ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Christophe BREUIL

Socle localement analytique I

Tome 66, n° 2 (2016), p. 633-685.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2016__66_2_633_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
66, 2 (2016) 633-685

SOCLE LOCALEMENT ANALYTIQUE I

par Christophe BREUIL (*)

RÉSUMÉ. — Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et n un entier > 0. À toute filtration de Hodge de poids de Hodge-Tate distincts sur une représentation de rang n suffisamment générique du groupe de Weil-Deligne de L, on associe une représentation localement $\mathbf{Q}_p$-analytique semi-simple de longueur finie de $\mathrm{GL}_n(L)$. On montre plusieurs propriétés de cette représentation. Par exemple, lorsqu'elle possède un réseau stable par $\mathrm{GL}_n(L)$, alors la filtration de départ est faiblement admissible.

ABSTRACT. — Let L be a finite extension of $\mathbf{Q}_p$ and n a positive integer. To each Hodge filtration with distinct Hodge-Tate weights on an n-dimensional sufficiently generic representation of the Weil-Deligne group of L, we associate a semi-simple finite length locally $\mathbf{Q}_p$-analytic representation of $\mathrm{GL}_n(L)$. We show several properties of this representation of $\mathrm{GL}_n(L)$. For instance, if it has an invariant lattice, then the starting Hodge filtration is weakly admissible.

1. Introduction

Soit p un nombre premier, L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, n un entier positif et $\overline{\rho}_p : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}_p})$ une représentation continue. Dans [8], puis [30], [21], [18] (et maintenant de nombreux articles) est associée à $\overline{\rho}_p$ une liste (finie) de représentations irréductibles distinctes de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_L)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ appelés poids de Serre. Lorsque $\overline{\rho}_p$ est la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$

Mots-clés : Représentation localement analytique, filtration de Hodge, socle.
Classification math. : 11S23, 22E35, 22E50.
(*) Je remercie pour leur soutien le CNRS, l'université Paris-Sud et le projet ThéHopaD ANR-2011-BS01-005. Je remercie L. Clozel, G. Dospinescu, G. Henniart, A. Kret et M. Strauch pour leurs réponses à mes questions, ainsi que S. Orlik pour ses commentaires. Je suis très reconnaissant à B. Schraen pour ses remarques et réponses à mes questions, à O. Schiffmann de m'avoir expliqué la théorie classique des modules de Verma et leurs liens avec la géométrie des variétés de Schubert, et à A. Minguez de m'avoir expliqué la structure des induites paraboliques pour GL_n au-delà des résultats de Zelevinsky [37]. Enfin, je remercie chaleureusement F. Herzig pour ses suggestions et remarques et pour de nombreux échanges.

d'une représentation galoisienne globale $\overline{\rho}$, il est conjecturé que cette liste donne les constituants irréductibles à multiplicité près apparaissant dans le $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_L)$-socle des représentations lisses de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ portées par les sous-espaces propres pour Hecke associés à $\overline{\rho}$ dans la cohomologie étale modulo p de tours de variétés de Shimura en p (lorsque ces sous-espaces propres sont non nuls). En particulier, la liste des poids de Serre est un premier pas dans la compréhension de ces représentations de $\mathrm{GL}_n(L)$, et la combinatoire de ces poids s'est révélée particulièrement riche et féconde. À la suite de [19], plusieurs auteurs ont démontré des cas partiels ou particuliers de ces conjectures sur les poids de Serre et les ont reliées à d'autres conjectures (voir par exemple [20]).

L'objectif de cet article est de commencer à développer ce qui pourrait être vu comme un "analogue" de cette théorie en caractéristique 0 en remplaçant les poids de Serre par certaines représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques irréductibles de $\mathrm{GL}_n(L)$. Plus précisément, soit $\rho_p : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L) \to \mathrm{GL}_n(E)$ une représentation continue où E est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant une clôture galoisienne de L. L'espoir à l'origine de ce travail est que l'on doit pouvoir associer à ρ_p une liste de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques irréductibles distinctes de $\mathrm{GL}_n(L)$ qui, lorsque ρ_p est la restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ d'une représentation galoisienne globale ρ, donne à multiplicité près les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques irréductibles de $\mathrm{GL}_n(L)$ apparaissant en sous-objets dans les (vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques des) représentations p-adiques continues unitaires de $\mathrm{GL}_n(L)$ portées par les sous-espaces propres pour Hecke associés à ρ dans le complété p-adique de la cohomologie étale de tours de variétés de Shimura en p. Dans cet article, nous nous contentons modestement d'associer à ρ_p, supposée potentiellement semi-stable et suffisamment générique, une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique semi-simple explicite de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E dont tous les constituants (distincts et en nombre fini) devraient faire partie d'une telle liste, et nous donnons un certain nombre d'arguments en cette faveur. Notons que nous utilisons de manière cruciale des résultats de Orlik et Strauch ([28]).

Rentrons plus en détail dans les résultats et constructions de l'article. Soit $\underline{D}$ une représentation de Weil-Deligne de rang $n \geqslant 1$, que l'on voit comme un "$(\varphi, N, \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L))$-module filtré sans sa filtration" (cf. §5), et $h_{1,\sigma} < \cdots < h_{n,\sigma}$ une liste de poids de Hodge-Tate distincts pour chaque plongement $\sigma : L \hookrightarrow E$. On suppose que les constituants irréductibles de $\underline{D}$ sont distincts et que les "segments" apparaissant dans $\underline{D}$ sont non liés au sens de Zelevinsky (cf. Hypothèses (5.1), (5.2)). Rappelons qu'à ces données on peut associer de manière naturelle une représentation localement algébrique $\pi(\underline{D}, \underline{h})$ de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E qui est ici irréductible (cf. [6, §4] ou §5).

À toute filtration de Hodge $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet} = (\cdots \subsetneq \mathrm{Fil}^{h_{i+1,\sigma}} \subsetneq \mathrm{Fil}^{h_{i,\sigma}} \subsetneq \cdots)_\sigma$ sur $\underline{D}$ de poids de Hodge-Tate $(h_{i,\sigma})_{i,\sigma}$ on associe une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique semi-simple de longueur finie $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E contenant le constituant $\pi(\underline{D}, \underline{h})$. Les constituants de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ sont découpés dans des induites paraboliques localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques grâce à la théorie de [28]. Le résultat principal, qui est une des motivations importantes pour la définition de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$, est le suivant :

Théorème 1.1 (cf. Corollaire 7.7). — *Si la représentation $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ contient un $\mathcal{O}_E$-réseau stable par $\mathrm{GL}_n(L)$ alors la filtration $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est faiblement admissible.*

Rappelons que, par $\mathcal{O}_E$-réseau, on entend un sous-$\mathcal{O}_E$-module générateur ouvert (ou, de manière équivalente, fermé) qui ne contient pas de E-droite.

Expliquons la définition de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ dans le cas le plus simple : $L = \mathbb{Q}_p$, $N = 0$ et l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ est triviale (cas “cristallin”). Fixons une base de vecteurs propres $(e_i)_{i\in\{1,\cdots,n\}}$ du Frobenius φ sur $\underline{D}$ de valeurs propres $\alpha_i \in E^\times$ (rappelons que les α_i sont distincts) et soit $B \subset \mathrm{GL}_n$ le Borel des matrices triangulaires inférieures, $\overline{B}$ celui des matrices triangulaires supérieures et $W \cong \mathfrak{S}_n$ le groupe de Weyl de GL_n. Soit ε le caractère cyclotomique p-adique (vu comme caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$) et $\chi_i : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ le caractère non ramifié envoyant p sur α_i. Pour w^{alg}, w deux éléments quelconques de W, considérons la série principale localement $\mathbb{Q}_p$-analytique :

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad \Big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} z_1^{-h_{w^{\mathrm{alg}-1}(1)}}(\chi_{w^{-1}(1)}\varepsilon^{-(n-1)})(z_1)\otimes \\ z_2^{-h_{w^{\mathrm{alg}-1}(2)}}(\chi_{w^{-1}(2)}\varepsilon^{-(n-2)})(z_2)\otimes \\ \cdots\otimes z_n^{-h_{w^{\mathrm{alg}-1}(n)}}\chi_{w^{-1}(n)}(z_n)\Big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}.\end{aligned}$$

Les résultats de Orlik et Strauch impliquent que cette série principale est de longueur finie. On vérifie ici qu'elle ne possède qu'une unique sous-représentation irréductible (Corollaire 2.5) que l'on note $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$, et que l'on peut (partiellement) décrire en utilisant la théorie de [28]. Noter qu'à w^{alg} fixé, il peut y avoir plusieurs w donnant le même $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ à isomorphisme près (cf. Lemme 6.2). Par exemple, si $w^{\mathrm{alg}} = 1$, tous les $C(1, w)$ sont isomorphes à $\pi(\underline{D}, \underline{h})$.

On peut voir la filtration de Hodge $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ exprimée dans la base $(e_i)_i$ comme un point sur la variété de drapeaux $\mathrm{GL}_n/\overline{B} = \coprod_{w\in W} \overline{B}w\overline{B}/\overline{B}$. On définit alors :

$$\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) = \bigoplus C(w^{\mathrm{alg}}, w)$$

où la somme directe porte sur les $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ distincts tels que :

$$\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet} \in w^{-1}\overline{\overline{B}w^{\mathrm{alg}}w_0\overline{B}/\overline{B}}. \tag{1.2}$$

Ici, $w_0 \in W$ est l'élément de longueur maximale et la longue barre signifie l'adhérence de Zariski (une variété de Schubert donc). Si $C(w^{\mathrm{alg}}, w) \cong C(w^{\mathrm{alg}}, w')$, on peut montrer que $w^{-1}\overline{\overline{B}w^{\mathrm{alg}}w_0\overline{B}/\overline{B}} = w'^{-1}\overline{\overline{B}w^{\mathrm{alg}}w_0\overline{B}/\overline{B}}$ (Lemme 6.3) de sorte que la représentation $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ est bien définie. Elle ne dépend pas non plus de l'ordre des vecteurs e_i. Notons que, lorsque $w^{\mathrm{alg}} = 1$, l'adhérence (1.2) est tout $\mathrm{GL}_n/\overline{B}$, et donc $C(1, w) \cong \pi(\underline{D}, \underline{h})$ est bien toujours un constituant de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$. La définition de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ dans le cas général est techniquement un peu plus compliquée (il faut tenir compte de tous les plongements $\sigma : L \hookrightarrow E$, remplacer les séries principales par des induites paraboliques et faire attention au cas $N \neq 0$), mais le principe est toujours donné par (1.2).

La preuve du Théorème 1.1 consiste alors à examiner les conditions nécessaires d'intégralité satisfaites par les constituants $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$. Rappelons que, si une série principale comme (1.1) possède un réseau invariant, alors Emerton a montré dans [14, Lem.4.4.2] que le caractère de $B(\mathbb{Q}_p)$ induisant devait satisfaire certaines conditions. Nous montrons ici que ces conditions restent valables si l'on suppose seulement que le *socle* $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ de la série principale a un réseau invariant (Corollaire 3.5). Quand on explicite toutes ces conditions pour tous les constituants de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$, on se rend compte que l'on tombe alors sur les conditions de faible admissibilité de $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ (Théorème 7.6), ce qui entraîne l'énoncé 1.1.

La représentation $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ vérifie plusieurs autres propriétés agréables qui la rendent "compatible" avec les quelques résultats déjà existants (et sont autant de tests). On en vérifie trois dans cet article :

(i). — On montre qu'elle est compatible avec les résultats de [6] de la façon suivante. Disons que $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est générique si elle est dans l'intersection des $w^{-1}\overline{B}w_0\overline{B}/\overline{B}$ pour tout $w \in W$ (voir Définition 8.1 pour la formulation exacte dans le cas général). On montre que $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) = \pi(\underline{D}, \underline{h})$ si et seulement si $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est générique (Lemme 8.2). Le Théorème 1.1 entraîne alors que si $\pi(\underline{D}, \underline{h})$ admet un réseau, toute filtration générique est faiblement admissible. On montre aussi que s'il existe une filtration $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ faiblement

admissible, alors il en existe une qui est de plus générique (Corollaire 8.3). Pour les $\underline{D}$ considérés ici, on retrouve donc en les précisant les résultats de [6, §§3,4,5] (où les filtrations construites étaient en fait génériques).

(ii). — Lorsque $n = 2$, $N = 0$ et l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ est triviale (mais L est quelconque), on montre que $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ pour $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ faiblement admissible redonne exactement le socle de la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $\mathrm{GL}_2(L)$ définie dans [1, §4] (cf. §8). Notons que, lorsque de plus $L = \mathbb{Q}_p$, $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ est contenu dans le socle de la représentation localement analytique donnée par la correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([9]) et lui est égal au moins lorsque $\underline{D}$ est réductible (il est probable que cela reste vrai lorsque $\underline{D}$ est irréductible).

(iii). — Lorsque $L = \mathbb{Q}_p$, $N = 0$ et $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est faiblement admissible et correspond à une représentation *ordinaire* ρ_p de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ (i.e. triangulaire supérieure), on montre que les constituants "unitaires" de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ (dans la situation "cristalline" ci-dessus, $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ est dit unitaire si le caractère de $B(\mathbb{Q}_p)$ dans l'induite (1.1) est entier) sont exactement les constituants du socle des vecteurs localement analytiques de la $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-représentation unitaire continue $\Pi(\rho_p)^{\mathrm{ord}}$ définie dans [3, §3.3] (Théorème 8.9). Notons que, dès que $n \geqslant 3$, la représentation $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ peut contenir des constituants *non unitaires*, et on peut espérer que ces constituants sont liés aux vecteurs localement analytiques d'une $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-représentation unitaire continue $\Pi(\rho_p)$ contenant strictement $\Pi(\rho_p)^{\mathrm{ord}}$ (et inconnue). En fait, l'existence de ces constituants non unitaires donnés par la définition (1.2) dès que $n \geqslant 3$ a été une autre motivation importante de cette définition.

