



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Gérald GAUDENS & Lionel SCHWARTZ

**Applications depuis  $K(\mathbb{Z}/p, 2)$  et une conjecture de N. Kuhn**

Tome 63, n° 2 (2013), p. 763-772.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2013\\_\\_63\\_2\\_763\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2013__63_2_763_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2013, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

## APPLICATIONS DEPUIS $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ ET UNE CONJECTURE DE N. KUHN

par **Gérald GAUDENS & Lionel SCHWARTZ** (\*)

---

RÉSUMÉ. — Dans cet article on démontre une conjecture de N. Kuhn : si la cohomologie singulière modulo un nombre premier  $p$  d'un espace est finiment engendrée comme module sur l'algèbre de Steenrod, alors elle est finie. On donne aussi des formes plus fortes de ce résultat. Le second auteur en avait déjà donné une démonstration dans un article précédent. Cependant dans le cas d'un nombre premier impair la preuve comportait une lacune sans hypothèse supplémentaire sur la cohomologie de l'espace, du type de la nullité de l'homomorphisme de Bockstein. De même la démonstration reposait, d'abord sur une idée de N. Kuhn, puis sur une utilisation de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. La nouvelle démonstration repose elle sur une extension de la stratégie de N. Kuhn qui est fondée sur un théorème de J. Lannes et uniquement le théorème de Bott-Samelson. Elle fonctionne de manière identique pour tout nombre premier  $p$ .

ABSTRACT. — In this paper we prove a conjecture of N. Kuhn: if the singular cohomology modulo a prime number  $p$  of a space is finitely generated as a module over the Steenrod algebra, then it is finite. The second author had already given proof of this result in a previous article. However in the case of an odd prime the proof contained a gap without additional assumption on the cohomology of the space, like the triviality of the Bockstein homomorphism. The first proof depends, first on an idea by N. Kuhn, then on the Eilenberg-Moore spectral sequence. The new proof is based on an extension of the strategy of N. Kuhn is based on a theorem of J. Lannes and only on the Bott-Samelson theorem. It works the same way for all primes  $p$ .

### 1. Introduction, les conjectures de Kuhn

Soit  $p$  un nombre premier. La cohomologie  $H^*(X; \mathbb{F}_p)$  d'un espace  $X$ , que l'on notera  $H^*X$ , est naturellement un objet de la catégorie  $\mathcal{U}$  des modules instables sur l'algèbre de Steenrod [9]. Cette catégorie est munie, comme

---

*Mots-clés* : Modules instables, réalisation, théorème de Bott-Samelson, obstructions.

*Classification math.* : 55S10, 55S35.

(\*) Partiellement soutenu par ANR BLAN08-2-338236, HGRT.

toute catégorie abélienne, d'une filtration naturelle, dite de Krull, par des sous-catégories épaisses stables par colimites :

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \dots \subset \mathcal{U}$$

La sous-catégorie  $\mathcal{U}_0$  est exactement la sous-catégorie pleine formée des modules instables localement finis ([9] section 6.2) qui sont colimite directe de modules finis. Autrement dit cette sous-catégorie est obtenue à partir des objets simples de  $\mathcal{U}$ , les modules  $\Sigma^n \mathbb{F}_p$ , par extensions et colimites. Les termes suivants sont définis itérativement comme suit :  $\mathcal{U}_n$  est "l'image inverse" dans  $\mathcal{U}$  de la sous-catégorie abélienne  $\mathcal{C}$  du quotient  $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$  obtenue à partir des objets simples de  $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$  par extensions et colimites. La catégorie  $\mathcal{U}$  n'est pas la réunion des  $\mathcal{U}_n$  mais chaque objet  $M \in \mathcal{U}$  est colimite directe sur  $n$  de ses sous-objets  $K_n(M)$ ,  $K_n(M)$  étant le plus grand sous-objet de  $M$  qui appartient à  $\mathcal{U}_n$  ([9] chapitre 6). La filtration de Krull est caractérisée par :

