessus du tore**

2.6.1. *Le découpage.* Soit  $(I_l)$  un élément de  $\mathcal{P}$  défini en 2.4.3 et une famille  $(k_{l,i})$  notée  $\underline{k}$  appartenant à  $\prod_{l=1}^d \mathbb{N}^{|I_l|}$ . On définit un  $d$ -uplet  $\omega$  avec  $\omega_l$  égal à  $\sum_{i \in I_l} N_i(f_l)k_{l,i}$ . Si  $I_l$  est vide, on adopte la convention usuelle que la somme est nulle, en particulier  $\omega_l$  est nul. On note alors

$$\mathcal{Y}_{\underline{k}} := \left\{ (\varphi_l) \in \mathcal{L}(Y) \mid \forall l \in \{1, \dots, d\}, \text{ord}_t E_l^{(i)} \varphi_l = \begin{cases} k_{l,i}, & i \in I_l \\ 0, & i \in A_l \setminus I_l \end{cases} \right\}.$$

Cette variété est munie de l'action standard de  $\mathbb{G}_m$  sur les arcs et de la flèche vers  $X_\infty \times \mathbb{G}_m$

$$\varphi \mapsto \left( h(\varphi(0)), ac(1/\widehat{P(f)} \circ h(\varphi)) \right)$$

Les différentes images de  $\mathcal{Y}_{\underline{k}}$  sous les morphismes de troncations munies du morphisme et de l'action ci-dessus sont des éléments de  $Var_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ . On considère les espaces d'arcs

$$\mathcal{Y}_{\underline{k}}^= := \left\{ (\varphi_l) \in \mathcal{Y}_{\underline{k}} \mid \text{ord}_t 1/P(\widehat{f_l}(h_l(\varphi_l)(t))) = m_\Gamma(\omega) \right\}.$$

et

$$\mathcal{Y}_{\underline{k},n}^< := \left\{ (\varphi_l) \in \mathcal{Y}_{\underline{k}} \mid \text{ord}_t 1/P(\widehat{f_l}(h_l(\varphi_l)(t))) = n \right\}$$

munis de l'action standard de  $\mathbb{G}_m$  et de la flèche  $(\pi_0, ac)$ .

*Remarque 2.12.* — Quelques remarques :

- (1) Par 2.11, pour tout arc  $\varphi$  appartenant à  $\mathcal{Y}_{\underline{k}}$ , si on écrit  $\widehat{f_l}(h_l(\varphi_l(t)))$  sous la forme  $P_l(t)/t^{\omega_l}$  alors  $\varphi$  appartient à  $\mathcal{Y}_{\underline{k}}^=$  si et seulement si  $P_l(0)$  n'appartient pas à  $X_\gamma(0)$  et  $\varphi$  appartient à  $\mathcal{Y}_{\underline{k},n}^<$  si et seulement si  $P_l(0)$  appartient à  $X_\gamma(0)$ .
- (2) Les arcs de  $\mathcal{Y}_{\underline{k},n}^<$  et  $\mathcal{Y}_{\underline{k}}^=$  ont leur origine et leur condition de tangence fixée. Notons en particulier que l'ordre du jacobien de  $h$  est constant sur  $\mathcal{Y}_{\underline{k},n}^<$  et  $\mathcal{Y}_{\underline{k}}^=$ .

*Notation 2.13.* — Pour tout élément  $(I_l)$  de  $\mathcal{P}$  défini en 2.4.3, on considère la forme linéaire

$$l_\Gamma : \prod_{l=1}^d \mathbb{R}^{|I_l|} \rightarrow \mathbb{R} \\ (k_{l,i}) \mapsto (\omega := (\sum_{i \in I_l} N_i(f_l)k_{l,i}) \mid a)$$

où  $a$  appartient à la face  $\gamma(\omega)$ . Par 2.11 ceci ne dépend pas de  $a$ .

*Notations 2.14.* — Pour tout  $(I_l)$  appartenant à  $\mathcal{P}$ , on considère le cône de  $\prod_{l=1}^d \mathbb{R}^{*|I_l|}$

$$C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta,=} = \left\{ \underline{k} \in \prod_{l=1}^d \mathbb{R}_{>0}^{*|I_l|} \left| \begin{array}{l} (\sum_{i \in I_l} N_i(f_l) k_{l,i} = \omega_l) \in \sigma(\gamma) \\ \forall l \in \{1, \dots, d\} \sum_{i \in I_l} N_i(F_l) k_{l,i} \leq l_\Gamma(\underline{k}) \delta \end{array} \right. \right\}$$

et le cône de  $\mathbb{R}_{>0}^* \times \prod_{l=1}^d \mathbb{R}_{>0}^{*|I_l|}$

$$C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta,<} = \left\{ (n, \underline{k}) \in \mathbb{R}_{>0}^* \times \prod_{l=1}^d \mathbb{R}_{>0}^{*|I_l|} \left| \begin{array}{l} 0 < n < l_\Gamma(\underline{k}) \\ (\sum_{i \in I_l} N_i(f_l) k_{l,i} = \omega_l) \in \sigma(\gamma) \\ \forall l \in \{1, \dots, d\} \sum_{i \in I_l} N_i(F_l) k_{l,i} \leq n \delta \end{array} \right. \right\}.$$

On notera  $C_{\sigma(\gamma), (I_l), \mathbb{N}}^{\delta,=}$  et  $C_{\sigma(\gamma), (I_l), \mathbb{N}}^{\delta,<}$  les intersections  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta,=} \cap \mathbb{N}^{*|I_l|}$  et  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta,<} \cap \mathbb{N}^* \times \prod_{l=1}^d \mathbb{N}^{*|I_l|}$ .

**PROPOSITION 2.15.** — *La fonction zêta se décompose comme suit*

$$\begin{aligned} Z_{1/\widehat{P}(f), i(U^*)}^\delta(T) &= \sum_{(I_l) \in \mathcal{P}} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\underline{k} \in C_{\sigma(\gamma), (I_l), \mathbb{N}}^{\delta,=}} \mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i} (\nu_{l,i} - 1)} \mu(\mathcal{Z}_{\underline{k}}^=) T^{m_\Gamma(\omega)} \\ &+ \sum_{(I_l) \in \mathcal{P}} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{(n, \underline{k}) \in C_{\sigma(\gamma), (I_l), \mathbb{N}}^{\delta,<}} \mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i} (\nu_{l,i} - 1)} \mu(\mathcal{Z}_{\underline{k}}^{<}) T^n \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Par la proposition 2.11 on classe les arcs selon les faces du polyèdre de Newton :

$$\begin{aligned} Z_{1/\widehat{P}(f), i(U^*)}^\delta(T) &= \sum_{n \geq 1} \mu(\mathcal{X}_n^\delta(f)) T^n \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\omega \in \sigma(\gamma)} \mu(\mathcal{X}_{m_\Gamma(\omega), \omega}^{\delta,=}) T^{m_\Gamma(\omega)} \\ &+ \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\omega \in \sigma(\gamma)} \sum_{n < m_\Gamma(\omega)} \mu(\mathcal{X}_{n, \omega}^{\delta,<}) T^n \end{aligned}$$

avec pour toute face  $\gamma$  de  $\Gamma$ , pour tout  $\omega$  dans  $\sigma(\gamma)$  et pour tout entier  $n$  de  $\{1, \dots, m_\Gamma(\omega)\}$

$$\mathcal{X}_{n, \omega}^{\delta,=} = \left\{ (\varphi_j) \in \mathcal{L}(X^*) \left| \begin{array}{l} \text{ord}_t F \cdot \varphi \leq n \gamma \\ \forall j, \hat{f}_j(\varphi_j(t)) = P_j(t)/t^{\omega_j}, \quad P_j(t) \in k[[t]], \quad (P_j(0)) \notin X_\gamma(0) \end{array} \right. , \quad \text{ord}_t 1/\widehat{P}(f)(\varphi(t)) = n \right\}$$

et

$$\mathcal{X}_{n, \omega}^{\delta,<} = \left\{ (\varphi_j) \in \mathcal{L}(X^*) \left| \begin{array}{l} \text{ord}_t F \cdot \varphi \leq n \gamma \\ \forall j, \hat{f}_j(\varphi_j(t)) = P_j(t)/t^{\omega_j}, \quad P_j(t) \in k[[t]], \quad (P_j(0)) \in X_\gamma(0) \end{array} \right. , \quad \text{ord}_t 1/\widehat{P}(f)(\varphi(t)) = n \right\}.$$

Par (2.11), si  $\mathcal{X}_{n, \omega}^{\delta,=}$  est non vide alors  $n$  est égal à  $m_\Gamma(\omega)$ .

On classifie ensuite plus finement les arcs en utilisant la log-résolution précédente : les arcs sont classés par l'origine et l'ordre de contact de leur relevé sur le diviseur exceptionnel  $E$ .

La fonction zêta se réécrit alors

$$(2.2) \quad Z_{1/\widehat{P(f)},i(U^*)}^\delta(T) = \sum_{(I_l) \in \mathcal{P}} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\underline{k} \in C_{\sigma(\gamma), (I_l), \mathbb{N}}^{\delta, =}} \mu(\mathcal{X}_{\underline{k}}^=) T^{l_\Gamma(\underline{k})} + \sum_{(I_l) \in \mathcal{P}} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{(n, \underline{k}) \in C_{\sigma(\gamma), (I_l), \mathbb{N}}^{\delta, <}} \mu(\mathcal{X}_{\underline{k}, n}^<) T^n$$

avec  $\mathcal{X}_{\underline{k}}^=$  égal à  $h(\mathcal{Y}_{\underline{k}}^=)$  et  $\mathcal{X}_{\underline{k}, n}^<$  égal à  $h(\mathcal{Y}_{\underline{k}, n}^<)$ .