Un certain nombre de questions se posent naturellement. Peut-on traiter d'autres représentations galoisiennes que les représentations potentiellement semi-stables, par exemple les représentations triangulines (cf. [9] pour $n = 2$ et $L = \mathbb{Q}_p$) ? Peut-on traiter des groupes réductifs plus généraux que GL_n ? Peut-on aller au-delà du socle, comme dans [1] ou [3] ou comme avec les poids de Serre dans [5] ? Y a-t-il d'autres constituants dans le socle localement $\mathbb{Q}_p$-analytique que ceux de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$? La réciproque au Théorème 1.1 est-elle vraie (généralisation de la conjecture [6, Conj.4.3]) ? Et enfin, la question la plus fondamentale : dans une situation globale, est-ce que tous les constituants de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ apparaissent bien dans les vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de la cohomologie complétée ? Nous renvoyons le lecteur à [2] pour plus de précisions (ainsi que quelques cas particuliers) sur cette dernière question.

Décrivons maintenant succintement le contenu de chaque section. Dans la section 2, on rappelle la théorie de [28] (que l'on a besoin d'étendre un peu, les détails étant relégués en appendice) et on précise le socle des induites paraboliques localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques considérées. Dans la section 3, on montre que les conditions nécessaires d'intégralité sont encore vérifiées si le socle seulement des induites paraboliques est supposé contenir un réseau stable. Dans la section 4, on rappelle quelques résultats sur les variétés de drapeaux et on en donne des démonstrations élémentaires. Dans la section 5, on rappelle la définition de la représentation localement algébrique $\pi(\underline{D},\underline{h})$. Dans la section 6, on définit la représentation $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ et on en donne des premières propriétés simples. Dans la section 7, on montre le Théorème 1.1 sous la forme plus précise mentionnée ci-dessus. Dans la dernière section 8, on démontre les propriétés (i), (ii) et (iii) précédentes. Enfin, un appendice contient les addenda techniques pour étendre certaines preuves d'analyse fonctionnelle p-adique de [28] et [26].

Terminons cette introduction avec les principales notations de l'article (les autres notations seront introduites au fur et à mesure).

Dans tout le texte, L (le corps de base) et E (le corps des coefficients) sont deux extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ telles que $|\mathcal{S}| = [L:\mathbb{Q}_p]$ où $\mathcal{S} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}(L,E)$. Si $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$, on note $|x|_L \overset{\text{déf}}{=} q^{-e\,\mathrm{val}(x)}$ où $q = p^f$ est le cardinal du corps résiduel de L, $e = [L:\mathbb{Q}_p]/f$ et val est normalisé par $\mathrm{val}(p) = 1$ (en particulier $|x|_L \in q^{\mathbb{Z}}$ si $x \in L$). On note ϖ_L une uniformisante quelconque de L (on a donc $\mathrm{val}(\varpi_L) = 1/e$ et $|\varpi_L|_L = q^{-1}$). On note également $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ le groupe de Weil de L et $\mathrm{rec} : W(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} L^{\times}$ l'application de réciprocité de la théorie du corps de classes local normalisée de sorte que les Frobenius *géométriques* s'envoient sur les uniformisantes.

Irréductible pour une représentation continue π d'un groupe topologique G veut toujours dire topologiquement irréductible, c'est-à-dire ne possédant pas de sous-espace non nul fermé et stable sous l'action du groupe. Le socle $\mathrm{soc}_G\,\pi$ d'une représentation π est la sous-représentation fermée de π qui est l'adhérence de la somme des sous-représentations fermées irréductibles de π (tous les socles considérés dans ce texte seront en fait de longueur finie). Les induites paraboliques sont toutes "droites", i.e. *non* normalisées.

Si G est un groupe p-adique L-analytique et V un E-espace vectoriel topologique localement convexe, on note $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,V)$ le E-espace vectoriel topologique localement convexe des fonctions localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de G à valeurs dans V ([34, §2]) et $D(G,E)$ le dual fort de $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G,E)$ (l'algèbre des distributions localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques sur G). Si Π est une représentation linéaire continue de G sur un E-espace de Banach, on note

$\Pi^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \subseteq \Pi$ la sous-G-représentation formée des vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques ([32, §7]).

2. Les représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques $\mathcal{F}_P^G(M, \pi_P)$

On rappelle les résultats principaux de Orlik et Strauch ([28]) et certains résultats de Orlik et Schraen ([26]) (étendus au cas d'un groupe algébrique $\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} G$ où G est réductif connexe déployé sur L). À part peut-être le Corollaire 2.5, cette section ne prétend à aucune originalité.

On fixe un groupe algébrique réductif connexe déployé G sur L et on suppose $p > 3$ si G a des facteurs de types différents de A (les résultats de cette section seront utilisés pour $G = \mathrm{GL}_n$ seulement où il n'y a donc pas de restriction sur p). On fixe également un tore maximal déployé $T \subset G$ et un sous-groupe de Borel $B = TN \subset G$ contenant T où N est le radical unipotent. On fixe encore un sous-groupe parabolique $P \subset G$ contenant B, et on note $\overline{P}$ le parabolique opposé, L_P le sous-groupe de Levi de P et $\overline{P}$, et N_P, $N_{\overline{P}}$ leur radical unipotent respectif (on a donc $P = L_P N_P$, $T \subseteq L_P$ et de même avec $\overline{P}$). On note $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}_P$ et $\mathfrak{n}_P$ les $\mathbb{Q}_p$-algèbres de Lie respectives des groupes p-adiques L-analytiques $G(L)$, $B(L)$, $N(L)$, $P(L)$, $L_P(L)$ et $N_P(L)$. Ce sont naturellement des L-espaces vectoriels et pour chaque plongement $\sigma : L \hookrightarrow E$, on définit les E-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\sigma \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{g} \otimes_{L,\sigma} E$ et de même $\mathfrak{b}_\sigma$, $\mathfrak{n}_\sigma$, $\mathfrak{p}_\sigma$, $\mathfrak{l}_{P,\sigma}$ et $\mathfrak{n}_{P,\sigma}$. En utilisant l'isomorphisme :

$$L \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} E, \ x \otimes y \mapsto (\sigma(x)y)_{\sigma \in \mathcal{S}} \tag{2.1}$$

on en déduit $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \cong \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathfrak{g}_\sigma$, $\mathfrak{b} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \cong \prod_{\sigma \in \mathcal{S}} \mathfrak{b}_\sigma$, etc. L'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ de la E-algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ est donc isomorphe à $\otimes_{\sigma \in \mathcal{S}} U(\mathfrak{g}_\sigma)$ et de même avec $U(\mathfrak{b} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$, $U(\mathfrak{n} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$, $U(\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$, $U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ et $U(\mathfrak{n}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$.

L'action induite de $U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ sur les représentations algébriques irréductibles de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} L_P) \times_{\mathbb{Q}_p} E$ sur E donne des $U(\mathfrak{l}_P \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-modules simples (de dimension finie sur E) que l'on appelle *algébriques*. Suivant [28, §2], on définit la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ comme la sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations E-linéaires de $\mathfrak{g}$ (ou de manière équivalente de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$) sur des E-espaces vectoriels formée des représentations M telles que :

(i) M est de type fini comme $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-module ;

(ii) $M|_{U(\mathfrak{l}_P\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}$ est une somme directe de $U(\mathfrak{l}_P\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules simples algébriques ;

(iii) pour tout $m\in M$, le sous-E-espace vectoriel $U(\mathfrak{n}_P\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\cdot m$ est de dimension finie sur E.

La catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ est abélienne (et même artinienne : tout objet est de longueur finie) et stable par sous-objet et quotient ([23, §1.11], [23, Prop.9.3] et [28, §2.5]). Si Q est un sous-groupe parabolique de G contenant P, la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}_{\mathrm{alg}}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$. Notons que, si M est un objet simple de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$, on a $M\cong\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}M_\sigma$ où M_σ est un objet simple de la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}_\sigma}_{\mathrm{alg}}$ (définie comme $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ en remplaçant $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$ par $\mathfrak{g}_\sigma$ et $\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$ par $\mathfrak{p}_\sigma$). En effet, soit $W\subseteq M$ un sous-$U(\mathfrak{l}_P\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module simple algébrique non nul, il est de la forme $W=\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}W_\sigma$ où W_σ est un $U(\mathfrak{l}_{P,\sigma})$-module simple algébrique. Par [23, §9.4], le module de Verma généralisé $U(\mathfrak{g}_\sigma)\otimes_{U(\mathfrak{p}_\sigma)}W_\sigma$ a un unique quotient simple M_σ et, en utilisant que M est l'unique quotient simple de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}W\cong\otimes_\sigma\big(U(\mathfrak{g}_\sigma)\otimes_{U(\mathfrak{p}_\sigma)}W_\sigma\big)$ (toujours [23, §9.4]), on voit que l'on a $M\cong\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}M_\sigma$.

Soit maintenant M un objet de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ et choisissons un sous-E-espace vectoriel W de M de dimension finie stable par $U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$ et qui engendre M sous l'action de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$. On a donc une suite exacte courte de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules :

$$0\longrightarrow\ker(\phi)\longrightarrow U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}W\xrightarrow{\ \phi\ }M\longrightarrow 0.$$

On munit W de la restriction à $P(L)\subset P(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)=((\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}P)\times_{\mathbb{Q}_p}E)(E)$ de l'unique action algébrique de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}P)\times_{\mathbb{Q}_p}E$ sur W relevant celle de $\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$ ([28, Lem.3.2]). Soit π_P une représentation lisse admissible de longueur finie de $L_P(L)$ sur E que l'on voit comme représentation de $P(L)$ par inflation, on définit l'induite parabolique localement $\mathbb{Q}_p$-analytique :

$$\begin{aligned}&\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\overset{\text{déf}}{=}\\&\big\{f\in C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),W'\otimes_E\pi_P),\ f(pg)=p\cdot f(g)\ \forall\,p\in P(L)\ \forall\,g\in G(L)\big\}\end{aligned}\tag{2.2}$$

où $W'\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Hom}_E(W,E)$ est muni de l'action duale $(p\cdot h)(w)\overset{\text{déf}}{=}h(p^{-1}w)$ et où $W'\otimes_E\pi_P$ est muni de la topologie localement convexe limite inductive $\varinjlim(W'\otimes_E\pi_P^K)$ pour K parcourant les sous-groupes ouverts compacts de $L_P(L)$ (cf. [28, §4.4]). On munit $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ d'une action à gauche de $G(L)$ par endomorphismes E-linéaires continus donnée par $(g\cdot f)(h)\overset{\text{déf}}{=}f(hg)$ $(g\in G(L))$.

On munit $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), W'\otimes_E \pi_P)$ d'une action à gauche de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (par endomorphismes E-linéaires continus) donnée par ($\mathfrak{x}\in\mathfrak{g}$) :

$$(\mathfrak{x}\cdot f)(g) \overset{\text{déf}}{=} \frac{d}{dt} f\big(\exp(-t\mathfrak{x})g\big)|_{t=0} \in W'\otimes_E \pi_P. \tag{2.3}$$

Cette dernière action en induit une de $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ sur $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), W'\otimes_E \pi_P)$ que l'on note encore $f\mapsto \mathfrak{x}\cdot f$. Un élément $\mathfrak{x}\otimes w$ de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)\otimes_E W$ donne donc une application E-linéaire continue :
(2.4)

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{x}\otimes w\ :\ C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), W'\otimes_E \pi_P) & \longrightarrow & C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), \pi_P) \\ f & \mapsto & (\mathfrak{x}\otimes w)\cdot f = \big(g\mapsto (\mathfrak{x}\cdot f)(g)(w)\big). \end{array}$$

Le lemme facile suivant est laissé au lecteur.

Lemme 2.1. — *Si $\mathfrak{x}\in U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$, $w\in W$ et $f\in \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\subset C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), W'\otimes_E \pi_P)$, on a :*

$$(\mathfrak{x}\otimes w)\cdot f = (1\otimes \mathfrak{x}w)\cdot f \in C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), \pi_P).$$

Le Lemme 2.1 permet de définir $\mathfrak{d}\cdot f\in C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P)$ pour $\mathfrak{d}\in U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} W$ et $f\in \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. On pose alors comme dans [28] :

$$\begin{aligned} &\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\ker(\phi)} \\ &\qquad \overset{\text{déf}}{=} \Big\{ f\in \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}, \mathfrak{d}\cdot f = 0\ \forall\ \mathfrak{d}\in \ker(\phi)\Big\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

qui est un sous-espace fermé de $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ clairement stable par $G(L)$. C'est une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique admissible de $G(L)$ au sens de [34] car sous-représentation fermée de la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique fortement admissible $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ (cf. preuve de [28, Prop.4.8]).

On note $D(G(L),E)\ker(\phi)\subseteq D(G(L),E)\otimes_{D(P(L),E)}(W\otimes_E \pi'_P)$ le sous-$D(G(L),E)$-module engendré par l'image de $\ker(\phi)\otimes_E \pi'_P$ via l'application canonique :

$$\begin{aligned} &\big(U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} W\big)\otimes_E \pi'_P \\ &\cong U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)}(W\otimes_E \pi'_P)\longrightarrow D(G(L),E)\otimes_{D(P(L),E)}(W\otimes_E \pi'_P). \end{aligned}$$

Le lemme suivant, dans lequel $(*)'$ désigne le dual fort de $*$, sera utile.