**THÉORÈME 1.1.** — ([9] théorème 6.2.4) *Soit  $\bar{T}$  le foncteur de Lannes réduit, adjoint à gauche du produit tensoriel par  $\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/p)$ . Un module instable  $M$  est dans  $\mathcal{U}_n$  si et seulement si  $\bar{T}^{n+1}(M) = \{0\}$ .*

Un module instable *réduit* est un module qui ne contient pas de suspension non triviale ([9] section 2.6). Pour  $p = 2$  cela veut dire que l'opération  $x \mapsto \text{Sq}^{|x|}(x)$  est injective. C'est aussi équivalent (pour tout  $p$ ) à dire que le module se plonge dans une somme directe de  $H^*V$  ([9] section 3.1).

La catégorie  $\mathcal{U}$  admet aussi une filtration décroissante par des sous-catégories  $\mathcal{N}il_s$ ,  $s \geq 0$ ,

$$\mathcal{U} = \mathcal{N}il_0 \supset \mathcal{N}il_1 \supset \mathcal{N}il_2 \supset \dots \supset \mathcal{N}il_s \supset \dots$$

$\mathcal{N}il_s$  est la plus petite sous-catégorie épaisse, stable par colimite et contenant les suspensions  $s$ -ièmes des modules instables. Le résultat suivant est élémentaire mais central dans la suite : un module instable dans  $\mathcal{N}il_s$  est  $(s - 1)$ -connexe. Tout module instable  $M$  est donc muni d'une filtration nilpotente  $\{M_s\}_{s \geq 0}$  qui est décroissante, séparée et naturelle, et dont les sous-quotients sont les suspensions itérées de modules instables réduits. On pose :

$$M_s/M_{s+1} = \Sigma^s R_s M$$

il résulte de ([9] Lemme 6.1.4) que  $R_s M$  est réduit.

L'objet du présent article est de démontrer le résultat suivant, conjecturé par N. Kuhn dans [3] qu'il appelle la conjecture de réalisation forte : SRC.

**THÉORÈME 1.2.** — *Soit  $X$  un espace tel que  $H^*X \in \mathcal{U}_n$  alors  $H^*X \in \mathcal{U}_0$ .*

Si cet énoncé ne fait apparaître que la filtration de Krull sa démonstration utilise la filtration nilpotente. Afin de donner du relief à ce résultat, observons que la catégorie  $\mathcal{U}$  possède une infinité d'objets qui appartiennent à  $\mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{n-1}$ , par exemple les générateurs projectifs  $F(n)$  et leurs suspensions ([9] sections 1.6, 3.3 et 6.2). A l'inverse, la cohomologie modulo  $p$  d'un espace d'Eilenberg-Mac Lane  $K(\mathbb{Z}/p, n)$  pour  $n > 0$ , ainsi que la cohomologie modulo  $p$  d'un groupe fini d'ordre divisible par  $p$ , sont des modules instables qui n'appartiennent à  $\mathcal{U}_n$  pour aucun entier  $n$ .

Le théorème était déjà connu pour  $p = 2$  [11, 2]. Il a pour corollaire (également conjecturé par Kuhn : conjecture de réalisation : CR, dans [3] :

**COROLLAIRE 1.3.** — *Soit  $X$  un espace. Si la cohomologie  $H^*X$  a une famille finie de générateurs comme module instable sur l'algèbre de Steenrod, alors  $H^*X$  est de dimension finie comme  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel.*

On déduit 1.3 de 1.2 comme suit. Les générateurs projectifs  $F(n)$  de  $\mathcal{U}$  sont monogènes et dans  $\mathcal{U}_n$ , il suit qu'un module instable finiment engendré est dans une sous-catégorie  $\mathcal{U}_k$ . Le théorème 1.2, implique alors que  $H^*X \in \mathcal{U}_0$ . Mais un module instable finiment engendré et localement fini est de dimension finie comme  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel (voir par exemple [9] sections 3.3 et 6.2).