On conclut par la formule de changement de variables de Denef et Loeser [3, 3.3]

$$\mu(\mathcal{X}_{\underline{k}}^=) = \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i}(\nu_{l,i} - 1)} \mu(\mathcal{Y}_{\underline{k}}^=)$$

et

$$\mu(\mathcal{X}_{\underline{k}, n}^<) = \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i}(\nu_{l,i} - 1)} \mu(\mathcal{Y}_{\underline{k}, n}^<).$$

□

À la partie 2.6.2 nous calculons les mesures

$$(2.3) \quad \mu(\mathcal{Y}_{\underline{k}}^=) = [U_{I_l} \setminus P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)] \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i}}$$

et

$$(2.4) \quad \mu(\mathcal{Y}_{\underline{k}, n}^<) = \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i}} \mathbb{L}^{-(l_\Gamma(\underline{k}) - n)} [\mathbb{G}_m \times P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)].$$

Grâce au lemme 1.2, en 2.6.3 et en 2.6.4, nous prouvons la rationalité et nous calculons la limite quand  $T \rightarrow \infty$  des sommes

$$\sum_{\underline{k} \in C_{\sigma(\gamma), (I_l), \mathbb{N}}^{\delta, =}} \mathbb{L}^{-\sum_{i=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i}} T^{l_\Gamma(\underline{k})} \quad \text{et} \quad \sum_{(n, \underline{k}) \in C_{\sigma(\gamma), (I_l), \mathbb{N}}^{\delta, <}} \mathbb{L}^{-(l_\Gamma(\underline{k}) - n)} T^n.$$

À la proposition 2.31, nous obtiendrons alors l'expression 2.1.

*2.6.2. Le calcul des mesures  $\mu(\mathcal{Y}_{\underline{k}, n}^<)$  et  $\mu(\mathcal{Y}_{\underline{k}}^=)$ .* Soit  $(I_l)$  (noté aussi  $\underline{I}_l$ ) un élément de  $\mathcal{P}$  tel que  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}$  ou  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, <}$  soit non vide. Soit  $\underline{k}$  une famille appartenant à  $C_{\sigma(\gamma), (I_l), \mathbb{N}}^{\delta, =}$  si le cône est non vide et  $(\underline{k}, n)$  une famille appartenant à  $C_{\sigma(\gamma), (I_l), \mathbb{N}}^{\delta, <}$  si le cône est non vide. Notons alors  $(\omega_l)$  le d-uplet  $(\sum_{i \in I_l} N_i(f_l) k_{l,i})$ .

Nous appliquons dans tout ce qui suit exactement la même démarche que [10, 5.11] et [9, 3.3].

*Remarque 2.16.* — Nous utilisons les notations 1.2.1. Dans notre situation, à variables séparées, pour  $(I_l)$  un élément de  $\mathcal{P}$ , le fibré  $\nu_{E_{\underline{I}_l}}$  associé à  $E_{\underline{I}_l}$  (l'adhérence de  $E_{I_l}^0$ ) est simplement le produit des  $\nu_{E_{I_l}}$ , avec pour  $I_l$  vide  $\nu_{E_{I_l}}$  égal à  $Y_l \setminus \bar{E}_l$ . De même, le fibré  $U_{E_{\underline{I}_l}}$  est le produit des  $U_{E_{I_l}}$ , avec pour  $I_l$  vide  $U_{E_{I_l}}$  égal à  $Y_l \setminus E_l$ . Nous noterons  $U_{\underline{I}_l}$  le fibré  $U_{E_{\underline{I}_l}}$ .

Considérons le sous faisceau de  $\mathcal{O}_{Y \times \mathbb{A}^1}[u^{-1}]$

$$\mathcal{A}_{\underline{k}} := \sum_{l=1}^d \sum_{n_l \in \mathbb{N}^{I_l}} \mathcal{O}_{Y \times \mathbb{A}^1} \left( - \sum_{l=1}^d \sum_{i \in I_l} n_{l,i} (E_{l,i} \times \mathbb{A}^1) \right) u^{-\sum_{l=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i} n_{l,i}},$$

et notons  $CY_{\underline{k}}$  le schéma  $\text{Spec } \mathcal{A}_{\underline{k}}$ .

L'inclusion naturelle  $\mathcal{O}_{Y \times \mathbb{A}^1} \rightarrow \mathcal{A}_{\underline{k}}$  induit les morphismes  $\pi : CY_{\underline{k}} \rightarrow Y \times \mathbb{A}^1$  et  $p : CY_{\underline{k}} \rightarrow \mathbb{A}^1$ .

*Remarque 2.17.* — En notant  $E_{l,I_l}$  l'intersection  $\cap_{i \in I_l} E_l^{(i)}$ , nous constatons que pour tout  $l$ , les  $N_i(f_l)$  étant tous de même signe 2.4.3,  $\omega_l$  est strictement positif si et seulement si  $h_l(E_{l,I_l})$  est contenu dans  $X_l^\infty$ ,  $\omega_l$  est strictement négatif si et seulement si  $h_l(E_{l,I_l})$  est contenu dans  $X_l^0$  et  $\omega_l$  est nul si et seulement si  $h_l(E_{l,I_l})$  est contenu dans la variété  $X_l \setminus (X_l^0 \cup X_l^\infty)$ .

*Notations 2.18.* — Si  $h_l(E_{l,I_l})$  est contenu dans  $X_l^\infty$ ,  $\omega_l$  est la somme  $\sum_{i \in I_l} N_{l,i}^\infty k_{l,i}$ . Par l'inclusion précédente, avec  $\pi_{Y_l}$  la projection de  $Y$  sur  $Y_l$ , la fonction  $\hat{f}_l \circ h_l \circ \pi_{Y_l}$  est divisible dans  $\mathcal{A}_{\underline{k}}$  par  $u^{\omega_l}$ , on note  $\bar{f}_l$  le quotient. De même, si  $h_l(E_{l,I_l})$  est contenu dans  $X_l^0$ , alors  $\omega_l$  est égal à  $-\sum_{i \in I_l} N_{l,i}^0 k_{l,i}$ . La fonction  $\hat{f}_l \circ h_l \circ \pi_{Y_l}$  est divisible dans  $\mathcal{A}_{\underline{k}}$  par  $u^{-\omega_l}$ , on note  $\underline{f}_l$  le quotient.

*Remarque 2.19.* — Avec ces notations et la proposition 2.11 on obtient l'égalité

$$1/\widehat{P(f)} \circ h = u^{m_\Gamma(\omega)} / \bar{P}_\gamma(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_d, u)$$

car  $1/\widehat{P(f)}$  prolonge  $1/P(f)$  et  $\hat{f}_l$  prolonge  $1/f_l$  pour tout  $l$ .

*Notations 2.20.* — On note ensuite  $\tilde{E}_{l,i}$  le pullback du diviseur  $E_{l,i} \times \mathbb{A}^1$  par  $\pi$ , par  $D$  le diviseur globalement défini sur  $CY_{\underline{k}}$  par l'équation  $u = 0$ , et par  $CE_{l,i}$  les diviseurs  $\tilde{E}_{l,i} - k_{l,i}D$  pour  $i$  dans  $I_l$  et  $\tilde{E}_{l,i}$  pour  $i$  n'appartenant pas à  $I_l$ . On note par  $CY_{\underline{k}}^0$  le complémentaire de l'union des  $CE_i$  dans  $CY_{\underline{k}}$ , pour  $i$  dans  $A_l$  et par  $Y^0$  le complémentaire de l'union des  $E_{l,i}$  pour tout  $l$  dans  $\{1, \dots, d\}$  et  $i$  dans  $A_l$ .

**PROPOSITION 2.21.** — *Le schéma  $CY_{\underline{k}}$  est lisse, le morphisme  $\pi$  induit un isomorphisme au dessus de  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ , le morphisme  $p$  est lisse et sa*

fibres  $p^{-1}(0)$  s'identifie naturellement avec le fibré  $\nu_{E_{I_l}}$ . De plus quand il est restreint à  $CY_k^0$  la fibre de  $p$  en 0 s'identifie naturellement avec  $U_{I_l}$  et  $\pi$  induit un isomorphisme entre  $CY_k^0 \setminus p^{-1}(0)$  et  $Y^0 \times \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ . Enfin les fonctions  $\overline{f}_l$  restreintes à  $U_{I_l}$  sont lisses et à valeurs dans  $\mathbb{G}_m$ .

*Démonstration.* — Les variables sont séparées, on peut donc raisonner par produit et appliquer ([10, 5.12]). En particulier on recouvre  $CY_k$  par des parties ouvertes de la forme  $Spec \mathcal{O}_U[(y_{l,i}, u)]/(z_{l,i} - u^{k_{l,i}} y_{l,i})_{(l,i)}$  avec  $U$  un ouvert sur lequel les diviseurs  $E_{l,i}$  sont donnés par les équations  $z_{l,i} = 0$ . □

L'anneau  $\mathcal{A}_k$  étant un sous anneau gradué de l'anneau  $\mathcal{O}_Y[u, u^{-1}]$ , on peut considérer la  $\mathbb{G}_m$ -action  $\sigma$  sur  $CY_k$  laissant les sections de  $\mathcal{O}_Y$  invariantes et agissant sur  $u$  par  $\sigma(\lambda) : u \mapsto \lambda^{-1}u$ . Elle se restreint sur  $U_{I_l}$  en l'action diagonale induite par l'action canonique de  $\mathbb{G}_m^{|I_l|+\dots+|I_d|}$  sur  $U_{I_l}$  via le morphisme fini  $\lambda \mapsto (\lambda^{k_{l,i}})$ . On dispose alors de deux actions différentes de  $\mathbb{G}_m$  sur les arcs tronqués  $\mathcal{L}_n(CY_k^0)$  : celle induite par l'action standard de  $\mathbb{G}_m$  sur les arcs et celle définie par  $\sigma$ . On note alors  $\tilde{\sigma}$  la composition de ces deux actions (qui commutent).

On note ensuite  $\tilde{\mathcal{L}}_n(CY_k^0)$  l'ensemble des arcs  $\varphi$  dans  $\mathcal{L}_n(CY_k^0)$  tels que  $p(\varphi(t))$  est égal à  $t$ . En particulier l'origine de  $\varphi$  appartient à  $U_{I_l}$ . Pour un tel arc  $\varphi$  la composition avec  $\pi$  envoie  $\varphi$  sur un arc dans  $\mathcal{L}_n(Y \times \mathbb{A}^1)$  qui est le graphe d'un arc dans  $\mathcal{L}_n(Y)$  non contenu dans l'union des diviseurs  $E_{l,i}$  pour  $i$  dans  $I_l$  et  $l$  dans  $\{1, \dots, d\}$ . Notons que  $\tilde{\mathcal{L}}_n(CY_k^0)$  est stable par  $\tilde{\sigma}$ .