Lemme 2.2. — *On a un diagramme canonique de $D(G(L),E)$-modules où les applications verticales sont toutes surjectives et les applications horizontales toutes d'image dense :*

$$\begin{array}{ccc}
D(G(L),E)\otimes_E(W\otimes_E\pi'_P) & \rightarrow & (C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),W'\otimes_E\pi_P))' \\
\downarrow & & \downarrow \\
D(G(L),E)\otimes_{D(P(L),E)}(W\otimes_E\pi'_P) & \rightarrow & \Big(\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\Big)' \\
\downarrow & & \downarrow \\
(D(G(L),E)\otimes_{D(P(L),E)}(W\otimes_E\pi'_P))/D(G(L),E)\ker(\phi) & \rightarrow & \Big(\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\ker(\phi)}\Big)'.
\end{array}$$

Démonstration. — L'application canonique continue :

$$\begin{array}{ccc}
W\otimes_E\pi'_P & \longrightarrow & \big(C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),W'\otimes_E\pi_P)\big)' \\
x & \longmapsto & \big(f\mapsto x(f(1))\big)
\end{array}$$

induit une application canonique de $D(G(L),E)$-modules :

$$D(G(L),E)\otimes_E(W\otimes_E\pi'_P)\longrightarrow\big(C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),W'\otimes_E\pi_P)\big)'$$

qui envoie $\delta_g\otimes x$ sur $(f\mapsto x(f(g^{-1})))$ (où $g\in G(L)$ et δ_g est la distribution de Dirac en g) et $\mathfrak{x}\otimes x\in U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_E(W\otimes_E\pi'_P)\subseteq D(G(L),E)\otimes_E(W\otimes_E\pi'_P)$ sur $\big(f\mapsto x((\mathfrak{x}\cdot f)(1))\big)$ (où $(\mathfrak{x}\cdot f)(1)$ est comme en (2.3)). Il suit alors facilement de la définition de l'induite parabolique $(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P))^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ et de son sous-espace fermé $(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P)^{\ker(\phi)}$ que l'on a un diagramme commutatif comme dans l'énoncé où toutes les applications verticales sont surjectives. Il reste à montrer que les applications horizontales sont d'image dense. Par la surjectivité des applications verticales, il suffit de le faire pour $D(G(L),E)\otimes_E(W\otimes_E\pi'_P)\to(C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),W'\otimes_E\pi_P))'$ (pour les deux autres : utiliser le diagramme commutatif et le fait qu'un sous-espace est dense si et seulement si toute forme linéaire continue qui s'annule sur ce sous-espace est identiquement nulle). Soit $G(L)=\amalg_i G_i$ un recouvrement de $G(L)$ par des ouverts compacts disjoints (quelconques), alors on a (cf. [34, §2]) :

$$C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),W'\otimes_E\pi_P)=\prod_i C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G_i,W'\otimes_E\pi_P)$$

et donc :

$$\big(C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),W'\otimes_E\pi_P)\big)'=\bigoplus_i\big(C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G_i,W'\otimes_E\pi_P)\big)'.$$

On a de même $D(G(L),E)=\oplus_i D(G_i,E)$ d'où :

$$D(G(L),E)\otimes_E(W\otimes_E\pi'_P)=\bigoplus_i\big(D(G_i,E)\otimes_E(W\otimes_E\pi'_P)\big).$$

On voit donc qu'il suffit de montrer que chaque morphisme :

$$D(G_i,E)\otimes_E (W\otimes_E \pi'_P) \longrightarrow \big(C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G_i,W'\otimes_E \pi_P)\big)'$$

est d'image dense. Comme G_i est compact, $D(G_i,E)$ est un espace de Fréchet réflexif ([34, Lem.2.1]), de même que $W\otimes_E \pi'_P$ (car dual d'une limite inductive d'espaces de dimension finie), et il est facile de voir que $(C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G_i,W'\otimes_E \pi_P))'$ est le Fréchet complété du produit tensoriel d'espaces de Fréchet $D(G_i,E)\otimes_E (W\otimes_E \pi'_P)$ (utiliser par exemple [14, Prop.2.1.28], [33, Prop.20.13] et [33, Cor.20.14]). En particulier l'image de $D(G_i,E)\otimes_E (W\otimes_E \pi'_P)$ est dense dans $(C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G_i,W'\otimes_E \pi_P))'$. □

On dit que P est maximal pour un objet M de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ si M n'est pas dans la sous-catégorie pleine $\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}_{\mathrm{alg}}$ de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ pour un sous-groupe parabolique $Q\subseteq G$ contenant strictement P.

Théorème 2.3.

(i) La représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\ker(\phi)}$ est indépendante du choix de W.

(ii) La construction $(M,\pi_P)\mapsto \mathcal{F}^G_P(M,\pi_P) \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\ker(\phi)}$ est fonctorielle et exacte en les deux arguments.

(iii) Si M est simple, P est maximal pour M et π_P est irréductible, la représentation $\mathcal{F}^G_P(M,\pi_P)$ de $G(L)$ est irréductible.

On renvoie à l'appendice pour des détails techniques sur la preuve de ce théorème (en particulier les points où les preuves de [28] sont à adapter ou à compléter).

À tout objet M de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ et toute représentation lisse admissible π_P de $L_P(L)$, on a donc fonctoriellement associé une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique admissible $\mathcal{F}^G_P(M,\pi_P)$ de $G(L)$, qui est de plus irréductible si M et π_P le sont et si P est maximal pour M. Si $Q\supseteq P$ est un sous-groupe parabolique tel que $M\in\mathcal{O}^{\mathfrak{q}}_{\mathrm{alg}}$, on a par la même preuve que dans [28, Prop.4.10(b)] :

$$\mathcal{F}^G_P(M,\pi_P)\cong \mathcal{F}^G_Q\big(M,\mathrm{Ind}_{P(L)\cap L_Q(L)}^{L_Q(L)}\pi_P\big) \tag{2.6}$$

où $\mathrm{Ind}_{P(L)\cap L_Q(L)}^{L_Q(L)}\pi_P$ est l'induite parabolique lisse (de longueur finie).

Soit W une représentation algébrique irréductible de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} L_P)\times_{\mathbb{Q}_p} E$ de dimension finie sur E et soit $\lambda_W=\otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}\lambda_{W,\sigma}$ son plus haut poids où $\lambda_{W,\sigma}$ est un caractère algébrique de $T\times_{L,\sigma} E$. Soit $Q\supseteq P$ le plus grand sous-groupe parabolique de G tel que, pour *tout* $\sigma\in\mathcal{S}$, $\lambda_{W,\sigma}$ est le poids dominant par rapport à $B\times_{L,\sigma} E$ d'une représentation algébrique de $L_Q\times_{L,\sigma} E$. Rappelons que le module de Verma généralisé

$U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} W$ a un unique quotient simple M ([23, §9.4]) et Q est son parabolique maximal ([23, Prop.9.3(e)] et [23, Th.9.4(a)]). De plus, tout objet simple M de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ s'obtient comme cela ([23, Th.1.3]).

Proposition 2.4. — *Soit W, Q, M comme ci-dessus et π_Q une représentation lisse admissible de longueur finie de $L_Q(L)$ sur E. Soit $\mathcal{F}^G_Q(M,\pi_Q)'$ (resp. π'_Q) le dual continu (resp. algébrique) de $\mathcal{F}^G_Q(M,\pi_Q)$ (resp. π_Q) muni de l'action duale de $G(L)$, on a un isomorphisme de $L_Q(L)$-représentations :*

$$H^0\big(N_Q(L),\mathcal{F}^G_Q(M,\pi_Q)'\big)=W(Q)\otimes_E\pi'_Q$$

où $W(Q)$ est l'unique représentation algébrique irréductible de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} L_Q)\times_{\mathbb{Q}_p} E$ sur E de plus haut poids λ_W.

La preuve de cette proposition est calquée sur celle de [26, Prop.3.5], et on renvoie encore à l'appendice pour les détails.

Corollaire 2.5. — *Soit W, Q, M comme dans la Proposition 2.4 et π_P une représentation lisse admissible de longueur finie de $L_P(L)$ sur E, on a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{soc}_{G(L)}\,\mathcal{F}^G_P(M,\pi_P) &= \mathcal{F}^G_Q\big(M,\mathrm{soc}_{L_Q(L)}\,\mathrm{Ind}^{L_Q(L)}_{P(L)\cap L_Q(L)}\,\pi_P\big)\\ &= \mathrm{soc}_{G(L)}\,\big(\mathrm{Ind}^{G(L)}_{P(L)}\,W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Rappelons que les représentations lisses $\mathrm{Ind}^{L_Q(L)}_{P(L)\cap L_Q(L)}\,\pi_P$ et $\mathrm{soc}_{L_Q(L)}\,\mathrm{Ind}^{L_Q(L)}_{P(L)\cap L_Q(L)}\,\pi_P$ sont aussi de longueur finie. Par (2.6) et le Théorème 2.3, les constituants de $\mathcal{F}^G_P(M,\pi_P)$ sont les $\mathcal{F}^G_Q\big(M,\pi_Q\big)$ pour π_Q constituant de $\mathrm{Ind}^{L_Q(L)}_{P(L)\cap L_Q(L)}\,\pi_P$. Par la Proposition 2.4, si $\mathcal{F}^G_Q\big(M,\pi_Q\big)$ est une sous-représentation irréductible de $\mathcal{F}^G_P(M,\pi_P)$ alors $W(Q)\otimes_E\pi'_Q$ est un quotient irréductible de $W(Q)\otimes_E\big(\mathrm{Ind}^{L_Q(L)}_{P(L)\cap L_Q(L)}\,\pi_P\big)'$ d'où on déduit que π_Q est un constituant du socle de $\mathrm{Ind}^{L_Q(L)}_{P(L)\cap L_Q(L)}\,\pi_P$. Cela donne la première égalité de l'énoncé. Soit $\widetilde{M}$ un constituant irréductible de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} W$ distinct de M, $\widetilde{Q}$ son parabolique maximal et soit $\pi_{\widetilde{Q}}$ une représentation lisse admissible irréductible quelconque de $L_{\widetilde{Q}}(L)$ sur E. Pour montrer la deuxième égalité, il suffit (toujours par le Théorème 2.3) de montrer que la représentation irréductible $\mathcal{F}^G_{\widetilde{Q}}(\widetilde{M},\pi_{\widetilde{Q}})$ ne peut jamais être une sous-$G(L)$-représentation de $\big(\mathrm{Ind}^{G(L)}_{P(L)}\,W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. Supposons qu'elle le soit, en passant aux duaux et en utilisant le Lemme 2.2, on a alors des applications continues de $D(G(L),E)$-modules dont la première est d'image dense et la deuxième est surjective :

$$D(G(L),E)\otimes_{D(P(L),E)}(W\otimes_E \pi'_P) \rightarrow \Big(\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\Big)' \twoheadrightarrow \mathcal{F}_{\widetilde{Q}}^{G}(\widetilde{M},\pi_{\widetilde{Q}})'. \tag{2.7}$$

On en déduit en particulier une application non nulle $L_P(L)$-équivariante :

$$W\otimes_E \pi'_P \longrightarrow H^0\big(N_P(L),\mathcal{F}_{\widetilde{Q}}^{G}(\widetilde{M},\pi_{\widetilde{Q}})'\big).$$

Mais, toujours par la Proposition 2.4 :

$$\begin{aligned}H^0\big(N_P(L),\mathcal{F}_{\widetilde{Q}}^{G}(\widetilde{M},\pi_{\widetilde{Q}})'\big)&\\ &= H^0\big(N_P(L)\cap L_{\widetilde{Q}}(L), H^0\big(N_{\widetilde{Q}}(L),\mathcal{F}_{\widetilde{Q}}^{G}(\widetilde{M},\pi_{\widetilde{Q}})'\big)\big)\\ &= H^0\big(N_P(L)\cap L_{\widetilde{Q}}(L),\widetilde{W}\otimes_E \pi'_{\widetilde{Q}}\big)\end{aligned}$$

où $\widetilde{W}$ est l'unique représentation algébrique irréductible de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}L_{\widetilde{Q}})\times_{\mathbb{Q}_p}E$ sur E telle que $\widetilde{M}$ est le quotient simple de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\widetilde{\mathfrak{q}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}\widetilde{W}$. Notons $\mathfrak{u}_P$ (resp. $\mathfrak{u}_{\widetilde{Q}}$) la $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Lie de $N(L)\cap L_P(L)$ (resp. $N(L)\cap L_{\widetilde{Q}}(L)$) et soit v^+ (resp. $\widetilde{v}^+$) un vecteur de plus haut poids de W (resp. $\widetilde{W}$). On en déduit que $Ev^+\otimes_E \pi'_P\cong H^0\big(\mathfrak{u}_P\otimes_{\mathbb{Q}_p}E, W\otimes_E \pi'_P\big)$ a une image non nulle dans :

$$\begin{aligned}H^0\big(\mathfrak{u}_P\otimes_{\mathbb{Q}_p}E, H^0\big(N_P(L)\cap L_{\widetilde{Q}}(L),\widetilde{W}\otimes_E \pi'_{\widetilde{Q}}\big)\big)&\\ &\hookrightarrow H^0\big(\mathfrak{u}_{\widetilde{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,\widetilde{W}\otimes_E \pi'_{\widetilde{Q}}\big)\ \cong\ E\widetilde{v}^+\otimes_E \pi'_{\widetilde{Q}}.\end{aligned}$$

En regardant l'action de la $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Lie de $T(L)$ (agissant trivialement sur π'_P et $\pi'_{\widetilde{Q}}$), on voit que v^+ et $\widetilde{v}^+$ doivent avoir même poids, ce qui est impossible puisque $M\not\cong \widetilde{M}$. □

Remarque 2.6. — La preuve de la deuxième égalité du Corollaire 2.5 m'a été signalée par B. Schraen (ma preuve initiale était plus compliquée).

Le corollaire qui suit étend [26, Cor.3.6].

Corollaire 2.7. — *Soit M_1 et M_2 deux objets simples de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$, Q_1 et Q_2 leurs paraboliques maximaux, π_{Q_1} et π_{Q_2} deux représentations lisses admissibles de longueur finie respectivement de $L_{Q_1}(L)$ et $L_{Q_2}(L)$ sur E. Alors on a $\mathcal{F}_{Q_1}^G(M_1,\pi_{Q_1})\cong\mathcal{F}_{Q_2}^G(M_2,\pi_{Q_2})$ si et seulement si $M_1\cong M_2$ et $\pi_{Q_1}\cong\pi_{Q_2}$.*

Démonstration. — Supposons $\mathcal{F}_{Q_1}^G(M_1,\pi_{Q_1})\cong\mathcal{F}_{Q_2}^G(M_2,\pi_{Q_2})$. Pour $i\in\{1,2\}$ soit v_i^+ un vecteur de plus haut poids dans M_i. Comme dans la preuve de [26, Prop.3.5] (cf. l'appendice), on a un isomorphisme $H^0\big(\mathfrak{n}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E, \mathcal{F}^G_{Q_i}(M_i,\pi_{Q_i})'\big)\cong Ev_i^+\otimes_E \pi'_{Q_i}$ compatible à l'action de la $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Lie de $T(L)$ (agissant trivialement sur π'_{Q_i}). On en déduit que les plus haut poids de M_1 et M_2 sont les mêmes. On a donc $M_1=M_2$, $Q_1=Q_2$ et la Proposition 2.4 entraîne $\pi_{Q_1}\cong \pi_{Q_2}$. $\square$

En particulier par le Théorème 2.3 la série principale $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W'\otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ a un socle (absolument) irréductible si et seulement s'il en est de même de $\mathrm{Ind}_{P(L)\cap L_Q(L)}^{L_Q(L)}\pi_P$.