Ce résultat est instable : la cohomologie modulo  $p$  d'un spectre d'Eilenberg-Mac Lane  $H\mathbb{Z}/p$  est monogène comme module instable sur l'algèbre de Steenrod, mais n'est pas de dimension finie comme  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel. Dans [3] Kuhn démontre ce corollaire sous des hypothèses supplémentaires, par exemple la nullité de l'homomorphisme de Bockstein. Il utilise le théorème d'Adams sur l'invariant de Hopf 1 pour montrer que certains "petits modules finis" ne peuvent être réalisés. Dans [10] le second auteur démontre le corollaire pour  $p = 2$ . Cette fois ci la technique utilisée dépend de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (et ne dépend plus du théorème d'Adams) et elle montre que certains modules finis "un peu plus gros" ne peuvent être réalisés. Dans [4] Kuhn donne une approche analogue mais plus directe et basée sur la suite spectrale de Goodwillie-Arone, améliorant un peu les résultats de [10].

Dans [10] le second auteur envisageait aussi le cas  $p > 2$ . L'existence dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'une différentielle  $d_{p-1}$  nécessitait de modifier un peu l'approche. Comme il a été observé par le premier auteur la solution proposée alors est insuffisante, elle fonctionne cependant si on suppose par exemple que l'homomorphisme de Bockstein est nul. L'approche présentée ici est nouvelle et unifie le cas  $p = 2$  avec le cas où  $p$  est impair. Mais la technique utilisée ne s'applique pas immédiatement aux

modules finis évoqués plus haut. Des adaptations peuvent être envisagées. L'approche de [4] est actuellement investiguée par Manfred Stelzer pour  $p > 2$ , mais présente aussi des difficultés.

L'article est organisé comme suit. On raisonne par l'absurde. Dans la première partie on rappelle brièvement *la réduction de Kuhn du problème* qui permet de supposer donné  $X$  tel que  $\tilde{H}^*X = M$ ,  $M$  supposé  $s$ -nilpotent (avec  $s > 0$ ) et  $M \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$ . On décrit les propriétés de la cohomologie de  $\Omega\Sigma X$ . On construit une application algébrique non triviale

$$\varphi_s^* : H^*\Omega\Sigma X \rightarrow \Sigma^s H^*B\mathbb{Z}/p$$

On montre ensuite qu'on ne peut la factoriser à travers  $H^*\Sigma^s B\mathbb{Z}/p \leftarrow H^*\Sigma^{s-1}K(\mathbb{Z}/p, 2)$  car l'action des opérations de Steenrod ne serait pas respectée.

Dans la seconde partie on montre que l'application  $\varphi_s^*$  est réalisable topologiquement par une application  $\varphi_s : \Sigma^s B\mathbb{Z}/p \rightarrow \Omega\Sigma X$ . Puis on montre que les groupes d'obstruction à l'extension à  $\Sigma^{s-1}K(\mathbb{Z}/p, 2)$  sont nuls, ce qui mène à la contradiction. Cette construction est réminiscente de celle de H. Miller à la fin de son article sur la conjecture de Sullivan [7].

On fixe dans la suite un nombre premier  $p$  et on suppose que les espaces sont  $p$ -complets et simplement connexes. Ceci n'entraîne pas de perte de généralité. On supposera aussi dans les deux premières parties que l'homologie modulo  $p$  des espaces considérés est de dimension finie en chaque degré et que cette propriété persiste si on applique le foncteur  $T$  de Lannes, ceci permet d'appliquer un théorème de Lannes 2.1. On rappelle dans la dernière section comment s'affranchir de cette condition en utilisant la théorie des espaces profinis suivant [2]. Pour ce qui est des définitions de base sur les modules et les algèbres instables, on renvoie à [9].

L'erreur dans [10] est expliquée dans une note intitulée "L'homomorphisme de Bockstein et la conjecture de Kuhn" disponible sur la page du second auteur et dans [12]. Sur la page web du second auteur on trouvera une note de travail expliquant comment rétablir l'approche antérieure dans des cas particuliers.

**Remerciements.** Le premier auteur remercie le Mathematisches Institut de l'université de Bonn où ce travail a été arrivé à maturation, ainsi que le Max-Planck Institut für Mathematik où il a été achevé. Une version traduite en anglais apparaît dans l'Habilitationsschrift du premier auteur. Ils remercient aussi le rapporteur qui par ses conseils pertinents a permis d'améliorer grandement ce manuscrit.