LEMME 2.22. — *Le morphisme  $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{L}}_n(CY_k^0) \rightarrow \pi_n(Y)$  induit par la projection  $CY_k^0 \rightarrow Y$  est un fibré affine de fibre  $\mathbb{A}^{\sum_{i \in I_l} k_{l,i}}$ . De plus si  $\tilde{\mathcal{L}}_n(CY_k^0)$  est muni de l'action induite par  $\tilde{\sigma}$  et  $\pi_n(\mathcal{B}_k)$  de l'action standard de  $\mathbb{G}_m$ ,  $\tilde{\pi}_l$  est alors  $\mathbb{G}_m$ -équivariant et l'action de  $\mathbb{G}_m$  sur le fibré affine est affine. Pour tout arc  $\varphi$  de  $\tilde{\mathcal{L}}_n(CY_k^0)$ , on dispose pour tout  $l$  appartenant à  $\{1, \dots, d\}$*

$$ac(1/\hat{f}_l \circ h_l \circ \pi_l \circ \tilde{\pi}(\varphi))^{-1} = ac(\overline{f}_l(\varphi(0)))$$

et

$$ac(1/\widehat{P(f)} \circ h(\tilde{\pi}(\varphi))) = ac(\tilde{P}_\gamma(\overline{f}_1(\varphi), \dots, \overline{f}_d(\varphi), t))^{-1}$$

(car  $u(t)$  est égal à  $t$ ) et si de plus  $P_\gamma(\overline{f}_l(\varphi(0)))$  est non nul alors par 2.11 on dispose de

$$ac(1/\widehat{P(f)} \circ h(\tilde{\pi}(\varphi))) = P_\gamma(\overline{f}_l(\varphi(0)))^{-1}.$$

*Démonstration.* — Chaque point de  $E_{\underline{l}}^0$  est contenu dans une partie ouverte  $U$  de  $Y$  où les diviseurs  $E_{l,i}$ , pour  $l$  dans  $\{1, \dots, d\}$  et  $i$  dans  $I_l$  sont définis dans  $U$  par les équations  $z_{l,i} = 0$  et où il existe  $\dim Y - \sum_{l=1}^d |I_l|$  fonctions  $w_j$  sur  $U$  telles que la famille  $(z_{l,i}, w_j)$  soit un morphisme étale  $U \rightarrow \mathbb{A}^{\dim Y}$ . Par le lemme de réécriture 1.4, ce morphisme induit un isomorphisme entre  $\mathcal{L}_n(U)$  et le produit  $U \times_{\mathbb{A}^{\dim Y}} \mathcal{L}_n(\mathbb{A}^{\dim Y})$ . En ajoutant en plus la coordonnée  $u$ , on obtient un isomorphisme entre  $\mathcal{L}_n(U \times \mathbb{A}^1)$  et le produit  $(U \times \mathbb{A}^1) \times_{\mathbb{A}^{\dim Y+1}} \mathcal{L}_n(\mathbb{A}^{\dim Y+1})$ . Rappelons que l'équation locale du diviseur  $E_{l,i}$  dans l'ouvert  $U$ , notée  $z_{l,i}$ , est divisible par  $u^{k_{l,i}}$ , on note  $y_{l,i}$  le quotient. La famille  $(y_{l,i}, w_j, u)$  avec  $z_{l,i}$  égal à  $u^{k_{l,i}} y_{l,i}$  induit un morphisme étale  $\pi^{-1}(U \times \mathbb{A}^1) \rightarrow \mathbb{A}^{\dim Y+1}$  et donc un isomorphisme entre  $\mathcal{L}_n(\pi^{-1}(U \times \mathbb{A}^1))$  et le produit  $\pi^{-1}(U \times \mathbb{A}^1) \times_{\mathbb{A}^{\dim Y+1}} \mathcal{L}_n(\mathbb{A}^{\dim Y+1})$ . Sous cet isomorphisme  $\tilde{\pi}$  correspond à la multiplication de chaque composante  $y_{l,i}$  d'un arc par  $t^{k_{l,i}}$ . La fibration se fait par la troncation modulo  $t^{n+1}$ . En particulier, l'action  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  sur une composante  $y_{l,i}(t)$  est donnée par  $y_{l,i}(t) \mapsto \lambda^{k_{l,i}} y_{l,i}(\lambda t)$ ; dont  $\tilde{\pi}$  est  $\mathbb{G}_m$ -équivariant. Tout suit de cette description. □

*Notations 2.23.* — On définit alors  $\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k}}^=$  et  $\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k},n}^<$  les préimages respectives de  $\mathcal{Y}_{\underline{k}}^=$  et  $\mathcal{Y}_{\underline{k},n}^<$  par la fibration  $\tilde{\pi}$ .

On déduit du lemme 2.22 le lemme suivant :

**LEMME 2.24.** — *Les arcs de  $\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k}}^=$  sont les arcs  $\varphi$  de  $\mathcal{L}(CY_{\underline{k}}^0)$  dont l'origine appartient au complémentaire de  $P_{\gamma}((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  dans  $U_{\underline{l}}$ . En particulier l'ordre  $\text{ord}_t \tilde{P}_{\gamma}((\bar{f}_l), u)(\varphi)$  est nul. Au contraire, les arcs de  $\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k},n}^<$  sont les arcs  $\varphi$  de  $\mathcal{L}(CY_{\underline{k}}^0)$  dont l'origine appartient à  $U_{\underline{l}}$  et à  $P_{\gamma}((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  et tels que l'ordre  $\text{ord}_t \tilde{P}_{\gamma}((\bar{f}_l)(\varphi), t)$  vaut  $m_{\Gamma}(\omega) - n$  égal à  $l_{\Gamma}(\underline{k}) - n$ . On obtient alors l'égalité des classes dans  $\mathcal{M}_{X_{\infty} \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$*

$$[\pi_{n\delta}(\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k}}^=)] = [\pi_{n\delta}(\mathcal{Y}_{\underline{k}}^=)] \mathbb{L}^{\sum_{l=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i}}$$

et

$$[\pi_{n\delta}(\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k},n}^<)] = [\pi_{n\delta}(\mathcal{Y}_{\underline{k},n}^<)] \mathbb{L}^{\sum_{l=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i}}.$$

*Notation 2.25.* — On note  $[U_{\underline{l}} \setminus P_{\gamma}((\bar{f}_l))^{-1}(0)]$  la classe de  $U_{\underline{l}} \setminus P_{\gamma}((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  dans  $\mathcal{M}_{X_{\infty} \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ , l'action de  $\mathbb{G}_m$  étant l'action diagonale de poids  $(k_{l,i})$  sur  $U_{\underline{l}} \setminus P_{\gamma}((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  et le morphisme vers  $\mathbb{G}_m$  étant la restriction de  $P_{\gamma}((\bar{f}_l))$ . On considère aussi la classe  $[\mathbb{G}_m \times P_{\gamma}((\bar{f}_l))^{-1}(0)]$  de  $\mathbb{G}_m \times P_{\gamma}((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  dans  $\mathcal{M}_{X_{\infty} \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$  où l'action de  $\mathbb{G}_m$  est la translation et le morphisme vers  $\mathbb{G}_m$  est la première projection.

*Remarque 2.26.* — Par la construction du groupe de Grothendieck  $\mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$  faite en [9, 2.2] (voir 1.1.2), par ramification, les classes précédentes ne dépendent pas de l'action.

*LEMME 2.27.* — Dans l'anneau  $\mathcal{M}_{X_\infty \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ , on dispose des égalités

- (1)  $[\pi_{n\delta}(\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k}}^=)] = \mathbb{L}^{n \dim(Y)\delta} [U_{\underline{I}_l} \setminus P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)].$
- (2)  $[\pi_{n\delta}(\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k},n}^<)] = \mathbb{L}^{n\delta \dim(Y) - (l_\Gamma(\underline{k}) - n)} [\mathbb{G}_m \times P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)].$

*Démonstration.* — Les arcs de  $\pi_{n\delta}(\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k}}^=)$  sont les arcs  $\varphi$  de  $\mathcal{L}_{n\gamma}(CY_{\underline{k}}^0)$  dont l'origine appartient à  $U_{\underline{I}_l} \setminus P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  et tels que  $u(\varphi(t))$  est égal à  $t$ . On montre alors que  $\pi_{n\delta}(\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k}}^=)$  est un fibré affine sur  $U_{\underline{I}_l} \setminus P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  de fibre  $\mathbb{A}^{n\delta(\dim(Y)+1) - n\delta}$ . On construit les morphismes de trivialisations en considérant en tout point  $x_0$  de  $U_{\underline{I}_l} \setminus P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $x_0$  dans  $CY_{\underline{k}}^0$  et un morphisme étale défini sur  $\Omega$  commençant par  $u$ . On applique alors le lemme (4.2)[3] (voir 1.4) pour conclure.

Dans le deuxième cas, les arcs de  $\pi_{n\delta}(\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k},n}^<)$  sont les arcs  $\varphi$  de  $\mathcal{L}_{n\gamma}(CY_{\underline{k}}^0)$  dont l'origine appartient à  $U_{\underline{I}_l} \cap P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  et tels que l'ordre  $ord_t \tilde{P}_\gamma((\bar{f}_k)(\varphi), t)$  est égal à  $m_\Gamma(\omega) - n$  lui même égal à  $l_\Gamma((k_{l,i})) - n$ . La fonction  $(\tilde{P}_\gamma((\bar{f}_l), u), u)$  est lisse car  $(\bar{f}_l)$  et  $u$  sont lisses sur  $U_{\underline{I}_l}$ , de plus par 2.11 pour tout  $a$  appartenant à  $\mathbb{G}_m^d$ ,  $\frac{\partial \tilde{P}_\gamma}{\partial x_i}(a, 0)$  est égal à  $\frac{\partial P_\gamma}{\partial x_i}(a)$  et enfin  $P_\gamma$  est lisse car  $P$  est non dégénéré pour son polyèdre de Newton. On montre alors que  $\pi_{n\delta}(\tilde{\mathcal{Y}}_{\underline{k},n}^<)$  est un fibré affine sur  $U_{\underline{I}_l} \cap P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  de fibre  $\mathbb{A}^{n\delta(\dim(Y)+1) - n\delta - (l_\Gamma(\underline{k}) - n)}$ . On construit les morphismes de trivialisations en considérant en tout point  $x_0$  de  $U_{\underline{I}_l} \cap P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)$  un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $x_0$  dans  $CY_{\underline{k}}^0$  et un morphisme étale défini sur  $\Omega$  commençant par  $(\tilde{P}_\gamma((\bar{f}_l), u), u)$ . On applique alors le lemme (4.2) [3] (voir 1.4) pour conclure. □

Des lemmes 2.24 et 2.27 et du fait que  $CY$  est lisse on obtient les mesures 2.3 et 2.4.