3. Conditions nécessaires d'intégralité pour les $\mathcal{F}^G_P(M,\pi_P)$

On déduit des résultats de [14] (et de [28]) certaines conditions nécessaires pour l'existence d'un $\mathcal{O}_E$-réseau stable par $G(L)$ sur la représentation $\mathcal{F}^G_P(M,\pi_P)$ du §2.

On conserve les notations du §2 et on rajoute les suivantes : $\overline{N}$ est le radical unipotent de $\overline{B}$ et $\overline{\mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{p}}$, $\overline{\mathfrak{n}}$ et $\mathfrak{n}_{\overline{P}}$ les $\mathbb{Q}_p$-algèbres de Lie respectives des groupes p-adiques L-analytiques $\overline{B}(L)$, $\overline{P}(L)$, $\overline{N}(L)$ et $N_{\overline{P}}(L)$.

Soit π_P une représentation lisse admissible de longueur finie de $L_P(L)$ sur E, M un objet de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$, $W\subseteq M$ comme au §2 et $\phi: U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)} W\twoheadrightarrow M$ une surjection de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules. Rappelons que l'on a une application canonique (cf. §2) :

$$\big(U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}W\big)\otimes_E\pi'_P\longrightarrow D(G(L),E)\otimes_{D(P(L),E)}(W\otimes_E\pi'_P).$$

Lemme 3.1. — *Soit V une représentation algébrique de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}P)\times_{\mathbb{Q}_p}E$ de dimension finie sur E, $\psi: U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}V\longrightarrow M$ un morphisme quelconque de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules et $v\in V$. Soit $f\in\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\ker(\phi)}=\mathcal{F}^G_P(M,\pi_P)$ et h son image dans $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}V'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}=\mathcal{F}^G_P\big(U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}V,\pi_P\big)$. Alors on a :*

$$h(\cdot)(v)=\mathfrak{d}_v\cdot f$$

dans $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P)$ où $\mathfrak{d}_v$ est un élément quelconque de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}W$ tel que $\phi(\mathfrak{d}_v)=\psi(1\otimes v)$ dans M et $\mathfrak{d}_v\cdot f$ est la fonction définie au §2.

Démonstration. — En identifiant M à $\big(U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes W\big)/\ker(\phi)$ via ϕ, le morphisme de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules $\psi: U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes V\to\big(U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes$

$W\big)/\ker(\phi)$ induit un morphisme de $D(G(L),E)$-modules encore noté ψ :

$$\begin{aligned}\psi : D(G(L),E) \otimes_{D(P(L),E)} (V \otimes_E \pi'_P) \\ \longrightarrow \big(D(G(L),E) \otimes_{D(P(L),E)} (W \otimes_E \pi'_P)\big)/D(G(L),E)\ker(\phi)\end{aligned}$$

tel que $\psi(1 \otimes v \otimes f) = \overline{\mathfrak{d}_v \otimes f}$ pour tout $f \in \pi'_P$. On a donc un diagramme commutatif de $D(G(L),E)$-modules :
(3.1)

$$\begin{tikzcd} D(G(L),E) \otimes_E \pi'_P \arrow[r, "\mathfrak{d}_v \otimes \cdot"] \arrow[d, "v\otimes\cdot"] & D(G(L),E) \otimes_{D(P(L),E)} (W \otimes_E \pi'_P) \arrow[d, twoheadrightarrow] \\ D(G(L),E) \otimes_{D(P(L),E)} (V \otimes_E \pi'_P) \arrow[r, "\psi"] & \frac{D(G(L),E) \otimes_{D(P(L),E)} (W \otimes_E \pi'_P)}{D(G(L),E)\ker(\phi)} \end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{d}_v \otimes \cdot$ (resp. $v \otimes \cdot$) est l'unique application de $D(G(L),E)$-modules induite par $1 \otimes f \mapsto \mathfrak{d}_v \otimes f$ (resp. $1 \otimes f \mapsto 1 \otimes v \otimes f$) pour $f \in \pi'_P$. Considérons le diagramme de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $G(L)$:

$$\begin{tikzcd} C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P) & \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \arrow[l, "\mathfrak{d}_v \cdot"'] \\ \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} V' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \arrow[u, "\text{éval}_v"] & \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\ker(\phi)} \arrow[l] \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

où éval$_v$ est l'évaluation en v et où l'action de $G(L)$ sur $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P)$ est l'action par translation à droite $(g \cdot f)(g') = f(g'g)$. Notons :

$$\Delta : \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\ker(\phi)} \longrightarrow C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P)$$

la différence des deux applications obtenues en considérant les deux "chemins" du diagramme (3.2). Par le Lemme 2.2 et la commutativité du diagramme (3.1) (et des fonctorialités évidentes), on déduit que l'application duale (continue) :

$$\Delta' : \big(C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P)\big)' \longrightarrow \Big(\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\ker(\phi)}\Big)'$$

est nulle sur un sous-espace dense de $\big(C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P)\big)'$ (l'image de $D(G(L),E) \otimes_E \pi'_P$, cf. Lemme 2.2). Elle est donc identiquement nulle, d'où la commutativité du diagramme dual de (3.2). Par Hahn-Banach (cf. [33, Cor.9.3]), on en déduit facilement que le diagramme (3.2) est aussi commutatif. □

Proposition 3.2. — *Soit M un objet simple de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ et π_P une représentation lisse admissible de longueur finie de $L_P(L)$ sur E. Soit $W \subseteq$*

$M|_{U(\mathfrak{l}_P\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}$ un sous-$U(\mathfrak{l}_P\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module simple (donc de dimension finie sur E) que l'on voit comme $U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module via $U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\twoheadrightarrow U(\mathfrak{l}_P\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$ et f un élément de $\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ tel que la restriction $f|_{N_{\overline{P}}(L)}$ est localement constante. Alors on a $f\in\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\ker(\phi)}=\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)$.

Démonstration. — On fait agir $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$ à gauche sur $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P)$ par l'action usuelle (2.3). À tout $f\in\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)}W'\otimes_E\pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ est associé un morphisme de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules à gauche :

$$\Delta_f\ :\ U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}W\longrightarrow C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P),\ \mathfrak{d}\mapsto\mathfrak{d}\cdot f$$

où rappelons que $\mathfrak{d}\cdot f$ est la fonction $\big(g\mapsto(\mathfrak{x}\cdot f)(g)(w)\big)=\mathfrak{x}\cdot\big(g\mapsto f(g)(w)\big)$ si $\mathfrak{d}=\mathfrak{x}\otimes w$, cf. (2.4). Par définition de $\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)$ (cf. (2.5)), il s'agit donc de montrer que $\Delta_f(\ker(\phi))=0$ pour M, W et f comme dans l'énoncé. On peut supposer $f\neq 0$, et il revient au même de montrer que le sous-$U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module $\mathrm{im}(\Delta_f)$ de $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P)$ image de Δ_f, vu comme quotient de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}W$, est isomorphe au quotient simple M (car $\mathrm{im}(\Delta_f)\neq 0$, rappelons que M est l'unique quotient simple de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}W$, cf. [23, §9.4]). Notons que $f\in\mathcal{F}_P^G(\mathrm{im}(\Delta_f),\pi_P)$ et que $\mathrm{im}(\Delta_f)$ est le sous-$U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module de $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L),\pi_P)$ engendré par la fonction non nulle $g\mapsto f(g)(w)$ pour un quelconque $w\in W\backslash\{0\}$ puisque W est un $U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module simple (cf. Lemme 2.1). Comme M est l'unique quotient simple de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}W$, on a aussi un diagramme commutatif de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules (quitte à multiplier ϕ ou f par un scalaire non nul) :

$$\begin{tikzcd}
U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}W \arrow[r, two heads, "\Delta_f"] \arrow[dr, two heads, "\phi"] & \mathrm{im}(\Delta_f) \arrow[d, two heads] \\
 & M.
\end{tikzcd}$$

Supposons que la surjection $\mathrm{im}(\Delta_f)\twoheadrightarrow M$ *n*'est *pas* un isomorphisme, ou de manière équivalent que $\mathrm{im}(\Delta_f)$ n'est pas un objet simple de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$. Par [23, §1.3] et [23, §9.3], tout objet simple de $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$ est quotient d'un module de Verma généralisé, donc il existe un morphisme de $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules $\psi:U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}V\longrightarrow\mathrm{im}(\Delta_f)$ avec V simple dont l'image est un sous-objet simple non nul de $\mathrm{im}(\Delta_f)$. En particulier on a une suite exacte dans $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{alg}}$:

$$U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}V\xrightarrow{\psi}\mathrm{im}(\Delta_f)\longrightarrow\widetilde{M}\longrightarrow 0$$

où $\widetilde{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{im}(\Delta_f)/\mathrm{im}(\psi)$ est un quotient strict non nul de $\mathrm{im}(\Delta_f)$ puisque $\mathrm{im}(\Delta_f)$ n'est pas simple. On a en particulier $f \notin \mathcal{F}_P^G(\widetilde{M}, \pi_P)$ par définition de $\mathcal{F}_P^G(\widetilde{M}, \pi_P)$. Par exactitude de $\mathcal{F}_P^G(\cdot, \pi_P)$, on en déduit une suite exacte de représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $G(L)$:

$$0 \to \mathcal{F}_P^G(\widetilde{M}, \pi_P) \to \mathcal{F}_P^G(\mathrm{im}(\Delta_f), \pi_P) \to \left(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} V' \otimes_E \pi_P\right)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \tag{3.3}$$

et il suffit de monter que $f \in \mathcal{F}_P^G(\mathrm{im}(\Delta_f), \pi_P)$ a toujours une image nulle dans $\left(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} V' \otimes_E \pi_P\right)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. En effet, on déduit alors de (3.3) que $f \in \mathcal{F}_P^G(\widetilde{M}, \pi_P)$ ce qui est une contradiction.

Soit h l'image de f dans $\left(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} V' \otimes_E \pi_P\right)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$, comme h est une fonction localement analytique sur $G(L)$ et $P(L)N_{\overline{P}}(L)$ est un ouvert dense de $G(L)$ (isomorphe à la "grosse cellule"), pour avoir $h = 0$ il suffit de montrer $h|_{P(L)N_{\overline{P}}(L)} = 0$. Comme $h(pg)(v) = p \cdot \big(h(g)(p^{-1}v)\big)$ ($p \in P(L)$, $g \in G(L)$), on voit que la fonction $h|_{P(L)N_{\overline{P}}(L)}$ est déterminée par les restrictions $h(\cdot)(v)|_{N_{\overline{P}}(L)}$ pour v parcourant une base de V sur E. Il suffit donc de montrer $h(\cdot)(v)|_{N_{\overline{P}}(L)} = 0$ pour $v \in V$ quelconque. Soit $v \in V$ et $\mathfrak{d}_v \in U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} W$ tel que $\psi(1 \otimes v)$ est l'image de $\mathfrak{d}_v$ dans $\mathrm{im}(\Delta_f)$ par la surjection Δ_f. Par le Lemme 3.1, on a $\mathfrak{d}_v \cdot f = h(\cdot)(v)$ dans $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G(L), \pi_P)$ et il suffit donc de montrer $(\mathfrak{d}_v \cdot f)|_{N_{\overline{P}}(L)} = 0$.

Comme l'image de ψ dans $\mathrm{im}(\Delta_f)$ est un sous-module *strict* de $\mathrm{im}(\Delta_f)$ par construction, les $\mathfrak{d}_v$ sont tous de la forme $\sum_{i=1}^n \mathfrak{y}_i \otimes w_i$ dans $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} W \cong U(\mathfrak{n}_{\overline{P}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \otimes_E W$ où $W = \oplus_{i=1}^n E w_i$ et $\mathfrak{y}_i \in U(\mathfrak{n}_{\overline{P}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) = \otimes_{\sigma \in \mathcal{S}} U(\mathfrak{n}_{\overline{P},\sigma})$ est une somme de monômes de degrés *strictement* positifs (rappellons que $U(\mathfrak{n}_{\overline{P},\sigma}) = \oplus_{(n_i)_i \geqslant 0} E \mathfrak{y}_{1,\sigma}^{n_1} \cdots \mathfrak{y}_{r,\sigma}^{n_r}$ où $(\mathfrak{y}_{i,\sigma})_i$ est une base de $\mathfrak{n}_{\overline{P},\sigma}$ sur E). Cela se déduit par des arguments de poids par exemple en utilisant que $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} W$ est un module de plus haut poids (car W est simple) et [23, §1.2]. Donc $\mathfrak{d}_v \cdot f = \sum_{i=1}^n (\mathfrak{y}_i \otimes w_i) \cdot f = \sum_{i=1}^n \mathfrak{y}_i \cdot f(\cdot)(w_i)$. Mais pour tout i on a, puisque $f|_{N_{\overline{P}}(L)}$ (et donc aussi $f(\cdot)(w_i)|_{N_{\overline{P}}(L)}$) est localement constant et les $\mathfrak{y}_i \in U(\mathfrak{n}_{\overline{P}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ font intervenir des monômes de degrés tous > 0 :

$$\big(\mathfrak{y}_i \cdot f(\cdot)(w_i)\big)|_{N_{\overline{P}}(L)} = \mathfrak{y}_i \cdot \big(f(\cdot)(w_i)|_{N_{\overline{P}}(L)}\big) = 0,$$

où dans le deuxième terme $U(\mathfrak{n}_{\overline{P}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ agit dans $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(N_{\overline{P}}(L), \pi_P)$ par l'action usuelle (2.3). On obtient $(\mathfrak{d}_v \cdot f)|_{N_{\overline{P}}(L)} = 0$ ce qui achève la preuve. □

Soit Z_{L_P} le centre du Levi L_P et fixons un sous-groupe ouvert compact $N_{\overline{P}}^0$ de $N_{\overline{P}}(L)$. Posons suivant [14, §3.3] :

$$L_P(L)^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{g \in L_P(L),\ g N_{\overline{P}}^0 g^{-1} \subseteq N_{\overline{P}}^0\}. \tag{3.4}$$

(resp. $Z_{L_P}(L)^+ \stackrel{\text{déf}}{=} Z_{L_P}(L) \cap L_P(L)^+$). C'est un sous-monoïde générateur du groupe $L_P(L)$ (resp. $Z_{L_P}(L)$) contenant un sous-groupe ouvert compact de $L_P(L)$ (resp. $Z_{L_P}(L)$). Notons que $L_P(L)^+$, et donc $Z_{L_P}(L)^+$, contient aussi $Z_G(L)$ où Z_G est le centre de G. Si Π_P est une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $P(L)$ sur E, son sous-espace $\Pi_P^{N_{\overline{P}}^0}$ des invariants sous $N_{\overline{P}}^0$ est naturellement muni d'une action de Hecke continue du monoïde $L_P(L)^+$: voir [14, §3.4].