## 2. La réduction de Kuhn, préliminaires algébriques

On commence par quelques rappels sur le foncteur  $T$  de Lannes [5]. Soit  $H$  la cohomologie modulo  $p$  de l'espace classifiant  $B\mathbb{Z}/p$ , et soit  $\bar{H}$  sa cohomologie réduite. Les endofoncteurs de la catégorie  $\mathcal{U}$

$$M \mapsto M \otimes H; \quad M \mapsto M \otimes \bar{H}$$

possèdent des adjoints à gauche respectifs  $T$  et  $\bar{T}$ . Le scindement naturel  $H \cong \mathbb{F}_p \oplus \bar{H}$  dans la catégorie  $\mathcal{U}$  induit à un scindement naturel

$$TM \cong \bar{T}M \oplus M.$$

Ils sont tous deux exacts. De plus  $T$  commute aux produits tensoriels dans le sens où l'application naturelle

$$T(M_1) \otimes T(M_2) \rightarrow T(M_1 \otimes M_2)$$

donnée formellement par les propriétés d'adjonction, est un isomorphisme pour tous  $M_1$  et  $M_2$ . Ceci donne évidemment pour  $\bar{T}$  la relation

$$\bar{T}(M \otimes N) \cong \bar{T}(M) \otimes N \oplus M \otimes \bar{T}(N) \oplus \bar{T}(M) \otimes \bar{T}(N)$$

de laquelle on déduit que si  $M \in \mathcal{U}_m, N \in \mathcal{U}_n$  alors  $M \otimes N \in \mathcal{U}_{m+n}$ .

Soit  $X$   $p$ -complet, 1-connexe et que  $TH^*X$  est de dimension finie en chaque degré. Alors, d'après [5] :

THÉORÈME 2.1. — *L'application naturelle :*

$$TH^*X \rightarrow H^* \text{map}(B\mathbb{Z}/p, X)$$

*adjointe de l'application induite en cohomologie par l'évaluation  $B\mathbb{Z}/p \times \text{map}(B\mathbb{Z}/p, X) \rightarrow X$ , est un isomorphisme d'algèbres instables.*

### 2.1. La réduction de Kuhn

On ne rappelle pas ici comment se ramener à supposer que le module instable est dans  $\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$ , ceci est fait dans [3]. L'outil central est le théorème 2.1. Kuhn l'applique à la cofibre  $\Delta(X)$  de  $X \rightarrow \text{map}(B\mathbb{Z}/p, X)$  et à ses itérés  $\Delta^{n-1}(X)$ . Par construction et sous les hypothèses d'application de 2.1 on a clairement  $\tilde{H}^* \Delta(X) \cong \bar{T}(H^*X)$ . Ceci combiné avec 1.1 permet de se ramener, partant d'un espace  $X$  tel que  $H^*X \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{n-1}$ , à un espace dont la cohomologie est dans  $\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$ . Supposons de plus que  $H^*X \in \mathcal{N}il_s \setminus \mathcal{N}il_{s-1}$ . On peut supposer  $s > 0$  : le module  $R_0 \tilde{H}^*X$  est nécessairement trivial, car l'existence d'une classe non-nulle contredirait

le fait que  $H^*X$  soit de filtration de Krull finie. Ce point est amplement documenté dans [3] et [9].

Donc soit  $X$  un espace  $s$ -connexe dont la cohomologie réduite est exactement  $s$ -nilpotente avec  $s > 0$  et  $H^*X \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$ . Quitte à écraser en un point un sous-complexe fini on peut aussi supposer que  $R_s \tilde{H}^*X$  est infini. En effet, si  $s$  est le plus petit entier tel que  $R_s \tilde{H}^*X$  soit infini il suffit d'écraser en un point le  $(s - 1)$ -squelette.

Il sera de plus commode plus loin de supposer  $X$   $s$ -connexe, ceci sera rappelé en temps et lieu.