2.6.3. *Caractéristique d'Euler des cônes  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}$  et  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, <}$ .*

*Notation 2.28.* — Considérons l'application linéaire continue sur  $\mathbb{R}^d$

$$N_{(I_l)} : \prod_{l=1}^d \mathbb{R}^{I_l} \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(k_{l,i}) \mapsto (\omega_l = \sum_{i \in I_l} N_i(f_l) k_{l,i}).$$

L'image inverse du cône  $\sigma(\gamma)$  par  $N_{(I_l)}$  est un cône polyédral rationnel relativement ouvert.



*Notation 2.29.* — Rappelons que pour tout  $l$  dans  $\{1, \dots, d\}$ ,  $\tilde{A}_l$  désigne l'ensemble des composantes irréductibles du diviseur  $E_l$  de la variété  $Y_l$ . Notons  $\hat{A}_l$  l'ensemble  $\{i \in A_l \mid N_i(f_l) \neq 0\}$ .

*PROPOSITION 2.30.* — Pour tout  $d$ -uplet  $(I_l)$ , si l'un des  $I_l$  n'est pas contenu dans  $\tilde{A}_l$  alors la caractéristique d'Euler de  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}$  est nulle. Dans le cas contraire pour tout entier  $\delta$  supérieur au plus grand des quotients  $N_i(F_l)/N_i(f_l)$  cette caractéristique d'Euler ne dépend pas de  $\delta$ . Pour tout  $d$ -uplet  $(I_l)$  la caractéristique d'Euler de  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, <}$  est nulle.

*Démonstration.* — Si il existe  $l_0$  avec  $I_{l_0}$  non contenu dans  $\tilde{A}_{l_0}$  alors il existe  $i$  dans  $I_{l_0}$  tel que  $N_i(f_{l_0})$  est nul. Or tous les  $N_i(F_l)$  sont non nuls et positifs, par conséquent la condition de bord

$$C_{l_0} := \sum_{i \in I_{l_0}} N_i(F_{l_0})k_{l_0, i} \leq l_{\Gamma}((k_{l, i}))\delta = \delta \sum_{l=1}^d \left( \sum_{i \in I_l} N_i(f_l)k_{l, i} \right) a_l$$

n'est pas vérifiée pour tous les  $(k_{l, i})$  dans  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}$ .

Notons  $(C_{l_j})_{j \in \{1, \dots, t\}}$ , les conditions non vérifiées et  $\varphi_{l_j} : \underline{k} \mapsto \sum_{i \in I_{l_j}} N_i(F_{l_j})k_{l_j, i}$  les formes linéaires associées. Le cône  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}$  est alors la réunion disjointe des cônes polyédraux rationnels convexes

$$C_{J, \geq} := \left\{ \underline{k} \in N_{(I_l)}^{-1}(\sigma(\gamma)) \mid \begin{array}{l} \varphi_{l_i}(\underline{k}) = \varphi_{l_j}(\underline{k}) \quad \forall i, j \in J \\ \delta l_{\Gamma}(\underline{k}) \geq \varphi_{l_i}(\underline{k}) > \varphi_{l_p}(\underline{k}) \quad \forall i \in J, \forall p \in \{l_1, \dots, l_t\} \setminus J \end{array} \right\}$$

pour tout partie  $J$  non vide de  $\{l_1, \dots, l_t\}$ . Ce cône est contenu dans le cône convexe polyédral relativement ouvert  $\{\underline{k} \in N_{(I_l)}^{-1}(\sigma(\gamma)) \mid \varphi_{l_i}(\underline{k}) = \varphi_{l_j}(\underline{k}) > \varphi_{l_p}(\underline{k}) \quad \forall i, j \in J, \forall p \in \{l_1, \dots, l_t\} \setminus J\}$  noté  $C_J$  et son complémentaire dans  $C_J$  est un cône convexe relativement ouvert polyédral rationnel de même dimension que  $C_J$ . Par conséquent, par additivité de la caractéristique d'Euler  $\chi_c(C_{J, \geq})$  puis  $\chi_c(C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =})$  sont nulles. Le deuxième cas découle immédiatement de la définition de  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}$  et de l'hypothèse faite sur  $\delta$ .

On montre de même que  $\chi_c(C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, <})$  est nulle. On considérera pour cela le cône  $\{n \in \mathbb{R}_{>0}^*, (k_{l, i}) \in N_{(I_l)}^{-1}(\sigma(\gamma)) \mid 0 < n < l_{\Gamma}(k_{l, i})\}$  qui est polyédral convexe rationnel et relativement ouvert et on remarquera que les conditions  $\sum_{i \in I_l} N_i(F_l)k_{l, i} \leq n\delta$  ne sont pas toutes vérifiées puis on raisonne comme ci-dessus. □

*2.6.4. Les formes linéaires  $l_{\Gamma}$  et  $\nu$ .* Sur le cône  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}$  on considère la forme linéaire  $l_{\Gamma} : (k_{l, i}) \mapsto \sum_{l=1}^d \left( \sum_{i \in I_l} N_i(f_l)k_{l, i} \right) a_l$  où  $a$  appartient à  $\gamma$ .

Les conditions au bord

$$\forall l \in \{1, \dots, d\}, \sum_{i \in I_l} N_i(F_l)k_{l,i} \leq l_\Gamma(\underline{k})\delta$$

passent à la limite par continuité. Les entiers  $k_{l,i}$  sont positifs et les entiers  $N_i(F_l)$  sont strictement positifs, car les  $f_l$  sont à valeurs dans  $\mathbb{G}_m$ , donc chaque fermé  $F_l$  contient les fibres  $X_l^0$  et  $X_l^\infty$ . Par conséquent si l'image  $l_\Gamma(\underline{k})$  est nulle,  $k_{l,i}$  est alors nul pour tout couple  $(l, i)$ . La forme  $l_\Gamma$  est donc strictement positive sur  $\overline{C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}} \setminus \{0\}$ .

La forme linéaire  $\nu : \underline{k} \mapsto \sum_{l=1}^d \nu_{l,i}k_{l,i}$  est clairement positive sur le cône  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}$ .

Sur le cône  $C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, <}$  nous considérons les formes linéaires :

$$l_\Gamma : (n, \underline{k}) \mapsto n \text{ et } \nu : (n, \underline{k}) \mapsto \sum_{l=1}^d \nu_{l,i}k_{l,i} + (l_\Gamma(\underline{k}) - n).$$

La forme linéaire  $l$  est strictement positive sur  $\overline{C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, <}} \setminus \{0\}$  : si  $n$  est nul alors par les conditions de bords tous les  $k_{l,i}$  sont nuls car les  $N_{l,i}(F_l)$  sont tous strictement positifs. La forme linéaire  $\nu$  est elle aussi positive.

*2.6.5. Conclusion partielle.* Par conséquent, par application du lemme 1.2, nous obtenons avec les notations précédentes, une expression de la fibre de Milnor motivique à l'infini de  $P(f)$  en termes de la log-résolution  $(Y, E, h)$  et du polyèdre de Newton  $\Gamma$

PROPOSITION 2.31. — *La fibre de Milnor motivique à l'infini de  $P(f)$  vaut*

$$S_{P(f), \infty} = - \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{(I_l) \in \mathcal{P}} \chi(C_{\sigma(\gamma), (I_l)}^{\delta, =}) [U_{\underline{I}_l} \setminus P_\gamma((\bar{f}_l))^{-1}(0)].$$

Donnons maintenant une expression de la fibre de Milnor motivique à l'infini de  $P(f)$  uniquement en termes du polyèdre  $\Gamma$ . En suivant [9] nous utilisons une fonction zêta relative à un cône.

### 2.7. La classe $S_{f, \infty}^{C, l}$

Soit  $C$  un cône polyédral convexe relativement ouvert contenu dans  $\mathbb{Z}^d$ . Soit  $l$  une forme linéaire sur  $\mathbb{Z}^d$  strictement positive sur  $\overline{C} \setminus \{0\}$ . Soit  $d$  fonctions à source lisse  $f_l : \mathcal{U}_l \rightarrow \mathbb{G}_m$ . Pour tout  $k$  dans  $\{1, \dots, d\}$  on considère une compactification  $(X_k, i_k, \hat{f}_k)$  de  $f_k$ . On note  $F_k$  le fermé  $X_k \setminus i_k(\mathcal{U}_k)$ ,

$X$  le produit des  $X_k$  et  $\hat{f}$  le  $d$ -uplet  $(\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_d)$ . Pour tout  $\delta$  strictement positif, pour tout  $\omega$  dans  $C$ , on note,

$$\mathcal{X}_\omega^\delta = \left\{ \varphi = (\varphi_i) \in \mathcal{L}(X) \left| \begin{array}{l} \forall i \in \{1, \dots, d\} \quad \text{ord}_t 1/\hat{f}_i(\varphi_i) = \omega_i \\ \text{ord}_t F_i \cdot \varphi_i \leq l(\omega)\delta \end{array} \right. \right\}.$$

On munit cet objet de l'action standard de  $\mathbb{G}_m$  sur les arcs et des flèches "origine" et "coefficients angulaires". Ses images sous les morphismes de troncations sont des éléments de  $Var_{X \times \mathbb{G}_m^d}^{\mathbb{G}_m}$ . On considère alors la fonction zêta

$$Z_{\hat{f}, i(U)}^{C, l, \delta}(T) := \sum_{\omega \in C} \mu(\mathcal{X}_\omega^\delta) T^{l(\omega)}.$$