Corollaire 3.3. — *Soit M, W et π_P comme dans la Proposition 3.2, l'injection $\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P) \hookrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ induit un isomorphisme compatible à l'action de $L_P(L)^+$:*

$$\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)^{N_{\overline{P}}^0} \xrightarrow{\sim} \Big(\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\Big)^{N_{\overline{P}}^0}.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer la surjectivité.
Si $f \in \big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ est fixé par $N_{\overline{P}}^0$, $f|_{N_{\overline{P}}(L)}$ est en particulier localement constant et par la Proposition 3.2 on a $f \in \mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)$. $\square$

Corollaire 3.4. — *Soit M, W et π_P comme dans la Proposition 3.2 et $\delta_{\overline{P}} : \overline{P}(L) \twoheadrightarrow L_P(L) \to E^\times$ le module de Haar associé au groupe $\overline{P}(L)$. On a une injection compatible à l'action de $L_P(L)^+$:*

$$(W' \otimes \pi_P \otimes \delta_{\overline{P}})|_{L_P(L)^+} \hookrightarrow \mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)^{N_{\overline{P}}^0}.$$

Démonstration. — Par [13, Lem.0.3], on a une injection compatible à $L_P(L)^+$:

$$(W' \otimes \pi_P \otimes \delta_{\overline{P}})|_{L_P(L)^+} \hookrightarrow \Big(\big(\mathrm{Ind}_{P(L)}^{G(L)} W' \otimes_E \pi_P\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}\Big)^{N_{\overline{P}}^0}.$$

Le résultat découle donc du Corollaire 3.3. $\square$

Rappelons qu'un réseau invariant d'une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $G(L)$ sur un E-espace vectoriel est un $\mathcal{O}_E$-module générateur ouvert (ou, de manière équivalente, fermé) séparé et stable par $G(L)$. La condition de séparation est équivalente au fait que le $\mathcal{O}_E$-module ne contient pas de E-droite.

Corollaire 3.5. — *Soit M et π_P comme dans la Proposition 3.2. Soit λ_M le plus haut poids de M vu comme caractère $\lambda_M : T(L) \to E^\times$ et supposons que π_P admet un caractère central $\chi_{\pi_P} : Z_{L_P}(L) \to E^\times$. Si la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\mathcal{F}_P^G(M,\pi_P)$ possède un réseau invariant alors on a :*

$$\lambda_M^{-1}(z)\chi_{\pi_P}(z) \in \mathcal{O}_E \quad \forall\, z \in Z_{L_P}(L)^+.$$

Démonstration. — Soit W comme dans la Proposition 3.2 et notons que $\lambda_M^{-1}|_{Z_{L_P}(L)}\chi_{\pi_P}$ est le caractère central de la $L_P(L)$-représentation $W' \otimes_E \pi_P$. Par le Corollaire 3.4 il existe $f \in \mathcal{F}_P^G(M, \pi_P)^{N_{\overline{P}}^0}$ non nul vecteur propre de $Z_{L_P}(L)^+$ avec $(\lambda_M^{-1}\chi_{\pi_P}\delta_{\overline{P}})|_{Z_{L_P}(L)^+}$ comme caractère propre. Le résultat découle alors de [14, Lem.4.4.2]. □

On aura besoin d'une variante plus subtile du Corollaire 3.5.

Corollaire 3.6. — *Soit M, π_P, λ_M, χ_{π_P} comme dans le Corollaire 3.5 et soit Q un sous-groupe parabolique de G contenant P tel que M est dans la sous-catégorie pleine $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{q}}$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{p}}$. Soit $\overline{\pi}_Q$ un quotient non nul de $\pi_Q \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_{P(L)\cap L_Q(L)}^{L_Q(L)} \pi_P$ et supposons que la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\mathcal{F}_Q^G(M, \overline{\pi}_Q)$ possède un réseau invariant. Alors on a :*

$$\lambda_M^{-1}(z)\chi_{\pi_P}(z) \in \mathcal{O}_E \quad \forall\, z \in Z_{L_P}(L)^+.$$

Démonstration. — Soit W_Q la représentation algébrique simple de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} L_Q) \times_{\mathbb{Q}_p} E$ sur E de plus haut poids λ_M (qui existe par hypothèse), $N_{\overline{Q}}^0 \overset{\text{déf}}{=} N_{\overline{P}}^0 \cap N_{\overline{Q}}(L)$ et $N_{\overline{P}\cap L_Q}^0 \overset{\text{déf}}{=} N_{\overline{P}}^0 \cap N_{\overline{P}\cap L_Q}(L)$. On peut modifier $N_{\overline{P}}^0$ en $N_{\overline{Q}}^0 N_{\overline{P}\cap L_Q}^0$ sans rapetisser $L_P(L)^+$ et remarquons que l'on a $N_{\overline{P}\cap L_Q}^0 \subset L_Q(L)^+$, $L_P(L)^+ \subset L_Q(L)^+$ et $gN_{\overline{P}\cap L_Q}^0 g^{-1} \subseteq N_{\overline{P}\cap L_Q}^0$ pour tout $g \in L_P(L)^+$. Par le Corollaire 3.4 on a une injection compatible à $L_Q(L)^+$:

$$(W_Q' \otimes \overline{\pi}_Q \otimes \delta_{\overline{Q}})|_{L_Q(L)^+} \hookrightarrow \mathcal{F}_Q^G(M, \overline{\pi}_Q)^{N_{\overline{Q}}^0}$$

d'où une injection compatible à $L_P(L)^+$ (rappelons que $N_{\overline{P}}^0 = N_{\overline{Q}}^0 N_{\overline{P}\cap L_Q}^0$) :

$$(W_Q' \otimes \overline{\pi}_Q \otimes \delta_{\overline{Q}})^{N_{\overline{P}\cap L_Q}^0} \hookrightarrow (\mathcal{F}_Q^G(M, \overline{\pi}_Q)^{N_{\overline{Q}}^0})^{N_{\overline{P}\cap L_Q}^0} = \mathcal{F}_Q^G(M, \overline{\pi}_Q)^{N_{\overline{P}}^0}.$$

Soit $J_{\overline{P}\cap L_Q}$ le foncteur de Jacquet classique relativement au sous-groupe parabolique $\overline{P} \cap L_Q$ de L_Q, étendu aux représentations localement algébriques de $L_Q(L)$ comme dans [14, §4.3]. Par [14, Prop.4.3.4] on a une injection compatible à $L_P(L)^+$:

$$J_{\overline{P}\cap L_Q}(W_Q' \otimes \overline{\pi}_Q \otimes \delta_{\overline{Q}})|_{L_P(L)^+} \hookrightarrow (W_Q' \otimes \overline{\pi}_Q \otimes \delta_{\overline{Q}})^{N_{\overline{P}\cap L_Q}^0}$$

et par [14, Prop.4.3.6] un isomorphisme compatible à $L_P(L)$:

$$J_{\overline{P}\cap L_Q}(W_Q' \otimes \overline{\pi}_Q \otimes \delta_{\overline{Q}}) = W' \otimes J_{\overline{P}\cap L_Q}(\overline{\pi}_Q) \otimes \delta_{\overline{Q}}|_{L_P(L)}$$

où l'on a utilisé $(W_Q')^{N_{\overline{P}\cap L_Q}} = W'$. Comme $\overline{\pi}_Q$ est un quotient non nul de l'induite lisse $\mathrm{Ind}_{P(L)\cap L_Q(L)}^{L_Q(L)} \pi_P$, la seconde loi d'adjonction de Bernstein pour le foncteur de Jacquet $J_{\overline{P}\cap L_Q}$ (voir par exemple [7, Th.3]) donne une application non nulle $\pi_P\otimes\delta_{\overline{P}\cap L_Q}\to J_{\overline{P}\cap L_Q}(\overline{\pi}_Q)$ compatible à $L_P(L)$ où $\delta_{\overline{P}\cap L_Q}:L_P(L)\to E^\times$ est le module de Haar du groupe $\overline{P}(L)\cap L_Q(L)$ dans $L_Q(L)$. Comme $\delta_{\overline{P}\cap L_Q}\delta_{\overline{Q}}|_{L_P(L)}=\delta_{\overline{P}}$, on a finalement des applications compatibles à $L_P(L)^+$:

$$(W'\otimes\pi_P\otimes\delta_{\overline{P}})|_{L_P(L)^+}\to(W'_Q\otimes\overline{\pi}_Q\otimes\delta_{\overline{Q}})^{N^0_{\overline{P}\cap L_Q}}\hookrightarrow\mathcal{F}^G_Q(M,\overline{\pi}_Q)^{N^0_{\overline{P}}}$$

où la première application est non nulle et la deuxième est injective. En particulier, tout élément de $(W'\otimes\pi_P\otimes\delta_{\overline{P}})|_{L_P(L)^+}$ d'image non nulle dans $\mathcal{F}^G_Q(M,\overline{\pi}_Q)^{N^0_{\overline{P}}}$ fournit un vecteur propre non nul pour l'action de $Z_{L_P}(L)^+$ avec $(\lambda_M^{-1}\chi_{\pi_P}\delta_{\overline{P}})|_{Z_{L_P}(L)^+}$ comme caractère propre. Comme précédemment le résultat découle de [14, Lem.4.4.2]. $\square$

4. Quelques rappels sur les variétés de drapeaux

On rappelle quelques résultats simples sur les variétés de drapeaux. Dans cette section H est un groupe réductif connexe déployé sur E, T_H un tore déployé et B_H un sous-groupe de Borel contenant T_H. On note $X(T_H)\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}}(T_H,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ le groupe des caractères algébriques de T_H et $W_H=N(T_H)/T_H$ le groupe de Weyl relativement à T_H où $N(T_H)$ est le normalisateur de T_H dans H. Rappelons que l'on a $W_H\times X(T_H)\to X(T_H)$, $(w,\lambda)\mapsto w(\lambda)$. On note $\rho_H\in X(T_H)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ la demi-somme des racines positives (par rapport à B_H) et on définit :

$$w\cdot\lambda\overset{\text{déf}}{=}w(\lambda+\rho_H)-\rho_H\in X(T_H)\tag{4.1}$$

si $w\in W_H$ et $\lambda\in X(T_H)$. On note $\ell(w)\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ la longueur d'un élément de W_H et w_0 l'unique élément de W_H de longueur maximale. Rappelons que $w_0^2=1$. On rappelle que W_H est muni de l'ordre partiel de Bruhat $\leqslant$ (cf. [23, §0.4]) et $X(T_H)$ de l'ordre partiel $\lambda\leqslant\mu\Leftrightarrow\mu-\lambda\in\oplus_{\alpha\in S}\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\alpha$ où S désigne les racines positives simples par rapport à B_H. Si α est une racine positive, $s_\alpha\in W_H$ la réflexion par rapport à α, $0\in X(T_H)$ le caractère trivial de T_H et $w\in W_H$, on a la relation (voir par exemple [23, §5.2]) :

$$(s_\alpha ww_0)\cdot 0\leqslant(ww_0)\cdot 0\Longleftrightarrow s_\alpha w\leqslant w\tag{4.2}$$

et de même avec $<$ au lieu de $\leqslant$ ou en remplaçant le poids 0 par un quelconque poids de $X(T_H)$ dominant pour B_H. On a aussi $w'\leqslant w$ si et seulement si $w'w_0\geqslant ww_0$.

Les deux lemmes qui suivent sont élémentaires.

Lemme 4.1. — *Soit $\alpha \in S$ et $\lambda \in X(T_H)$. On a $s_\alpha(\lambda) \leqslant \lambda$ si et seulement si on a $s_\alpha \cdot \lambda < \lambda$.*

Démonstration. — Si $s_\alpha(\lambda) \leqslant \lambda$, alors :

$$\begin{aligned} s_\alpha \cdot \lambda - \lambda = s_\alpha(\lambda + \rho_H) - (\lambda + \rho_H) &= (s_\alpha(\lambda) - \lambda) + (s_\alpha(\rho_H) - \rho_H) \\ &= (s_\alpha(\lambda) - \lambda) - \alpha \leqslant -\alpha < 0. \end{aligned}$$

Si $s_\alpha \cdot \lambda < \lambda$ alors $s_\alpha(\lambda) - \lambda < -(s_\alpha(\rho_H) - \rho_H) = \alpha$ d'où $s_\alpha(\lambda) - \lambda = m\alpha$ pour $m \leqslant 0$ et donc $s_\alpha(\lambda) - \lambda \leqslant 0$. □

Si P_H est un sous-groupe parabolique de H contenant B_H, on note $W_{P_H} \subseteq W_H$ son groupe de Weyl. Si $w \in W_H$, on note $P_H(w)$ l'unique sous-groupe parabolique de H contenant B_H tel que les racines positives simples du Levi $L_{P_H(w)}$ sont les $\alpha \in S$ vérifiant $s_\alpha(w \cdot 0) \leqslant w \cdot 0$. De manière équivalente, $P_H(w)$ est le plus grand sous-groupe parabolique de H tel que $w \cdot 0$ est un poids dominant par rapport à $L_{P_H(w)} \cap B_H$. Par exemple $P_H(1) = H$ et $P_H(w_0) = B_H$.