Un module instable réduit dans  $\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_0$  est la somme d'un module concentré en degré 0 et d'un sous-module non trivial d'une somme directe  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} F(1)$  [10]. En sélectionnant un  $\lambda_0$  dans  $\Lambda$  on obtient une application algébrique non triviale

$$\varphi_s^* : H^*X \rightarrow \Sigma^s R_s H^*X \rightarrow \Sigma^s F(1) \subset \Sigma^s \tilde{H}^*B\mathbb{Z}/p .$$

Cette application est d'algèbres instables (avec un petit abus de terminologie car il faudrait rajouter une unité à droite). Il suffit de montrer qu'elle factorise par les indécomposables de l'algèbre. Mais la définition de la filtration nilpotente (voir aussi [3]) montre que  $(\tilde{H}^*X)^2 \in \mathcal{N}il_{2s}$ , la propriété suit.

### 2.2. Enoncés techniques

On est amené à considérer l'espace  $Z = \Omega \Sigma X$ . D'après le scindement de James (ou le théorème de Bott-Samelson) sa cohomologie est en tant que module instable isomorphe à l'algèbre tensorielle sur  $M = \tilde{H}^*X$  :

**THÉORÈME 2.2.** — ([13]) *La cohomologie  $H^*Z$  est isomorphe à l'algèbre tensorielle  $\mathbb{T} \tilde{H}^*X$  comme  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel gradué et comme module instable.*

**COROLLAIRE 2.3.** — *La cohomologie  $\tilde{H}^*Z$  appartient à  $\mathcal{N}il_s$ , de plus  $\bar{T}^{n+1}(H^*Z)$  est  $(ns - 1)$ -connexe.*

Le corollaire résulte de ce que  $H^*Z \cong \bigoplus_k M^{\otimes k}$  et des propriétés de  $\bar{T}$  vis à vis du produit tensoriel et de la commutation aux suspensions dont on déduit :

**LEMME 2.4.** — *Si  $M \in \mathcal{U}_s \cap \mathcal{N}il_t$  alors  $\bar{T}^n(M^{\otimes h}) \in \mathcal{U}_{hs-n} \cap \mathcal{N}il_{ht}$ .*

Il suit directement de la définition que si  $M \in \mathcal{N}il_u$ ,  $N \in \mathcal{N}il_v$ , alors  $M \otimes N \in \mathcal{N}il_{u+v}$  (voir [9] lemme 8.7.5 pour un analogue, et [3] section 2

et 3). De même la formule pour  $\bar{T}(M \otimes N)$  donne le comportement de la filtration de Krull par produit tensoriel.

**2.3. Impossibilité de factoriser  $\varphi_s^*$**

De 2.2 il suit que l'application  $\varphi_s^*$  s'étend en une application d'algèbre (ou de module) instable

$$H^*Z \rightarrow \Sigma^s H^*B\mathbb{Z}/p$$

que l'on notera aussi  $\varphi_s^*$ . Elle ne peut factoriser au travers de l'application naturelle  $H^*\Sigma^{s-1}K(\mathbb{Z}/p, 2)$ , car il n'y a pas d'applications non triviales d'une suspension  $s$ -ième (et donc d'un module instable  $s$ -nilpotent) vers la suspension  $(s - 1)$ -ième d'un module réduit, or  $H^*K(\mathbb{Z}/p, 2)$  est réduit.

**3. La conjecture de Kuhn**

**3.1. Cohomologie des espaces d'applications pointées**

Soit  $Z$  un H-espace, typiquement un espace de lacets. De l'équivalence d'homotopie :  $\text{map}(B\mathbb{Z}/p, Z) \cong \text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, Z) \times Z$ , on déduit :

LEMME 3.1. — ([1])  $QH^*\text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, Z) = \bar{T}QH^*Z$ .

Par une itération :

LEMME 3.2. —  $QH^*\text{map}_*(B\mathbb{Z}/p^{\wedge n}, Z) = \bar{T}^nQH^*Z$ .