Par la suite nous considérerons le cône

$$C_{C, (I_l)}^\delta = \left\{ \underline{k} \in \prod_{l=1}^d \mathbb{R}_{>0}^{*|I_l|} \left| \begin{array}{l} (\sum_{i \in I_l} N_i(f_l) k_{l,i} = \text{ord}_t 1/\hat{f}_l \varphi = \omega_l) = \omega \in C \\ \forall l \in \{1, \dots, d\} \quad \sum_{i \in I_l} N_i(F_l) k_{l,i} \leq l(\omega)\delta = l_k(\underline{k})\delta \end{array} \right. \right\}$$

avec

$$\begin{aligned} l_k &: C_{C, (I_l)}^\delta &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \underline{k} &\mapsto l_k(\underline{k}) := l((\sum_{i \in I_l} N_i(f_l) k_{l,i})_{l \in \{1, \dots, d\}}). \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.32. — Avec les notations précédentes, pour  $\delta$  assez grand, la fonction zêta  $Z_{\hat{f}, i(U)}^{C, l, \delta}(T)$  est rationnelle, on note  $S_{\hat{f}, i(U)}^{C, l, \delta}$  la limite  $\lim_{T \rightarrow \infty} Z_{\hat{f}, i(U)}^{C, l, \delta}(T)$ . Cette limite ne dépend ni de la forme linéaire  $l$ , ni de  $\delta$ , on la note  $S_{\hat{f}, i(U)}^C$ . Pour une log-résolution  $(Y, E, h)$  de  $(X, F)$  issue des log-résolutions  $(Y_l, E_l, h_l)$  de  $(X_l, F_l)$  on dispose de l'égalité

$$S_{\hat{f}, i(U)}^{C, l, \delta} = h! \sum_{(I_l) \in \mathcal{P}} \chi(C_{C, (I_l)}^\delta)[U_{I_l}] = h! S_{\hat{f} \circ h, h^{-1}(i(U))}^{C, l, \delta} \in \mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m^d}^{\mathbb{G}_m}.$$

L'image directe sur le point  $p_i S_{\hat{f}, i(U)}^C$ , notée  $S_{f, \infty}^C$ , appartient à  $\mathcal{M}_{\mathbb{G}_m^d}^{\mathbb{G}_m}$  et ne dépend pas des compactifications.

Démonstration. — On montre la rationalité de la fonction zêta comme suit : comme précédemment on considère une log-résolution  $(Y, E, h)$  de  $(X, F)$  issue de log-résolutions  $(Y_l, E_l, h_l)$  de  $(X_l, F_l)$ , on classe les arcs suivant l'ordre de contact de leur remontée sur le diviseur à croisements normaux et on applique la formule de changement de variables de Denef-Loeser [3]. Ce qui donne avec les notations précédentes :

$$Z_{\hat{f}, i(U)}^{C, l, \delta}(T) = \sum_{(I_l) \in \mathcal{P}} \sum_{\underline{k} \in C_{C, (I_l)}^\delta \cap \prod_{l=1}^d \mathbb{N}^{|I_l|}} \mathbb{L}^{-\sum_{l=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i} (\nu_{l,i} - 1)} \mu(Y_{\underline{k}}) T^{l_k(\underline{k})}$$

avec

$$Y_{\underline{k}} := \left\{ (\varphi_l) \in \mathcal{L}(Y) \mid \begin{array}{l} \forall l \in \{1, \dots, d\}, \forall i \in I_l \neq \emptyset, \text{ord}_t(E_l)_i \varphi_l = k_{l,i} \\ \forall l \in \{1, \dots, d\}, \forall i \in A_l \setminus I_l \neq \emptyset, \text{ord}_t(E_l)_i \varphi_l = 0 \end{array} \right\}$$

muni de l'action standard de  $\mathbb{G}_m$  sur les arcs et de la flèche vers  $X \times \mathbb{G}_m^d$  formée des flèches "origine" (qui a un arc  $\varphi$  associe l'élément  $h(\varphi(0))$  dans  $X$ ) et "coefficients angulaires" (qui a un arc  $\varphi$  associe  $(ac(1/\hat{f}_l(\varphi_l)))$  dans  $\mathbb{G}_m^d$ ) qui est  $\mathbb{G}_m$ -homogène pour  $\sigma$ . Avec ce qui précède 2.6.2 et les mêmes notations on obtient l'égalité

$$\mu(Y_{\underline{k}}) = [\pi_{n\delta}(Y_{\underline{k}})]_{\mathbb{L}}^{-n\delta \dim(Y)} = [U_{\underline{I}_l}]_{\mathbb{L}}^{-\sum_{l=1}^d \sum_{i \in I_l} k_{l,i}}$$

où l'on note  $[U_{\underline{I}_l}]$  la classe de  $U_{\underline{I}_l}$  dans  $\mathcal{M}_{X \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ , l'action de  $\mathbb{G}_m$  étant l'action diagonale de poids  $(k_{l,i})$  sur  $U_{\underline{I}_l}$  et le morphisme vers  $\mathbb{G}_m$  étant les restrictions des  $(\bar{f}_l)$ .

Enfin on introduit la forme linéaire  $\nu : (k_{l,i}) \mapsto \sum_{l=1}^d \nu_{l,i} k_{l,i}$ . Elle est positive sur le cône  $\mathcal{C}_{C,(I_l)}^\delta$ .

Par les inégalités

$$\forall l \in \{1, \dots, d\} \quad \sum_{i \in I_l} N_i(F_l) k_{l,i} \leq l(\omega)\delta = l_k(\underline{k})\delta$$

la forme linéaire  $l_k$  est strictement positive sur  $\overline{\mathcal{C}_{C,(I_l)}^\delta} \setminus \{0\}$  car chaque coefficient  $N_i(F_l)$  est strictement positif. Par application du lemme 1.2 on obtient le résultat.

Montrons que  $\chi(\mathcal{C}_{C,(I_l)}^\delta)$  ne dépend pas de  $\delta$ . Notons d'abord que le cône polyédral rationnel  $N_{(I_l)}^{-1}(C)$  est relativement ouvert 2.6.3. Remarquons ensuite que s'il existe  $\delta_0$  tel que pour tout  $k_{l,i}$  on ait les conditions

$$C_{l_0} := \sum_{i \in I_{l_0}} N_i(F_{l_0}) k_{l_0,i} \leq l_k(\underline{k})\delta_0 = \delta_0 l \left( \left( \sum_{i \in I_l} N_i(f_l) k_{l,i} \right) \right)$$

il en est de même pour tout  $\delta > \delta_0$  car  $l$  est positive. Si toutes les conditions sont vérifiées en ce cas là, le cône  $C_{\sigma(\gamma),(I_l)}^{\delta,=}$  est égal à  $N_{(I_l)}^{-1}(C)$  qui ne dépend pas de  $l$ .

Si pour tout  $\delta$ , il existe des  $k_{l,i}$  ne vérifiant pas une condition  $C_l$  alors par le même argument d'additivité de la caractéristique d'Euler que dans 2.30 la caractéristique d'Euler  $\chi(\mathcal{C}_{C,(I_l)}^\delta)$  est nulle et ne dépend donc ni de  $\delta$ , ni de  $l$ .

Les variables étant séparées, l'indépendance de la compactification se montre de la même manière qu'en [20, Théorème 2.5] en travaillant composante par composante. □

2.7.1. *L'opérateur*  $P!i_{P \neq 0}^{-1}$ . Pour un polynôme quasi-homogène  $P$  de  $\mathbb{A}^d$  vers  $\mathbb{A}^1$  et une variété  $S$  fixe et un élément de  $Var_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$  notée  $(A, (p_S, p_{\mathbb{G}_m^d}), \sigma)$  tel que  $A \setminus p_{\mathbb{G}_m^d}^{-1}(P^{-1}(0))$  est stable sous  $\sigma$ , on notera

$$P!i_{P \neq 0}^{-1}(A, (p_S, p_{\mathbb{G}_m^d}), \sigma) := (A \setminus p_{\mathbb{G}_m^d}^{-1}(P^{-1}(0)), (p_S, P \circ p_{\mathbb{G}_m^d}), \sigma).$$

*Exemple 2.33.* — Avec les notations de la partie précédente, pour  $\gamma$  une face de  $\Gamma$  le polyèdre de Newton à l'infini de  $P$ , le polynôme associé  $P_\gamma$  est quasi-homogène et  $S_{f, \infty}^{\sigma(\gamma)} \setminus p_{\mathbb{G}_m^d}^{-1}(P_\gamma^{-1}(0))$  est stable par rapport à l'action  $\sigma$  de  $\mathbb{G}_m$  sur  $S_{f, \infty}^{\sigma(\gamma)}$ . Ceci résulte du fait que le polynôme  $P_\gamma$  est homogène pour les poids  $\omega$  appartenant à  $\sigma(\gamma)$ . On peut donc considérer  $P_{\gamma!}i_{P_\gamma \neq 0}^{-1}(S_{f, \infty}^{\sigma(\gamma)})$ .

2.7.2. *Conclusion.* Des notations 2.14, de la décomposition de la fonction zêta 2.15, de la preuve de 2.31 et de la partie précédente nous obtenons le théorème 2.7.

### 3. Calcul de la fibre de Milnor motivique à l'infini

Supposons maintenant que les fonctions  $f_l$  sont à valeurs dans  $\mathbb{A}^1$ . Rappelons que chaque  $f_l$  est définie sur une variété lisse  $\mathcal{U}_l$  et que l'on note  $\mathcal{U}$  le produit des  $\mathcal{U}_l$ . Rappelons aussi que  $P$  est un polynôme de Laurent en  $d$ -variables non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini.

L'image inverse par  $f$  de la stratification de l'ensemble de définition de  $P$  en produit de tores induit une stratification de  $\mathcal{U}$ . En particulier on considère le diviseur de  $\mathcal{U}$  dont les composantes sont données par  $f_l = 0$ .

*Notation 3.1.* — Pour tout  $i$  appartenant à  $\{1, \dots, d\}$  on note maintenant  $E_i$  le produit  $\prod_{l=1}^{i-1} \mathcal{U}_l \times (f_i = 0) \times \prod_{l=i+1}^d \mathcal{U}_l$ . Pour toute partie  $I$  de  $\{1, \dots, d\}$  on note  $E_I^0$  le constructible  $\bigcap_{i \in I} E_i \setminus \bigcup_{j \notin I} E_j$ . Enfin, on note  $\mathcal{I}$  l'ensemble des parties de  $\{1, \dots, d\}$  induit par la stratification du domaine de définition de  $P$  en produit de tores. En particulier  $\mathcal{U}$  est égal à  $\bigsqcup_{I \in \mathcal{I}} E_I^0$ .