Lemme 4.2. — *Soit $\alpha \in S$ et $w \in W_H$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) α *est une racine positive simple de* $L_{P_H(w)}$ *;*

(ii) $s_\alpha \in W_{P_H(w)}$ *;*

(iii) $s_\alpha w w_0 < w w_0$ *;*

(iv) $(w w_0)^{-1}(\alpha) < 0$.

Démonstration. — L'équivalence entre (i) et (ii) est évidente et est aussi la même chose que $s_\alpha(w \cdot 0) \leqslant w \cdot 0$. Par le Lemme 4.1 c'est encore équivalent à $(s_\alpha w) \cdot 0 < w \cdot 0$ qui est équivalent à (iii) par (4.2). Il est classique que (iii) est équivalent à l'inégalité $\ell(s_\alpha w w_0) < \ell(w w_0)$ (voir [23, Prop.0.4]) et que cette dernière est équivalente à (iv) (voir [23, §0.3(4)]). □

Remarque 4.3. — On ne change pas $P_H(w)$ si on remplace dans sa définition le poids 0 par un quelconque poids dominant par rapport à B_H : utiliser (4.2) avec ce poids dominant au lieu du poids 0 dans la preuve du Lemme 4.2.

Si $w \in W_H$, on note encore w un relevé quelconque de w dans $N(T_H)(E) \subseteq H(E)$. La variété algébrique projective H/B_H sur E admet une décomposition cellulaire :

$$H/B_H = \coprod_{w \in W_H} B_H w B_H / B_H \tag{4.3}$$

où B_HwB_H/B_H est un espace affine de dimension $\ell(w)$. On note $\overline{B_HwB_H/B_H}$ l'adhérence de Zariski de B_HwB_H/B_H. C'est une variété algébrique projective irréductible sur E et on a par un théorème classique de Chevalley (voir par exemple [23, §8.5]) :

$$\overline{B_HwB_H/B_H} = \coprod_{w' \leqslant w} B_Hw'B_H/B_H. \tag{4.4}$$

Si $h \in H$, $h\overline{B_HwB_H/B_H} \subseteq H/B_H$ désigne le fermé de H/B_H translaté de $\overline{B_HwB_H/B_H}$ à gauche par h.

Proposition 4.4. — *Soit P_H un sous-groupe parabolique de H contenant B_H et $w, w_1, w_2 \in W_H$. On a $w_2^{-1}w_1 \in W_{P_H(w)}$ si et seulement si :*

$$w_1\overline{B_Hww_0B_H/B_H} = w_2\overline{B_Hww_0B_H/B_H}.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que le sous-groupe algébrique $Q(ww_0)$ de H stabilisateur de la variété de Schubert $\overline{B_Hww_0B_H/B_H}$ est le sous-groupe parabolique $P_H(w)$. Pour alléger l'écriture, on oublie l'indice H dans la suite de cette preuve. Comme $v \in W$ stabilise $\overline{Bww_0B/B}$ si et seulement si bvb' stabilise $\overline{Bww_0B/B}$ pour tout b, b' dans B, on voit que $Q(ww_0)$ est une union de doubles classes BvB pour v dans un sous-ensemble $W_{Q(ww_0)}$ de W. Comme $Q(ww_0)$ est un sous-groupe algébrique fermé de H contenant B, c'est un sous-groupe parabolique (standard) et $W_{Q(ww_0)}$ est son groupe de Weyl (les notations sont donc consistantes). Il suffit en particulier de déterminer les $v = s_\alpha \in W_{Q(ww_0)}$ avec $\alpha \in S$ pour déterminer $Q(ww_0)$. Autrement dit, par le Lemme 4.2, il suffit de démontrer $s_\alpha\overline{Bww_0B/B} = \overline{Bww_0B/B}$ si et seulement si $s_\alpha ww_0 < ww_0$. Si $s_\alpha\overline{Bww_0B/B} = \overline{Bww_0B/B}$, alors en particulier $s_\alpha ww_0 \in \overline{Bww_0B/B}$ qui entraîne $s_\alpha ww_0 < ww_0$ par (4.3) et (4.4). Montrons $s_\alpha Bww_0B/B \subseteq \overline{Bww_0B/B}$ si $s_\alpha ww_0 < ww_0$ (ce qui implique alors $s_\alpha\overline{Bww_0B/B} = \overline{Bww_0B/B}$). Par (4.4) il suffit de montrer $s_\alpha Bww_0B/B \subseteq Bs_\alpha ww_0B \amalg Bww_0B$. C'est un résultat classique, mais on en redonne la preuve (élémentaire). Soit N le radical unipotent de B et $N_\beta \subset N$ le sous-groupe associé à la racine positive β. Soit $N^\alpha \subset N$ le sous-groupe engendré par les N_β pour β parcourant les racines positives distinctes de α. Alors N est le produit semi-direct de N^α par N_α et $s_\alpha N^\alpha \subseteq Ns_\alpha$. On en déduit :

$$\begin{aligned} s_\alpha Bww_0B = s_\alpha Nww_0B &= s_\alpha N^\alpha N_\alpha ww_0B \\ &\subseteq Ns_\alpha N_\alpha ww_0B = BN_{-\alpha}s_\alpha ww_0B. \end{aligned}$$

Par la décomposition de Bruhat pour le sous-groupe algébrique de H engendré par N_α, $N_{-\alpha}$ et T, on a $N_{-\alpha} \subseteq N_\alpha T \amalg N_\alpha s_\alpha N_\alpha T \subseteq B \amalg Bs_\alpha N_\alpha$

qui entraîne :

$$\begin{aligned} N_{-\alpha}s_\alpha ww_0B &\subseteq Bs_\alpha ww_0B \cup Bs_\alpha N_\alpha s_\alpha ww_0B \\ &= Bs_\alpha ww_0B \cup Bs_\alpha s_\alpha ww_0N_{((ww_0)^{-1}s_\alpha)(\alpha)}B \\ &= Bs_\alpha ww_0B \cup Bww_0N_{-(ww_0)^{-1}(\alpha)}B. \end{aligned}$$

Mais par le Lemme 4.2, l'hypothèse $s_\alpha ww_0 < ww_0$ (que l'on n'a pas encore utilisée) est équivalente à $-(ww_0)^{-1}(\alpha) > 0$ c'est-à-dire $N_{-(ww_0)^{-1}(\alpha)} \subseteq B$. On en déduit donc $N_{-\alpha}s_\alpha ww_0B \subseteq Bs_\alpha ww_0B \amalg Bww_0B$ si $s_\alpha ww_0 < ww_0$ ce qui achève la preuve. □

Remarque 4.5. — Je remercie S. Orlik et F. Herzig pour leurs suggestions d'amélioration sur la preuve de la Proposition 4.4. En particulier l'argument permettant de montrer l'implication $w_1\overline{B_Hww_0B_H/B_H} = w_2\overline{B_Hww_0B_H/B_H} \Rightarrow w_2^{-1}w_1 \in W_{P_H(w)}$ m'a été signalé par S. Orlik.

5. Modules de Deligne-Fontaine et socle localement algébrique

On rappelle la définition de la représentation localement algébrique de $\mathrm{GL}_n(L)$ associée dans [6] à un module de Deligne-Fontaine de rang n (dont les constituants sont "suffisamment" distincts).

On se place dans le cadre du §2 avec $G = \mathrm{GL}_{n/L}$, T le sous-groupe des matrices diagonales et B celui des matrices triangulaires *inférieures*.

Fixons L' une extension finie galoisienne de L et soit $L'_0 \subseteq L'$ la sous-extension non ramifiée (sur $\mathbb{Q}_p$) maximale. On suppose $|\mathrm{Hom}(L', E)| = [L' : \mathbb{Q}_p]$ et on note $f' \overset{\text{déf}}{=} [L'_0 : \mathbb{Q}_p]$ et φ'_0 le Frobenius arithmétique sur L'_0 (qui modulo p est l'élévation à la puissance p). Appelons module de Deligne-Fontaine un quadruplet $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ où D est un $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-module libre de rang fini équippé d'une application bijective (appelée Frobenius) $\varphi : D \to D$ telle que $\varphi((l'_0 \otimes e)\cdot d) = (\varphi'_0(l'_0)\otimes e)\cdot\varphi(d)$, d'un endomorphisme $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-linéaire $N : D \to D$ (appelé opérateur de monodromie, à ne pas confondre avec le radical unipotent N de B au §2 !) tel que $N\varphi = p\varphi N$ et d'une action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ (appelée donnée de descente) qui commute à φ, N et telle que $g((l'_0 \otimes e) \cdot d) = (g(l'_0) \otimes e) \cdot g(d)$ ($l'_0 \in L'_0$, $e \in E$, $d \in D$, $g \in \mathrm{Gal}(L'/L)$). Les modules de Deligne-Fontaine forment une catégorie de manière évidente en prenant pour morphismes les applications $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-linéaires qui commutent à φ, N et à l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$.

Par un résultat classique de Fontaine (cf. [16] ou [6, Prop.4.1]), la catégorie des modules de Deligne-Fontaine est en fait équivalente à la catégorie des représentations du groupe de Weil-Deligne de L sur un E-espace vectoriel de dimension finie telles que la restriction au groupe de Weil de L' est non ramifiée. En particulier c'est une catégorie abélienne (et même artinienne).

Fixons un module de Deligne-Fontaine $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ de rang n sur $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. En utilisant l'équivalence de catégories ci-dessus, on voit que si E est suffisamment grand on peut supposer que les constituants irréductibles de $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ sont tous absolument irréductibles. On fait dans tout l'article l'hypothèse suivante sur $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$:

Hypothèse 5.1. — *Les constituants irréductibles de $\big(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D\big)$ sont tous distincts deux à deux.*

Rappelons que l'opérateur de monodromie N est forcément nul sur un module de Deligne-Fontaine absolument irréductible (car N est nilpotent). L'hypothèse (5.1) entraîne en particulier que l'on peut écrire :

$$\big(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \big(\varphi_{i,\ell_i}, N_{i,\ell_i}, \mathrm{Gal}(L'/L), D_{i,\ell_i}\big)$$

où $(\varphi_{i,\ell_i}, N_{i,\ell_i}, \mathrm{Gal}(L'/L), D_{i,\ell_i})$ est absolument indécomposable de la forme :

$$\big(\varphi_{i,\ell_i}, N_{i,\ell_i}, \mathrm{Gal}(L'/L), D_{i,\ell_i}\big) = \bigoplus_{\ell=1}^{\ell_i} \big(p^{-(\ell_i-\ell)}\varphi_i, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i\big)$$

avec $\ell_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(\varphi_i, 0, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i)$ un module de Deligne-Fontaine (absolument) irréductible, $N = N_{i,\ell_i}$ nul sur $\big(p^{-(\ell_i-1)}\varphi_i, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i\big)$ et envoyant $\big(p^{-(\ell_i-\ell)}\varphi_i, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i\big)$ dans $\big(p^{-(\ell_i-\ell+1)}\varphi_i, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i\big)$ par l'identité sur D_i si $1 < \ell \leqslant \ell_i$.

Notons que $N_{i,\ell_i}^{\ell_i} = 0$ sur $(\varphi_{i,\ell_i}, N_{i,\ell_i}, \mathrm{Gal}(L'/L), D_{i,\ell_i})$ et que les seuls sous-modules de Deligne-Fontaine de $\big(\varphi_{i,\ell_i}, N_{i,\ell_i}, \mathrm{Gal}(L'/L), D_{i,\ell_i}\big)$ sont les modules $\bigoplus_{\ell=1}^{j} \big(p^{-(\ell_i-\ell)}\varphi_i, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i\big)$ pour $j \in \{1, \cdots, \ell_i\}$.

On fait maintenant l'hypothèse supplémentaire dans la suite :

Hypothèse 5.2. — *Pour tout $i, j \in \{1, \cdots, r\}$, on a :*

$$\big(\varphi_i, 0, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i\big) \not\cong \big(p^{-\ell_j}\varphi_j, 0, \mathrm{Gal}(L'/L), D_j\big) .$$

Notons $\underline{D} \overset{\text{déf}}{=} (\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$ et $\underline{D}_{i,\ell_i} \overset{\text{déf}}{=} \big(\varphi_{i,\ell_i}, N_{i,\ell_i}, \mathrm{Gal}(L'/L), D_{i,\ell_i}\big)$, alors $\mathrm{WD}(\underline{D}) = \oplus_{i=1}^{r} \mathrm{WD}(\underline{D}_{i,\ell_i})$ où WD désigne la représentation de Weil-Deligne associée. Soit $n_i \overset{\text{déf}}{=} \dim_E D_i$ (on a donc $n = \sum_{i=1}^{r} \ell_i n_i$) et notons $\pi_i^{\mathrm{Langlands}}$ pour $i \in \{1, \cdots, r\}$ la représentation supercuspidale de

$\mathrm{GL}_{n_i}(L)$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ correspondant à la représentation de Weil $\mathrm{WD}(\underline{D}_i)$ associée à $\underline{D}_i \overset{\text{déf}}{=} (\varphi_i, 0, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i)$ par la correspondance de Langlands locale usuelle (en particulier son caractère central est $(\det \mathrm{WD}(\underline{D}_i)) \circ \mathrm{rec}^{-1}$). La représentation $\pi_i^{\mathrm{Langlands}} |\det|_L^{\frac{1-n_i}{2}}$ admet un unique modèle π_i sur E (voir par exemple [6, §4], rappelons que $|\det|_L \in q^{\mathbb{Z}} \subset E^\times$). Les hypothèses (5.1) et (5.2) impliquent que les représentations $\pi_i |\det|_L^{\ell_i - \ell}$ ($i \in \{1, \cdots, r\}$, $\ell \in \{1, \cdots, \ell_i\}$) sont toutes distinctes et que, pour tout $i, j \in \{1, \cdots, r\}$, on a $\pi_i \not\cong \pi_j |\det|_L^{\ell_j}$. On identifie l'ensemble ordonné de représentations supercuspidales :

$$(5.1)\quad \left\{ \pi_1 |\det|_L^{\ell_1 - 1}, \pi_1 |\det|_L^{\ell_1 - 2}, \cdots, \pi_1, \pi_2 |\det|_L^{\ell_2 - 1}, \cdots, \pi_2, \cdots, \pi_r |\det|_L, \pi_r \right\}$$

à l'ensemble $\{1, \cdots, \sum_{i=1}^r \ell_i\}$ en envoyant $\pi_i |\det|_L^{\ell_i - \ell}$ ($1 \leqslant \ell \leqslant \ell_i$) sur $(\sum_{s=1}^{i-1} \ell_s) + \ell$ (donc π_i correspond à $\sum_{s=1}^{i} \ell_s$). Si $j \in \{1, \cdots, \sum_{i=1}^r \ell_i\}$, on écrit $j = (\sum_{s=1}^{i-1} \ell_s) + \ell$ pour un $i \in \{1, \cdots, r\}$ et un $\ell \in \{1, \cdots, \ell_i\}$ uniques, et on note $\pi(j) \overset{\text{déf}}{=} \pi_i |\det|_L^{\ell_i - \ell}$, $n(j) \overset{\text{déf}}{=} n_i$ et :

$$(5.2)\qquad \underline{D}(j) \overset{\text{déf}}{=} \left(p^{-(\ell_i - \ell)} \varphi_i, \mathrm{Gal}(L'/L), D_i\right) \subseteq \underline{D}_{i, \ell_i}.$$

Rappelons que deux supercuspidales π, π' de $\mathrm{GL}_m(L)$ sont dites *liées* si ou bien $\pi \cong \pi' |\det|_L$, ou bien $\pi' \cong \pi |\det|_L$.