**3.2. Construction de l'application  $\varphi_s$**

On construit une application  $\varphi_s : \Sigma^s B\mathbb{Z}/p \rightarrow Z$  réalisant  $\varphi_s^*$  en cohomologie modulo  $p$ . On commence par observer que  $Z$  satisfait aux hypothèses du théorème de Lannes, c'est une vérification directe. Le théorème 6.3.3 de [6] garantit alors que  $\text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, Z)$  est exactement  $(s - 1)$ -connexe. On observe que

$$[\Sigma^s B\mathbb{Z}/p, Z] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(H^*Z, \tilde{H}^*(\Sigma^s B\mathbb{Z}/p))$$

est surjectif. En effet cet homomorphisme s'identifie à

$$[\Sigma^s B\mathbb{Z}/p, Z] \rightarrow H_s \text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, Z)$$



et factorise en la composée de l'homomorphisme de Hurewicz suivi de la réduction modulo  $p$  de l'homologie qui est surjective car  $\text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, Z)$  est  $(s - 1)$ -connexe. L'identification résulte de la suite d'isomorphismes :

$$\begin{aligned}
 (\bar{H}^*Z)^s &\cong H^s \text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, Z) \cong \text{Hom}(H_s(\text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, Z); \mathbb{Z}), \mathbb{Z}/p) \\
 &\cong \text{Hom}(\pi_s \text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, Z), \mathbb{Z}/p)
 \end{aligned}$$

Par adjonction l'application  $\varphi_s^*$  s'interprète comme un élément de  $(\bar{H}^*Z)^{s*} \cong H_s \text{map}(B\mathbb{Z}/p, Z)$  par 2.1. On peut alors choisir une application de  $S^s \rightarrow \text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, Z)$  dont l'image par Hurewicz puis réduction modulo  $p$  est  $\varphi_s^*$ . On considère l'application adjointe  $S^s \times B\mathbb{Z}/p \rightarrow Z$ . On peut supposer triviale sur  $S^s \times *$  car quitte à écraser en un point un sous-complexe fini on peut supposer  $X$  (et donc  $Z$ )  $s$ -connexe. Elle est homotopiquement triviale sur  $* \times B\mathbb{Z}/p$  par adjonction. On récupère donc une application  $\Sigma^s B\mathbb{Z}/p = S^s \wedge B\mathbb{Z}/p \rightarrow Z$  qui a l'action prescrite en cohomologie mod  $p$ .

### 3.3. Théorie de l'obstruction et contradiction

L'espace  $K(\mathbb{Z}/p, 2)$  se reconstruit à partir  $B\mathbb{Z}/p$  à l'aide de la construction de Milnor. On a une filtration  $* = C_0 \subset C_1 = \Sigma B\mathbb{Z}/p \subset C_2 \subset \dots \subset \cup_n C_n = K(\mathbb{Z}/p, 2)$ , et un diagramme où les flèches de la ligne supérieure sont homotopiquement triviales (ici  $B$  désigne  $B\mathbb{Z}/p$ ) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & B^{*n+1} & \longrightarrow & B^{*n+2} & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

d'où on déduit des cofibrations à homotopie près :

$$\Sigma^{n-1} B^{\wedge n} \rightarrow C_{n-1} \rightarrow C_n$$

et

$$\Sigma^{n-2+s} B^{\wedge n} \rightarrow \Sigma^{s-1} C_{n-1} \rightarrow \Sigma^{s-1} C_n$$

Les obstructions à l'extension de  $\varphi_s: \Sigma^s B\mathbb{Z}/p \rightarrow Z$  à  $\Sigma^{s-1} K(\mathbb{Z}/p, 2)$  sont donc dans les groupes  $[\Sigma^{n+s-2} (B\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}, Z]$ . Or  $\text{map}_*(B\mathbb{Z}/p^{\wedge n}, Z)$  est  $(ns - 1)$ -connexe, ce qui suit de 3.2 combiné à 2.3. Donc comme  $ns - 1 > n + s - 2$

$$[\Sigma^{n+s-2} (B\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}, Z] = \pi_{n+s-2} \text{map}_*(B\mathbb{Z}/p^{\wedge n}, Z)$$

est trivial il suit que l'on peut étendre  $\varphi_s$  et qu'on a une contradiction avec 2.3.