*Exemples 3.2.* — Si  $I$  est vide alors  $E_\emptyset^0$  est égal au produit des ouverts  $\prod_{l=1}^d \mathcal{U}_l \setminus (f_l = 0)$ . Pour  $k$  dans  $\{1, \dots, d\}$ , le constructible  $E_{\{1, \dots, k\}}^0$  est égal au produit  $\prod_{l=1}^k (f_l = 0) \times \prod_{l=k}^d (\mathcal{U}_l \setminus f_l^{-1}(0))$ . Enfin pour  $P$  un polynôme à  $d$  variables,  $\mathcal{I}$  est l'ensemble des parties de  $\{1, \dots, d\}$  et pour  $P$  un polynôme de Laurent à  $d$  variables dont le domaine de définition est  $\mathbb{G}_m^d$ ,  $\mathcal{I}$  est vide.

**THÉORÈME 3.3.** — *Pour une famille de fonctions  $f_l : \mathcal{U}_l \rightarrow \mathbb{A}^1$ , à source lisse, pour un polynôme non dégénéré  $P$ , avec les notations précédentes, la*

fibres de Milnor motivique à l'infini est égale à

$$S_{P(f),\infty} = - \sum_{I \in \mathcal{I}} \sum_{\gamma \in \Gamma(P_I)} P_{I,\gamma} i_{P_I,\gamma}^{-1} \left( S_{(f_i)_{i \notin I}, \infty}^{\sigma(\gamma, I)} \right) \prod_{i \in I} [f_i^{-1}(0)]$$

où  $\mathcal{I}$  indice la stratification du produit  $\prod_{l=1}^d \mathcal{U}_l$  induite par celle du domaine de définition de  $P$  en produit de tores, où pour tout  $I$  dans  $\mathcal{I}$ ,  $\Gamma(P_I)$  est le polyèdre de Newton à l'infini de  $P_I$ ,  $P_{I,\gamma}$  est le polynôme issu de  $P_I$  et associé à la face  $\gamma$  et  $\sigma(\gamma, I)$  est le cône dual de  $\gamma$  par rapport à  $\Gamma_I$ .

*Démonstration.* — Par additivité de la fibre de Milnor (théorème 3.9 [10]) on dispose de l'égalité

$$S_{1/\widehat{P(f)}}([U \xrightarrow{i} X]) = \sum_{I \in \mathcal{I}} S_{1/\widehat{P(f)}}([E_I^0 \xrightarrow{i} X]).$$

Soit  $I$  un élément de  $\mathcal{I}$ . On considère le polynôme  $P_I(x_j)$  appartenant à  $k[x_j, x_j^{-1}, j \notin I]$  et égal à  $P(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_d x_d)$  avec  $\alpha_i$  nul pour  $i$  dans  $I$  et vaut 1 sinon. Ce polynôme est non dégénéré pour son polyèdre de Newton (et commode si  $P$  l'est). En remarquant que nous sommes à variables séparées nous obtenons

$$\begin{aligned} p_! S_{1/\widehat{P(f)}}([E_I^0 \xrightarrow{i} X]) \\ = p_! S_{1/P_I(\widehat{f_j, j \notin I})}([\prod_{j \notin I} U_j \setminus f_j^{-1}(0) \xrightarrow{i} \prod_{j \notin I} X_j]) \prod_{i \in I} [f_i^{-1}(0)]. \end{aligned}$$

On applique alors le théorème 2.7. □

## 4. Une formule du type Thom-Sébastiani

### 4.1. Une formule du type Thom-Sébastiani

DÉFINITION 4.1. — Notons *inv* l'opération  $\mathcal{M}_k$ -linéaire sur  $\mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$  induite par l'inversion  $x \mapsto x^{-1}$  sur  $\mathbb{G}_m$  notée encore *inv*

$$\begin{aligned} \text{inv} : \quad \mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} &\rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \\ [A \xrightarrow{p} \mathbb{G}_m, \sigma] &\mapsto [A \xrightarrow{\text{inv} \circ p} \mathbb{G}_m, \sigma] \end{aligned}$$

THÉORÈME 4.2. — Pour deux fonctions  $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{A}^1$  et  $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{A}^1$  à source lisse on dispose de l'égalité

$$\text{inv} S_{f_1+f_2, \infty, U_1 \times U_2}^{\Phi} = \text{inv} S_{f_1, \infty, U_1}^{\Phi} * \text{inv} S_{f_2, \infty, U_2}^{\Phi}$$

où  $*$  est le produit de convolution 1.11 et où pour un morphisme  $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1$  on note

$$S_{f,\infty,U}^\Phi := (-1)^{\dim U - 1} (S_{f,\infty} - ([U - p_! S_{f,\infty}]) \cdot 1)$$

avec  $p_!$  l'image directe sur le point et  $1$  la classe  $[\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m, id_{\mathbb{G}_m}, \tau]$  où  $\tau$  est la translation.

DÉFINITION 4.3. — Le morphisme  $f$ , n'a pas de fibre à l'infini intrinsèque, il n'y a donc pas de notions de cycles évanescents, au sens de Deligne, pour la valeur infini. Néanmoins, par analogie avec le cas local, nous appellerons cycles évanescents motiviques pour la valeur infini de  $f$  l'objet  $S_{f,\infty,U}^\Phi$ . Cet objet ne dépend d'aucune compactification et vérifie comme dans le cas local une formule de convolution.

Remarque 4.4. — Notons que  $S_{f,\infty,U}^\Phi$  dépend de l'ouvert  $U$ , ce n'est donc pas un invariant local à l'infini. On introduit alors un invariant de  $f$  indépendant de l'ouvert  $U$

$$S_{f,\infty}^\Phi := (-1)^{\dim U - 1} (S_{f,\infty} + p_! S_{f,\infty} \cdot 1).$$

Pour des compactifications  $X_1$  et  $X_2$ , on considère

$$S_{f_1+f_2,\infty,\infty} := \widehat{f_1 + f_2}! i_{X_1^\infty \times X_2^\infty \times \mathbb{G}_m}^{-1} S_{\widehat{f_1+f_2}^\infty, U_1 \times U_2}$$

et

$$S_{f_1+f_2,\infty,\infty}^\Phi := (-1)^{\dim U_1 + \dim U_2 - 1} (S_{f_1+f_2,\infty,\infty} + p_! S_{f_1+f_2,\infty,\infty} \cdot 1).$$

Le calcul de l'objet  $S_{f_1+f_2,\infty,\infty}$  ne fait intervenir que des arcs dont l'origine appartient aux fibres à l'infini. Les calculs de la preuve de 4.2 montrent alors l'égalité

$$inv S_{f_1+f_2,\infty,\infty}^\Phi = inv S_{f_1,\infty}^\Phi * inv S_{f_2,\infty}^\Phi.$$

La formule obtenue est un analogue à l'infini de la formule de Thom-Sébastiani de Denef-Loeser dans le cas des germes, voir par exemple ([10, 5.18]).

Démonstration. — Nous faisons ici la preuve au dessus du tore, en appliquant le raisonnement de la partie 3 on obtient le cas général. Considérons deux fonctions  $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{G}_m$  et  $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{G}_m$  à source lisse et  $P$  le polynôme  $x_1 + x_2$ . Ce polynôme est non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini. On considère comme précédemment deux compactifications  $(X_1, i_1, \hat{f}_1)$  et  $(X_2, i_2, \hat{f}_2)$  ainsi que des log-résolutions associées  $(Y_1, E_1, h_1)$  et  $(Y_2, E_2, h_2)$ . On note  $a$  la face  $(1, 0)$ ,  $b$  la face  $(0, 1)$  et  $ab$  la face joignant  $a$  et  $b$  du polyèdre de Newton de  $P$ . Pour  $k$  appartenant à  $\{1, 2\}$ , on note  $A_k$  l'ensemble indiquant les composantes du diviseur  $E_k, C_k^\infty$

l'ensemble  $\{i \in A_k \mid N_{i,k}^\infty \neq 0\}$  et  $C_k$  l'ensemble  $\{i \in A_k \mid N_i(f_k) \neq 0\}$ . On utilisera les notations de 2.4.1.

Par la proposition 2.31 on obtient l'égalité

$$\begin{aligned}
 -S_{f_1+f_2,\infty} &= \sum_{\substack{I_1 \subset C_1^\infty \\ I_2 \subset C_2}} \chi(C_{\sigma(a),I_1,I_2}^\infty)[U_{I_1} \times U_{I_2}, \overline{f_{I_1}}, \sigma_1] \\
 &+ \sum_{\substack{I_2 \subset C_2^\infty \\ I_1 \subset C_1}} \chi(C_{\sigma(b),I_1,I_2}^\infty)[U_{I_1} \times U_{I_2}, \overline{f_{I_2}}, \sigma_2] \\
 &+ \sum_{\substack{I_1 \subset C_1^\infty \\ I_2 \subset C_2^\infty}} \chi(C_{\sigma(ab),I_1,I_2}^\infty)[U_{I_1} \times U_{I_2} \setminus (\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}} = 0), (\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}})^{-1}, \sigma_{1,2}].
 \end{aligned}$$

En effet, pour  $(\omega_1, \omega_2)$  appartenant à  $\sigma(a)$ ,  $\omega_1$  est strictement positif donc  $I_1$  est contenu dans  $C_1^\infty$ , de même pour  $(\omega_1, \omega_2)$  appartenant à  $\sigma(b)$ ,  $I_2$  est contenu dans  $C_2^\infty$  et pour  $(\omega_1, \omega_2)$  appartenant à  $\sigma(ab)$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont strictement positifs et  $I_1$  et  $I_2$  sont respectivement contenus dans  $C_1^\infty$  et  $C_2^\infty$ . Enfin par 2.30, pour tout  $k$  dans  $\{1, 2\}$ , si  $I_k$  n'est pas contenu dans  $C_k$  alors la caractéristique d'Euler est nulle.

Rappelons l'écriture du cône  $C_{\sigma(\gamma),I_1,I_2}^{\delta,=}$ , pour une face  $\gamma$  du polyèdre  $\Gamma$  et  $\delta$  un entier strictement positif

$$\begin{aligned}
 &C_{\sigma(\gamma),I_1,I_2}^{\delta,=} \\
 &= \left\{ (k_{1,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_1|}, (k_{2,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_2|} \left| \begin{array}{l} \omega := \left( \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i}, \sum_{i \in I_2} N_i(f_2)k_{2,i} \right) \in \sigma(\gamma) \\ \sum_{i \in I_1} N_i(F_1)k_{1,i} \leq m_\Gamma(\omega)\delta \\ \sum_{i \in I_2} N_i(F_2)k_{2,i} \leq m_\Gamma(\omega)\delta \end{array} \right. \right\}.
 \end{aligned}$$

Nous précisons ici  $\delta$  mais par 2.30 les caractéristiques d'Euler n'en dépendent pas pour  $\delta$  assez grand. Examinons les caractéristique d'Euler de ces cônes.