Définition 5.3. — *Une permutation w de l'ensemble $\{1, \cdots, \sum_{i=1}^r \ell_i\}$, ou de manière équivalente de l'ensemble de supercuspidales (5.1), est admissible si w peut s'écrire comme une composée de transpositions entre deux supercuspidales* consécutives non liées.

Autrement dit w est admissible si l'on peut écrire $w = \tau_r \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$ où τ_1 échange deux supercuspidales voisines non liées, puis τ_2 échange deux supercuspidales voisines non liées etc. Attention que cela *n*'implique *pas* que les τ_i pour $i > 1$ prises isolément sont elles-mêmes admissibles. Par exemple pour τ_2, on sait seulement que, *une fois appliqué* τ_1, ce sont les *nouvelles* supercuspidales aux positions échangées par τ_2 qui ne sont pas liées, voir l'Exemple 5.4 ci-dessous. De manière équivalente une permutation de $\{1, \cdots, \sum_{i=1}^r \ell_i\}$ est admissible si l'ordre d'apparition des $\pi_i |\det|_L^{\ell_i - \ell}$ pour $1 \leqslant \ell \leqslant \ell_i$ est préservé dans $w^{-1}(1), \cdots, w^{-1}(\sum_{i=1}^r \ell_i)$ via la bijection ci-dessus entre $\left\{ \pi_1 |\det|_L^{\ell_1 - 1}, \cdots, \pi_r \right\}$ et $\{1, \cdots, \sum_{i=1}^r \ell_i\}$) pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$ (notons que les $\pi_i |\det|_L^{\ell_i - \ell}$, $1 \leqslant \ell \leqslant \ell_i$ ne sont plus alors nécessairement "juxtaposées").

Exemple 5.4. — Considérons le cas $r = 2$, $\ell_1 = 2$ et $\ell_2 = 1$, donc $(\pi(1), \pi(2), \pi(3)) = (\pi_1 |\det|_L, \pi_1, \pi_2)$ avec $\pi_2 \not\cong \pi_1 |\det|_L^2$ et $\pi_1 \not\cong \pi_2 |\det|_L$.

Les permutations w admissibles et non triviales sont celles telles que :

$$\big(\pi(w^{-1}(1)),\pi(w^{-1}(2)),\pi(w^{-1}(3))\big) \in \{(\pi_1|\det|_L,\pi_2,\pi_1),(\pi_2,\pi_1|\det|_L,\pi_1)\}\,.$$

Par exemple la permutation $w(1)=2$, $w(2)=3$, $w(3)=1$ qui donne $(\pi(w^{-1}(1)),\pi(w^{-1}(2)),\pi(w^{-1}(3))) = (\pi_2,\pi_1|\det|_L,\pi_1)$ s'écrit comme la composée (12)(23) :

$$(\pi_1|\det|_L,\pi_1,\pi_2)\overset{(23)}{\longmapsto}(\pi_1|\det|_L,\pi_2,\pi_1)\overset{(12)}{\longmapsto}(\pi_2,\pi_1|\det|_L,\pi_1).$$

Mais la permutation $w=(12)$ n'est pas admissible car $\pi_1|\det|_L$ et π_1 sont liées.

Si w est une permutation quelconque de $\{1,\cdots,\sum_{i=1}^r \ell_i\}$, on note $P_w \subseteq \mathrm{GL}_{n/L}$ le sous-groupe parabolique contenant B de Levi :

$$L_{P_w} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_{n(w^{-1}(1))}\times \mathrm{GL}_{n(w^{-1}(2))}\times\cdots\times \mathrm{GL}_{n(w^{-1}(\sum_{i=1}^r \ell_i))}.$$

Soit $P\subseteq \mathrm{GL}_{n/L}$ un sous-groupe parabolique *contenant* P_w, si l'on écrit $L_P\cong \mathrm{GL}_{m_1}\times\cdots\times\mathrm{GL}_{m_t}$, on a une partition naturelle $J_{w,1}\amalg J_{w,2}\amalg\cdots\amalg J_{w,t}$ de $\{1,\cdots,\sum_{i=1}^r\ell_i\}$ telle que l'inclusion $L_{P_w}\subseteq L_P$ envoie $\prod_{j\in J_{w,1}}\mathrm{GL}_{n(w^{-1}(j))}$ dans GL_{m_1}, $\prod_{j\in J_{w,2}}\mathrm{GL}_{n(w^{-1}(j))}$ dans GL_{m_2}, etc. On note $\pi_{w,P}$ l'induite parabolique lisse :

$$\begin{aligned}\pi_{w,P} &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ind}_{P_w(L)\cap L_P(L)}^{L_P(L)}\Big(\pi\big(w^{-1}(1)\big)|\det|_L^{-(n-n(w^{-1}(1))}\otimes_E\\ &\pi\big(w^{-1}(2)\big)|\det|_L^{-(n-n(w^{-1}(1))-n(w^{-1}(2)))}\otimes_E\cdots\otimes_E\pi\big(w^{-1}(\sum_{i=1}^r\ell_i)\big)\Big)\end{aligned}\tag{5.3}$$

et on remarque que $\pi_{w,P}=\mathrm{Ind}_{P_w(L)\cap L_P(L)}^{L_P(L)}\pi_{w,P_w}$ et que :

$$\pi_{w,P}\cong\pi_{w,P,m_1}\otimes_L\pi_{w,P,m_2}\otimes_L\cdots\otimes_L\pi_{w,P,m_t}$$

où π_{w,P,m_s} pour $s\in\{1,\cdots,t\}$ est une induite parabolique (évidente) de P_s à GL_{m_s}, P_s étant le sous-groupe parabolique inférieur de GL_{m_s} de Levi $\prod_{j\in J_{w,s}}\mathrm{GL}_{n(w^{-1}(j))}$.

Lemme 5.5. — *Pour toute permutation (quelconque) w de $\{1,\cdots,\sum_{i=1}^r\ell_i\}$ et pour tout sous-groupe parabolique $P\subseteq\mathrm{GL}_{n/L}$ contenant P_w, la $L_P(L)$-représentation $\pi_{w,P}$ a tous ses constituants distincts et un unique quotient irréductible.*

Démonstration. — Comme les représentations supercuspidales $\pi(j)$ sont toutes distinctes, cela découle de [37, Prop.2.1(c)] et [37, Prop.2.10] appliqué à chaque facteur π_{w,P,m_s}. Noter que la normalisation en (5.3) correspond, à torsion près sur chaque facteur (qui dépend du facteur), à l'induction normalisée de [37]. □

On note $\overline{\pi}_{w,P}$ l'unique quotient irréductible de $\pi_{w,P}$ donné par le Lemme 5.5. On a encore :

$$\overline{\pi}_{w,P} = \overline{\pi}_{w,P,m_1} \otimes_L \cdots \otimes_L \overline{\pi}_{w,P,m_t} \tag{5.4}$$

où $\overline{\pi}_{w,P,m_s}$ est l'unique quotient irréductible de π_{w,P,m_s}, $s \in \{1, \cdots, t\}$.

Lemme 5.6.

(i) Soit w une permutation admissible (Définition 5.3) et $P \subseteq \mathrm{GL}_{n/L}$ un sous-groupe parabolique contenant P_w, alors la $L_P(L)$-représentation $\overline{\pi}_{w,P}$ est générique.

(ii) Soit w_1, w_2 deux permutations admissibles et $P \subseteq \mathrm{GL}_{n/L}$ un sous-groupe parabolique contenant P_{w_1} et P_{w_2}. On a $\overline{\pi}_{w_1,P} \cong \overline{\pi}_{w_2,P}$ si et seulement si les partitions $\amalg_s J_{w_1,s}$ et $\amalg_s J_{w_2,s}$ de $\{1, \cdots, \sum_{i=1}^{r} \ell_i\}$ sont les mêmes et les ensembles de supercuspidales $\{\pi(w_1^{-1}(j)), j \in J_{w_1,s}\}$ et $\{\pi(w_2^{-1}(j)), j \in J_{w_2,s}\}$ sont les mêmes pour tout s.

Démonstration. — Démontrons d'abord (ii). Si les conditions ne sont pas vérifiées, alors par [37, Prop.1.10], les $L_P(L)$-représentations $\overline{\pi}_{w_1,P}$ et $\overline{\pi}_{w_2,P}$ sont des produits tensoriels de représentations irréductibles (5.4) qui ne sont pas les mêmes dans les deux cas. En particulier $\overline{\pi}_{w_1,P}$ et $\overline{\pi}_{w_2,P}$ ne peuvent être isomorphes. Si les conditions sont vérifiées, alors le fait que les permutations w_1 et w_2 sont admissibles associé à [37, Prop.6.4] montre que l'on a $\pi_{w_1,P,m_s} \cong \pi_{w_2,P,m_s}$ pour tout s, et donc *a fortiori* $\pi_{w_1,P} \cong \pi_{w_2,P}$ et $\overline{\pi}_{w_1,P} \cong \overline{\pi}_{w_2,P}$. Plus précisément, on utilise [37, Prop.6.4] avec l'hypothèse (1) : "$(\Delta_1, \cdots, \Delta_r)$ differs from $(\Delta'_1, \cdots, \Delta'_r)$ only by a transposition of two neighbours which are not linked" et avec des segments tous de longueur 1, puis on fait une récurrence immédiate. En effet, si $(\Delta^i_1, \cdots, \Delta^i_r)$, $i \in \{1, 2\}$, est la liste des supercuspidales que l'on induit paraboliquement pour obtenir π_{w_i,P,m_s}, il suit de l'admissibilité de w_1 et w_2 (et des hypothèses) que l'on passe de $(\Delta^1_1, \cdots, \Delta^1_r)$ à $(\Delta^2_1, \cdots, \Delta^2_r)$ par une succession de transpositions entre deux supercuspidales *voisines non liées*.

Démontrons maintenant (i). Par la preuve de (ii), on peut se placer dans une situation où l'on peut appliquer [37, Th.9.7(a)] (avec des segments non liés) à chaque π_{w,P,m_s}, ce qui donne la généricité de son unique quotient irréductible $\overline{\pi}_{w,P,m_s}$ ("non-degenerate" avec la terminologie de *loc.cit.*), et donc celle de $\overline{\pi}_{w,P}$ par (5.4). □

Notons que, si $\Pi^{\text{Langlands}}$ est la représentation lisse (irréductible) de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ correspondant à la représentation de Weil-Deligne $\mathrm{WD}(\underline{D})$ par la correspondance de Langlands locale usuelle, on a :

$$\Pi^{\text{Langlands}} \otimes |\det|_L^{\frac{1-n}{2}} \cong \overline{\pi}_{\mathrm{Id},\mathrm{GL}_n} \otimes_E \overline{\mathbb{Q}_p}.$$

Pour chaque plongement $\sigma : L \hookrightarrow E$ de $\mathcal{S}$ fixons une liste d'entiers $\underline{h} \overset{\text{déf}}{=} (h_{i,\sigma})_{\substack{i\in\{1,\cdots,n\}\\ \sigma\in\mathcal{S}}}$ dans $\mathbb{Z}$ telle que $h_{1,\sigma} < h_{2,\sigma} < \cdots < h_{n,\sigma}$ pour tout σ et posons :

$$\lambda_{i,\sigma} \overset{\text{déf}}{=} -h_{i,\sigma} - (n-i)$$

pour $i \in \{1,\cdots,n\}$ de sorte que $\lambda_{1,\sigma} \geqslant \lambda_{2,\sigma} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n,\sigma}$. Notons $L(\lambda_\sigma)$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_n \times_{L,\sigma} E$ sur E de plus haut poids (dominant) $\lambda_\sigma : T \times_{L,\sigma} E \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}/E}$, $\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_n) \mapsto x_1^{\lambda_{1,\sigma}}\cdots x_n^{\lambda_{n,\sigma}}$, c'est-à-dire l'induite algébrique :

$$L(\lambda_\sigma) = \mathrm{Ind}_{B\times_{L,\sigma}E}^{\mathrm{GL}_n\times_{L,\sigma}E}\,\lambda_\sigma.$$

On pose $\lambda \overset{\text{déf}}{=} \otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}\lambda_\sigma$ (un poids dominant de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} T) \times_{\mathbb{Q}_p} E$ par rapport à $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} \overline{B}) \times_{\mathbb{Q}_p} E$) et $L(\lambda) \overset{\text{déf}}{=} \otimes_{\sigma\in\mathcal{S}} L(\lambda_\sigma)$ (une représentation algébrique de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}\mathrm{GL}_n)\times_{\mathbb{Q}_p}E = \prod_\sigma \mathrm{GL}_n\times_{L,\sigma}E$). On note encore $L(\lambda)$ sa restriction à $\mathrm{GL}_n(L) \subset \mathrm{GL}_n(L\otimes_{\mathbb{Q}_p} E) = ((\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}\mathrm{GL}_n)\times_{\mathbb{Q}_p} E)(E)$: c'est une représentation absolument irréductible de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E.