#### 4. De l'utilisation des espaces profinis

Dans cette dernière section, comme annoncé en introduction, on explique comment travailler sans hypothèse de finitude, en utilisant la théorie des espaces (ensembles simpliciaux) profinis. On renvoie à [8, 2]- pour plus de détails. Un ensemble profini est un espace topologique muni d'une topologie qui le rend compact et complètement discontinu. La cohomologie modulo  $p$   $H^*X$  d'un espace profini  $X$ , définie dans [8], est naturellement munie d'une structure d'algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod. Le foncteur d'oubli de la topologie des espaces profinis dans les espaces ordinaires possède un adjoint à gauche  $X \rightarrow \widehat{X}$  appelé *complétion profinie*. L'application naturelle  $H^*Y \rightarrow H^*\widehat{Y}$  est un *isomorphisme* d'algèbres instables, donc de modules instables. Le théorème 2.1 s'applique sans restriction sur l'espace profini dans ce cadre. Comme la cohomologie d'un espace ordinaire est canoniquement isomorphe à celle de sa complétion profinie, on obtient les résultats énoncés en introduction *sans recourir à aucune hypothèse de finitude*.

Le lecteur se convaincra qu'on montre le résultat suivant, en remplaçant *espace* par *espace profini* dans le corps de l'article. La partie algébrique ne changeant pas.

**THÉORÈME 4.1.** — *Soit  $X$  un espace profini. Si  $H^*X \in \mathcal{U}_n$  alors  $H^*X$  est dans  $\mathcal{U}_0$ .*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. CASTELLANA, J. A. CRESPO & J. SCHERER, « Deconstructing Hopf spaces », *Invent. Math.* **167** (2007), n° 1, p. 1-18.
- [2] F. X. DEHON & G. GAUDENS, « Espaces profinis et problèmes de réalisabilité », *AGT* **3** (2003), p. 399-433.
- [3] N. KUHN, « On topologically realizing modules over the Steenrod algebra », *Ann. of Math.* **141** (1995), p. 321-347.
- [4] ———, « Topological non-realization results via the Goodwillie tower approach to iterated loop space homology », *AGT* **8** (2008), p. 2109-2129.
- [5] J. LANNES, « Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un  $p$ -groupe abélien élémentaire. », *Pub. I.H.E.S.* **75** (1992), p. 135-244.
- [6] J. LANNES & L. SCHWARTZ, « Sur la structure de  $\mathcal{A}$ -modules instables injectifs », *Topology* **28** (1989), p. 153-169.
- [7] H. MILLER, « The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces », *Ann. of Math. (2)* **120** (1984), n° 1, p. 39-87.
- [8] F. MOREL, « Ensembles profinis simpliciaux et interprétation géométrique du foncteur  $T$  », *Bull. Soc. Math. France* **124** (1996), n° 2, p. 347-373.
- [9] L. SCHWARTZ, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1994.

- [10] ———, « A propos de la conjecture de non-réalisation due à N. Kuhn », *Invent. Math.* **134** (1998), p. 211-227.
- [11] ———, « La filtration de Krull de la catégorie  $\mathcal{U}$  et la cohomologie des espaces », *AGT* **1** (2001), p. 519-548.
- [12] ———, « Erratum à A propos de la conjecture de non-réalisation due à N. Kuhn », *Invent. Math.* **182** (2010), p. 449-450.
- [13] G. WHITEHEAD, *Elements of homotopy theory*, GTM, vol. 6, Springer Verlag, 1978.

Manuscrit reçu le 2 juillet 2010,  
révisé le 7 décembre 2010,  
accepté le 15 décembre 2010.

Gérald GAUDENS  
Math. Institut,  
University of Bonn  
Endenicher Allee, 60;  
D-53115 Bonn, Germany  
geraldgaudens@hotmail.com

Lionel SCHWARTZ  
UMR CNRS 7539, LAGA  
Université PARIS 13  
Av. J.B. Clément,  
93430 Villetaneuse, France  
schwartz@math.univ-paris13.fr