Si  $\gamma$  est la face  $a$  alors

$$\begin{aligned}
 &C_{\sigma(a),I_1,I_2}^{\delta,=} \\
 &= \left\{ (k_{1,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_1|}, (k_{2,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_2|} \left| \begin{array}{l} (1) \quad \sum_{i \in I_2} N_i(f_2)k_{2,i} < \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \\ (2) \quad \sum_{i \in I_1} N_i(F_1)k_{1,i} \leq \delta \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \\ (3) \quad \sum_{i \in I_2} N_i(F_2)k_{2,i} \leq \delta \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \end{array} \right. \right\}
 \end{aligned}$$

car  $m_\Gamma(\omega) = ((\omega_1, \omega_2) \mid (1, 0)) = \omega_1$ .



Si  $I_2$  n'est pas contenu dans  $C_2^\infty$  et  $I_2 \neq \emptyset$  alors par 2.4.1  $N_i(f_2) < 0$  pour tout  $i$  appartenant à  $I_2$  donc (1) est toujours vérifiée car  $N_i(f_1) > 0$  pour tout  $i$  appartenant à  $I_1$  contenu dans  $C_1^\infty$ . Si  $\delta$  est supérieur au  $\max_{i \in I_1} (N_i(F_1)/N_i(f_1))$  alors (2) est vérifiée. La condition (3) est à imposer car les variables sont séparées. La caractéristique d'Euler de ce cône est alors nulle.

Si  $I_2$  est vide alors la condition (1) est automatique, la condition (2) est vérifiée pour  $\delta$  supérieur au  $\max_{i \in I_1} (N_i(F_1)/N_i(f_1))$  et la condition (3) aussi car en ce cas l'ordre  $ord_t F_g \varphi_g$  est nul. La caractéristique d'Euler vaut alors  $(-1)^{|I_1|}$ .

Si  $I_2$  est contenu dans  $C_2^\infty$  alors la condition (1) est à imposer et les conditions (2) et (3) sont vérifiées pour  $\delta$  supérieur à  $\max_{i \in I_1} (N_i(F_1)/N_i(f_1))$  et  $\max_{i \in I_2} (N_i(F_2)/N_i(f_2))$ . En effet on dispose de l'inégalité

$$\sum_{i \in I_2} N_i(F_2)k_{2,i} \leq \delta \sum_{i \in I_2} N_i(f_2)k_{2,i} < \delta \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i}$$

par conséquent pour  $\delta$  assez grand la caractéristique d'Euler vaut  $(-1)^{|I_1|+|I_2|}$ .

Si  $\gamma$  est la face  $b$  on travaille par symétrie.

Si  $\gamma$  est la face  $ab$  alors  $I_1$  est contenu dans  $C_1^\infty$ ,  $I_2$  est contenu dans  $C_2^\infty$  et on obtient l'égalité  $m_\Gamma(\omega) = \omega_1 = \omega_2$  pour tout  $\omega$  dans  $\sigma(ab)$ . En ce cas on dispose de l'égalité

$$C_{ab, I_1, I_2}^{\delta,=} = \left\{ (k_{1,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_1|}, (k_{2,i}) \in \mathbb{R}_{>0}^{*|I_2|} \left| \begin{array}{l} (1) \quad \sum_{i \in I_2} N_i(f_2)k_{2,i} = \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \\ (2) \quad \sum_{i \in I_1} N_i(F_1)k_{1,i} \leq \delta \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \\ (3) \quad \sum_{i \in I_2} N_i(F_2)k_{2,i} \leq \delta \sum_{i \in I_1} N_i(f_1)k_{1,i} \end{array} \right. \right\}.$$

La première condition est à imposer, les deux suivantes sont vérifiées dès que  $\delta$  est supérieur à  $\max_{i \in I_1} (N_i(F_1)/N_i(f_1))$  et  $\max_{i \in I_2} (N_i(F_2)/N_i(f_2))$ . Le cône est alors de caractéristique d'Euler égale à  $(-1)^{|I_1|+|I_2|-1}$ . Par

conséquent nous obtenons la formule

$$\begin{aligned}
 S_{f_1+f_2,\infty} = & - \sum_{\substack{\emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty \\ \emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [U_{I_1} \times U_{I_2}, \overline{f_{I_1}}, \sigma_1] \\
 & - \sum_{\emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty} (-1)^{|I_1|} [U_{I_1} \times Y_2 \setminus E_2, \overline{f_{I_1}}, \sigma_1] \\
 & - \sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [U_{I_1} \times U_{I_2}, \overline{f_{I_2}}, \sigma_1] \\
 & - \sum_{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty} (-1)^{|I_2|} [Y_1 \setminus E_1 \times U_{I_2}, \overline{f_{I_2}}, \sigma_2] \\
 & - \sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|-1} [U_{I_1} \times U_{I_2} \setminus (\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}} = 0), (\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}})^{-1}, \sigma_{1,2}]
 \end{aligned}$$

car pour  $I_k$  vide,  $U_{I_k}$  est égal  $Y_k \setminus E_k$  isomorphe à  $U_k$ .

En utilisant l'expression de  $S_{f_k,\infty}$  sur une log-résolution 1.6 en factorisant on a (\*)

$$\begin{aligned}
 S_{f_1+f_2,\infty} = & ([U_1] - p_! S_{f_1,\infty}) S_{f_2,\infty} + ([U_2] - p_! S_{f_2,\infty}) S_{f_1,\infty} \\
 & + \sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [U_{I_1} \times U_{I_2} \setminus (\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}} = 0), (\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}})^{-1}, \sigma_{1,2}]
 \end{aligned}$$

avec  $[U_1] - p_! S_{f_1,\infty}$  et  $[U_2] - p_! S_{f_2,\infty}$  appartenant à  $\mathcal{M}_k$  et  $p_!$  l'image directe sur le point.

En appliquant la définition du produit de convolution 1.11 et de l'inversion on obtient alors

$$\begin{aligned}
 S_{f_1+f_2,\infty} = & ([U_2] - p_! S_{f_2,\infty}) S_{f_1,\infty} + ([U_1] - p_! S_{f_1,\infty}) S_{f_2,\infty} \\
 & - \text{inv}(\text{inv} S_{f_1,\infty} * \text{inv} S_{f_2,\infty}) + \sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}} = 0].1.
 \end{aligned}$$

En passant à l'inversion il vient

$$\begin{aligned}
 \text{inv} S_{f_1+f_2,\infty} = & -\text{inv}(S_{f_1,\infty} - ([U_1] - p_! S_{f_1,\infty}).1) * \text{inv}(S_{f_2,\infty} - ([U_2] - p_! S_{f_2,\infty}).1) \\
 & + (([U_1] - p_! S_{f_1,\infty})([U_2] - p_! S_{f_2,\infty}) + \sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}} = 0]).1.
 \end{aligned}$$

On note  $\alpha$  la quantité

$$([U_1] - p!S_{f_1,\infty})([U_2] - p!S_{f_2,\infty}) + \sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}} = 0].$$

Montrons que  $\alpha$  est égal à  $[U_1 \times U_2] - p!S_{f_1+f_2,\infty}$ . En effet en développant on obtient

$$\begin{aligned} \alpha = [U_1][U_2] - [U_1]p!S_{f_2,\infty} - [U_2]p!S_{f_1,\infty} + p!S_{f_1,\infty}p!S_{f_2,\infty} \\ + \sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}} = 0]. \end{aligned}$$

Notons que par image directe sur le point de  $(*)$  on a dans  $\mathcal{M}_k$

$$\begin{aligned} p!S_{f_1+f_2,\infty} = ([U_1] - p!S_{f_1,\infty})p!S_{f_2,\infty} + ([U_2] - p!S_{f_2,\infty})p!S_{f_1,\infty} \\ + \sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [U_{I_1} \times U_{I_2} \setminus \overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}} = 0] \end{aligned}$$

par conséquent on obtient dans  $\mathcal{M}_k$

$$\begin{aligned} [U_1 \times U_2] - p!S_{f_1+f_2,\infty} = [U_1][U_2] - ([U_1] - p!S_{f_1,\infty})p!S_{f_2,\infty} \\ - ([U_2] - p!S_{f_2,\infty})p!S_{f_1,\infty} + 2p!S_{f_1,\infty}p!S_{f_2,\infty} - \sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [U_{I_1} \times U_{I_2}] \\ + \sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [\overline{f_{I_1}} + \overline{f_{I_2}} = 0] \end{aligned}$$

or

$$\sum_{\substack{\emptyset \neq I_2 \subset C_2^\infty \\ \emptyset \neq I_1 \subset C_1^\infty}} (-1)^{|I_1|+|I_2|} [U_{I_1} \times U_{I_2}] = p!S_{f_1,\infty}p!S_{f_2,\infty}$$

ceci donne la formule. □

### 4.2. Exemples de Douai et Sabbah

Dans [5] et [6], Douai et Sabbah montrent que le spectre à l'infini (pour la cohomologie de la paire  $(f^{-1}(t), \mathbb{G}_m^n)$ ), des polynômes  $f$  de la forme  $x_1 + \dots + x_n + \frac{1}{x_1 \dots x_n}$  est  $1 + t + \dots + t^n$ . Nous considérons ici la quantité

évanescence associée à la paire  $(\mathbb{G}_m^n, f^{-1}(t))$  issue de la formule de Thom-Sébastiani 4.2 :

$$S_{f,\infty,U}^\Phi = (-1)^{n-1}(S_{f,\infty} - ([\mathbb{G}_m^n] - p_! S_{f,\infty}).1)$$

et nous montrons

PROPOSITION 4.5. — *Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a*

$$Sp(S_{f,\infty,U}^\Phi) = 1 + t + \dots + t^n.$$

*Démonstration.* — Le polynôme  $f$  est un polynôme de Laurent commode et non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini,  $\Gamma$ . Par [20, Théorème 3.3] ou [18, Théorème 4.1], sa fibre de Milnor motivique à l'infini est de la forme :

$$(4.1) \quad S_{f,\infty} = - \sum_{\gamma \in \Gamma} (-1)^{d-dim(\gamma)} [\mathbb{G}_m^n \setminus f_\gamma^{-1}(0), f_\gamma^{-1}, \sigma_\gamma].$$

La preuve repose alors sur deux lemmes :

LEMME 4.6. — *La fibre de Milnor motivique de  $f$  à l'infini est égale à*

$$S_{f,\infty} = - \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k-1} C_{n+1}^k \left[ \begin{array}{c} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1 + \dots + x_k = 0 \\ \downarrow \\ \mathbb{G}_m \end{array} \quad 1/(x_1 + \dots + x_k), \sigma_{(x_1, \dots, x_k)} \right]$$

où  $\sigma_{(x_1, \dots, x_k)}$  est l'action de  $\mathbb{G}_m$  associée à la face de sommets  $\{x_1, \dots, x_k\}$ .

*Démonstration.* — Ce lemme repose sur la formule 4.1, sur la symétrie dans les variables et sur le changement de variables :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m^n & \rightarrow & \mathbb{G}_m^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_1, \dots, x_{n-1}, 1/(x_1 \dots x_n)) \end{array}$$

Par ce type d'isomorphisme, on constate que pour tout  $k$ , on a égalité entre les objets :

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1 + \dots + x_{k-1} + 1/x_1 \dots x_n = 0 \\ \downarrow \\ \mathbb{G}_m \end{array} \quad 1/(x_1 + \dots + x_{k-1} + 1/x_1 \dots x_n), \sigma_{(x_1, \dots, x_{k-1}, 1/x_1 \dots x_n)} \right]$$

et

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1 + \dots + x_k = 0 \\ \downarrow \\ \mathbb{G}_m \end{array} \quad 1/(x_1 + \dots + x_k), \sigma_{(x_1, \dots, x_k)} \right].$$

où  $\sigma_{(x_1, \dots, x_{k-1}, 1/x_1 \dots x_n)}$  est l'action de  $\mathbb{G}_m$  associée à la face de sommets  $\{x_1, \dots, x_{k-1}, 1/x_1 \dots x_n\}$ . □

LEMME 4.7. — Pour tout entier  $k$  on a l'égalité

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1 + \dots + x_k = 0 \\ \downarrow \\ \mathbb{G}_m \end{array} \quad 1/(x_1 + \dots + x_k), \quad \sigma_{(x_1, \dots, x_k)} \right] \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \left[ \begin{array}{c} \mathbb{G}_m^{n-l} \\ \downarrow \\ \mathbb{G}_m \end{array} \quad x_1, \quad \sigma_{x_1} \right] \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l [\mathbb{G}_m]^{n-l-1} \cdot 1_{\mathbb{G}_m}. \end{aligned}$$

Démonstration. — La preuve se fait par récurrence, en remarquant que pour tout  $k$ , la projection  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{G}_m^n$  dans  $\mathbb{G}_m^{n-1}$  induit un isomorphisme entre les variétés

$$\left( \begin{array}{c} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1 + \dots + x_k = 0 \\ \downarrow \\ \mathbb{G}_m \end{array} \quad 1/(x_1 + \dots + x_k), \quad \sigma_{(x_1, \dots, x_k)} \right)$$

et

$$\left( \begin{array}{c} \mathbb{G}_m^n \setminus x_1 + \dots + x_{k-1} = 0 \\ \downarrow \\ \mathbb{G}_m \end{array} \quad 1/(x_1 + \dots + x_{k-1}), \quad \sigma_{(x_1, \dots, x_{k-1})} \right).$$

□

Par conséquent on a l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-1} S_{f, \infty, U}^\Phi \\ &= - \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k-1} C_{n+1}^k \left( \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l [\mathbb{G}_m]^{n-l-1} \right) \\ & \quad - \left( [\mathbb{G}_m]^n - \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k-1} C_{n+1}^k \left( \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l [\mathbb{G}_m]^{n-l} \right) \right) \cdot 1_{\mathbb{G}_m}. \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-1} S_{f, \infty, U}^\Phi \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{n+1}^k \left( \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l [\mathbb{G}_m]^{n-l-1} \right) \\ & \quad - \left( [\mathbb{G}_m]^n - \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{n+1}^k \left( \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l [\mathbb{G}_m]^{n-l} \right) \right) \cdot 1_{\mathbb{G}_m} \end{aligned}$$

en changeant d'indice on peut réécrire ceci sous la forme

$$\begin{aligned}
 &(-1)^{n-1} S_{f,\infty,U}^\Phi \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{n+1}^k \left( \sum_{l=1}^k (-1)^{l-1} [\mathbb{G}_m]^{n-l} \right) \\
 &\quad - \left( [\mathbb{G}_m]^n - \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{n+1}^k \left( \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l [\mathbb{G}_m]^{n-l} \right) \right) \cdot 1_{\mathbb{G}_m}
 \end{aligned}$$

par sommation nous obtenons

$$(-1)^{n-1} S_{f,\infty,U}^\Phi = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{n+1}^k ([\mathbb{G}_m]^n + (-1)^{k-1} [\mathbb{G}_m]^{n-k}) - [\mathbb{G}_m]^n,$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}
 (-1)^{n-1} S_{f,\infty,U}^\Phi &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n+1} C_{n+1}^k [\mathbb{G}_m]^{n-k} + (-1)^{n-1} [\mathbb{G}_m]^n \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{n+1}^k [\mathbb{G}_m]^n - [\mathbb{G}_m]^n
 \end{aligned}$$

ou encore

$$(-1)^{n-1} S_{f,\infty,U}^\Phi = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+1} C_{n+1}^k [\mathbb{G}_m]^{n-k} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k} C_{n+1}^k [\mathbb{G}_m]^n$$

par la formule du binôme de Newton le dernier terme de cette somme est nul, donc

$$S_{f,\infty,U}^\Phi = \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k [\mathbb{G}_m]^{n-k}$$

en appliquant la formule du triangle de Pascal on obtient

$$S_{f,\infty,U}^\Phi = [\mathbb{G}_m]^n + \sum_{k=1}^n C_n^k [\mathbb{G}_m]^{n-k} + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} [\mathbb{G}_m]^{n-k}$$

qui par la formule du binôme de Newton donne

$$S_{f,\infty,U}^\Phi = \mathbb{L}^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^{k-1} [\mathbb{G}_m]^{n-k}.$$

On pose alors  $I(n) := \sum_{k=0}^n C_{n+1}^k [\mathbb{G}_m]^{n-k}$ . Et l'on montre par récurrence que

$$I(n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{L}^k.$$

D'après ce qui précède il n'y a que les cas de base à vérifier :  $I(0)$  est clairement égal à 1, tout comme  $I(1)$  est égal à  $\mathbb{L} - 1 + 2$  soit  $\mathbb{L} - 1$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BITTNER, « On motivic zeta functions and the motivic nearby fiber », *Math. Z.* **249** (2005), n° 1, p. 63-83.
- [2] P. DELIGNE, « Théorie de Hodge. III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1974), n° 44, p. 5-77.
- [3] J. DENEFF & F. LOESER, « Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration », *Invent. Math.* **135** (1999), n° 1, p. 201-232.
- [4] ———, « Geometry on arc spaces of algebraic varieties », in *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, p. 327-348.
- [5] A. DOUAI & C. SABBAAH, « Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures. I », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2003), n° 4, p. 1055-1116.
- [6] A. DOUAI & C. SABBAAH, « Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures. II », (2004), p. 1-18.
- [7] W. FULTON, *Intersection theory*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998, xiv+470 pages.
- [8] G. GUIBERT, « Espaces d'arcs et invariants d'Alexander », *Comment. Math. Helv.* **77** (2002), n° 4, p. 783-820.
- [9] G. GUIBERT, F. LOESER & M. MERLE, « Nearby cycles and composition with a nondegenerate polynomial », *Int. Math. Res. Not.* (2005), n° 31, p. 1873-1888.
- [10] ———, « Iterated vanishing cycles, convolution, and a motivic analogue of a conjecture of Steenbrink », *Duke Math. J.* **132** (2006), n° 3, p. 409-457.
- [11] H. HIRONAKA, « Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II », *Ann. of Math. (2)* **79** (1964), 109-203; *ibid.* (2) **79** (1964), p. 205-326.
- [12] A. G. KOUCHNIRENKO, « Polyèdres de Newton et nombres de Milnor », *Invent. Math.* **32** (1976), n° 1, p. 1-31.
- [13] F. LOESER, « Seattle lectures on motivic integration », in *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, p. 745-784.
- [14] E. LOOIJENGA, « Motivic measures », *Astérisque* (2002), n° 276, p. 267-297, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.
- [15] Y. MATSUI & K. TAKEUCHI, « Monodromy at infinity of polynomial map and mixed Hodge modules », *arXiv :0912.5144v5*.
- [16] ———, « Monodromy zeta functions at infinity, Newton polyhedra and constructible sheaves », *Math. Z.* **268** (2011), n° 1-2, p. 409-439.
- [17] F. PHAM, « Vanishing homologies and the  $n$  variable saddlepoint method », in *Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, p. 319-333.
- [18] M. RAIBAUT, « Fibre de Milnor motivique à l'infini », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **348** (2010), n° 7-8, p. 419-422.

- [19] ———, « Singularités à l'infini et intégration motivique », *Thèse, Université Nice Sophia Antipolis* (2010).
- [20] ———, « Singularités à l'infini et intégration motivique », *Bull. Soc. Math. France* **140** (2012), n° 1, p. 51-100.
- [21] C. SABBAB, « Monodromy at infinity and Fourier transform », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **33** (1997), n° 4, p. 643-685.
- [22] M. SAITO, « Mixed Hodge modules », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **26** (1990), n° 2, p. 221-333.
- [23] J. STEENBRINK & S. ZUCKER, « Variation of mixed Hodge structure. I », *Invent. Math.* **80** (1985), n° 3, p. 489-542.

Manuscrit reçu le 30 novembre 2010,  
accepté le 8 février 2011.

Michel RAIBAUT  
Université de Nice,  
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné,  
Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2,  
France  
University of Leuven,  
Department of Mathematics,  
Celestijnenlaan 200 B,B-3001 Leuven (Heverlee),  
Belgium  
*Current address:*  
Institut de mathématiques de Jussieu,  
4 place Jussieu, Case 247  
75252 Paris Cedex 5  
France  
raibaut@unice.fr