On définit la représentation localement algébrique de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E :

$$\pi(\underline{D},\underline{h}) \overset{\text{déf}}{=} L\,(\lambda) \otimes_E \overline{\pi}_{\mathrm{Id},\mathrm{GL}_n} \overset{\S 2}{\cong} \mathcal{F}_{\mathrm{GL}_n}^{\mathrm{GL}_n}\big(L(\lambda)', \overline{\pi}_{\mathrm{Id},\mathrm{GL}_n}\big)$$

où $L(\lambda)'$ est la représentation duale de $L(\lambda)$ vue comme objet de $\mathcal{O}^{\mathfrak{g}}_{\mathrm{alg}}$. Par [29] ou par le (iii) du Théorème 2.3, la représentation $\pi(\underline{D},\underline{h})$ est absolument irréductible.

6. Filtrations de Hodge et représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques

À chaque filtration de Hodge sur un module de Deligne-Fontaine comme au §5 on associe une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique semi-simple de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E.

On conserve les notations du §5. En particulier, $\underline{D} = \oplus_{i=1}^r \underline{D}_{i,\ell_i}$ est un module de Deligne-Fontaine satisfaisant (5.1) et (5.2) où l'on a fixé une numérotation quelconque des $\underline{D}_{i,\ell_i}$. Rappelons juste que B (resp. $\overline{B}$) désigne les matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) de $\mathrm{GL}_{n/L}$, que $\underline{h} = (h_{i,\sigma})_{i\in\{1,\cdots,n\},\,\sigma\in\mathcal{S}}$ est une liste de poids de Hodge-Tate et que $\lambda = \otimes_{\sigma\in\mathcal{S}}\lambda_\sigma$ est le poids dominant de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} T)\times_{\mathbb{Q}_p} E$ par rapport à $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}\overline{B})\times_{\mathbb{Q}_p} E$ donné par $\lambda_\sigma = (-h_{1,\sigma}-(n-1)\geqslant -h_{2,\sigma}-(n-2)\geqslant\cdots\geqslant -h_{n,\sigma})$.

On pose $D_{L'} \overset{\text{déf}}{=} D\otimes_{L'_0} L'$ auquel on étend l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ par $g((l'\otimes e)\cdot d) = (g(l')\otimes e)\cdot g(d)$. Par (2.1) tout $L\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-module F s'écrit $F\cong\prod_{\sigma\in\mathcal{S}} F_\sigma$. En particulier on a $D_{L'}\cong\prod_{\sigma\in\mathcal{S}} D_{L',\sigma}$ où chaque $D_{L',\sigma}$ est un $L'\otimes_{L,\sigma} E$-module libre de rang n. Notons que l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ sur $D_{L'}$ induit une action sur chaque $D_{L',\sigma}$. De même l'endomorphisme N de $D_{L'}$ induit un endomorphisme encore noté N de chaque $D_{L',\sigma}$.

Définition 6.1. — *On appelle filtration de Hodge de poids de Hodge-Tate $\underline{h}$ sur le module de Deligne-Fontaine $\underline{D}$ la donnée de sous-$L'\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-modules $(\mathrm{Fil}^i D_{L'})_{i\in\mathbb{Z}}$ de $D_{L'}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L'}\subseteq\mathrm{Fil}^i D_{L'}$ *pour tout* i, $\mathrm{Fil}^i D_{L'} = D_{L'}$ *pour* $i\ll 0$, $\mathrm{Fil}^i D_{L'} = 0$ *pour* $i\gg 0$ *;*

(ii) $\mathrm{Fil}^i D_{L'}$ *est stable par l'action de* $\mathrm{Gal}(L'/L)$ *pour tout* i *;*

(iii) $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma}\neq 0$ *si et seulement si* $i\in\{h_{1,\sigma},\cdots,h_{n,\sigma}\}$ *où* $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}\overset{\text{déf}}{=}(\mathrm{Fil}^i D_{L'})_\sigma\subseteq D_{L',\sigma}$.

On note $\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet$ une filtration de Hodge de poids de Hodge-Tate $\underline{h}$ sur $\underline{D}$. Comme $\mathrm{Fil}^i D_{L'} = \prod_{\sigma\in\mathcal{S}}\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$, chaque $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$ est stable par l'action de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ dans $D_{L',\sigma}$ et par le théorème de Hilbert 90, on a $L'\otimes_L(\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma})^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$ pour tout i et tout σ. Donc se donner un sous-$L'\otimes_{\mathbb{Q}_p} E$-module $\mathrm{Fil}^i D_{L'}$ de $D_{L'}$ stable par $\mathrm{Gal}(L'/L)$ revient juste à se donner pour chaque $\sigma\in\mathcal{S}$ un sous-E-espace vectoriel de $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$. En particulier chaque $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}$ et chaque $\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}/\mathrm{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma}$ est libre (de rang fini) sur $L'\otimes_{L,\sigma} E$.

Pour tout élément $w^{\mathrm{alg}} = (w_\sigma^{\mathrm{alg}})_\sigma$ du groupe de Weyl de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}\mathrm{GL}_n)\times_{\mathbb{Q}_p} E$, on définit $w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda$ (resp. $w_\sigma^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda_\sigma$) comme en (4.1) pour $H = (\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}\mathrm{GL}_n)\times_{\mathbb{Q}_p} E$ et $B_H = (\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}\overline{B})\times_{\mathbb{Q}_p} E$ (resp. $H = \mathrm{GL}_n\times_{L,\sigma} E$ et $B_H\overset{\text{déf}}{=}\overline{B}\times_{L,\sigma} E$) et on note $P(w^{\mathrm{alg}})\subseteq\mathrm{GL}_{n/L}$ le plus grand sous-groupe parabolique contenant B tel que, pour tout $\sigma\in\mathcal{S}$, $(w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda)_\sigma = w_\sigma^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda_\sigma$ est le plus haut poids par rapport à $\overline{B}\times_{L,\sigma} E$ d'une représentation algébrique de $L_{P(w^{\mathrm{alg}})}\times_{L,\sigma} E$. Comme λ_σ est dominant pour tout σ (par rapport à $\overline{B}\times_{L,\sigma} E$), c'est aussi le plus grand sous-groupe parabolique $P(w^{\mathrm{alg}})$ contenant B tel que, pour tout $\sigma\in\mathcal{S}$, $w_\sigma^{\mathrm{alg}}\cdot 0$ est dominant pour $L_{P(w^{\mathrm{alg}})}\times_{L,\sigma} E$ par rapport à $\overline{B}\times_{L,\sigma} E$ (cf. Remarque 4.3). On note W_σ le *dual* de cette représentation algébrique de $L_{P(w^{\mathrm{alg}})}\times_{L,\sigma} E$,

$W_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda} \overset{\text{déf}}{=} \otimes_{\sigma\in\mathcal{S}} W_\sigma$ et $M_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda} \in \mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{p}(w^{\mathrm{alg}})}$ l'unique quotient simple du module de Verma $U(\mathfrak{gl}_n \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \otimes_{U(\mathfrak{p}(w^{\mathrm{alg}})\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} W_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda}$.

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des couples (w^{alg}, w) où w est une permutation admissible de $\{1, \cdots, \sum_{i=1}^r \ell_i\}$ (Définition 5.3) et w^{alg} un élément du groupe de Weyl de $(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} \mathrm{GL}_n) \times_{\mathbb{Q}_p} E$ avec $P_w \subseteq P(w^{\mathrm{alg}})$. Par exemple $(1, w) \in \mathcal{W}$ pour toute permutation admissible w. On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{W}$ comme suit : $(w_1^{\mathrm{alg}}, w_1) \sim (w_2^{\mathrm{alg}}, w_2)$ si et seulement si $w_1^{\mathrm{alg}} = w_2^{\mathrm{alg}}$ et la permutation sur les supercuspidales $\{\pi(w_1^{-1}(j)), 1 \leqslant j \leqslant \sum_{i=1}^r \ell_i\}$ qui donne les supercuspidales $\{\pi(w_2^{-1}(j)), 1 \leqslant j \leqslant \sum_{i=1}^r \ell_i\}$ respecte les blocs du Levi $L_{P(w_1^{\mathrm{alg}})} = L_{P(w_2^{\mathrm{alg}})}$ (voir Lemme 5.6).

À tout élément $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}$, on associe la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique absolument irréductible de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E :

$$C(w^{\mathrm{alg}}, w) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P(w^{\mathrm{alg}})}^{\mathrm{GL}_n}\big(M_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda}, \overline{\pi}_{w,P(w^{\mathrm{alg}})}\big)$$

(cf. §2 pour $\mathcal{F}_{P(w^{\mathrm{alg}})}^{\mathrm{GL}_n}$ et §5 pour $\overline{\pi}_{w,P(w^{\mathrm{alg}})}$, l'irréductibilité découle du (iii) du Théorème 2.3). En particulier $C(1, \mathrm{Id}) \cong \pi(\underline{D}, \underline{h})$. Notons que par le Corollaire 2.5 on a :

$$C(w^{\mathrm{alg}}, w) = \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(L)}\big(\mathrm{Ind}_{P(w^{\mathrm{alg}})(L)}^{\mathrm{GL}_n(L)} W'_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda} \otimes_E \overline{\pi}_{w,P(w^{\mathrm{alg}})}\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}.$$

Lorsque $\overline{\pi}_{w,P(w^{\mathrm{alg}})} = \pi_{w,P(w^{\mathrm{alg}})}$ (i.e. lorsque $\pi_{w,P(w^{\mathrm{alg}})}$ est irréductible), on a aussi par (2.6) et le Corollaire 2.5 :

$$(6.1)\qquad \begin{aligned} C(w^{\mathrm{alg}}, w) &= \mathcal{F}_{P_w}^{\mathrm{GL}_n}\big(M_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda}, \pi_{w,P_w}\big) \\ &= \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(L)}\big(\mathrm{Ind}_{P_w(L)}^{\mathrm{GL}_n(L)} W'_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda,P_w} \otimes_E \pi_{w,P_w}\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} \end{aligned}$$

où $W_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda,P_w} \overset{\text{déf}}{=} \otimes_{\sigma\in\mathcal{S}} W_{\sigma,P_w}$, W_{σ,P_w} étant le *dual* de la représentation algébrique de $L_{P_w} \times_{L,\sigma} E$ de plus haut poids $w_\sigma^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda_\sigma$ par rapport à $\overline{B} \times_{L,\sigma} E$.

Lemme 6.2. — *Soit $(w_1^{\mathrm{alg}}, w_1)$ et $(w_2^{\mathrm{alg}}, w_2)$ deux éléments de $\mathcal{W}$, on a $C(w_1^{\mathrm{alg}}, w_1) \cong C(w_2^{\mathrm{alg}}, w_2)$ si et seulement si $(w_1^{\mathrm{alg}}, w_1) \sim (w_2^{\mathrm{alg}}, w_2)$.*

Démonstration. — Par le Corollaire 2.7, on a $C(w_1^{\mathrm{alg}}, w_1) \cong C(w_2^{\mathrm{alg}}, w_2)$ si et seulement si $M_{w_1^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda} \cong M_{w_2^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda}$ et $\overline{\pi}_{w_1,P(w_1^{\mathrm{alg}})} \cong \overline{\pi}_{w_2,P(w_2^{\mathrm{alg}})}$. Le premier isomorphisme implique $w_1^{\mathrm{alg}} = w_2^{\mathrm{alg}}$ car $w_1^{\mathrm{alg}} \cdot \lambda = w_2^{\mathrm{alg}} \cdot \lambda$ et λ est un poids régulier au sens de [23, §1.8]. On a donc $P(w_1^{\mathrm{alg}}) = P(w_2^{\mathrm{alg}})$ et le résultat découle du (ii) du Lemme 5.6. □

Pour $i \in \{1, \cdots, r\}$ soit $m_i \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^i n_j$ et posons $m_0 \overset{\text{déf}}{=} 0$. Pour chaque $\sigma \in \mathcal{S}$ on fixe m_r vecteurs $(e_{j,\sigma})_{1\leqslant j\leqslant m_r}$ du E-espace vectoriel $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ tels que, pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $(e_{m_{i-1}+1,\sigma}, \cdots, e_{m_i,\sigma})$ est une base du E-espace vectoriel $D(\sum_{s=1}^{i}\ell_s)_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ (cf. (5.2)). Donc $(N^{\ell_i-\ell}(e_{m_{i-1}+1,\sigma}),\cdots,N^{\ell_i-\ell}(e_{m_i,\sigma}))$ est une base du E-espace vectoriel $D((\sum_{s=1}^{i-1}\ell_s)+\ell)_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ $(1\leqslant\ell\leqslant\ell_i)$, $(N^{\ell_i-\ell}(e_{m_{i-1}+1,\sigma}),\cdots,N^{\ell_i-\ell}(e_{m_i,\sigma}))_{1\leqslant\ell\leqslant\ell_i}$ est une base de $D_{i,\ell_i,L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ et $\mathcal{B}_\sigma\overset{\text{déf}}{=}(N^\ell(e_{j,\sigma}))_{j,\ell}$ une base de $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$. Se donner une filtration de Hodge $\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet$ de poids de Hodge-Tate $\underline{h}$ sur $\underline{D}$ revient à se donner pour tout $\sigma\in\mathcal{S}$ un drapeau de sous-E-espaces vectoriels de $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$:

$$0\subsetneq\mathrm{Fil}^{h_{n,\sigma}}D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\subsetneq\mathrm{Fil}^{h_{n-1,\sigma}}D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\subsetneq\cdots\subsetneq\mathrm{Fil}^{h_{1,\sigma}}D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}=D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\tag{6.2}$$

tels que $\dim_E\mathrm{Fil}^{h_{i,\sigma}}D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}=n+1-i$.

On pose dans la suite :

$$H\overset{\text{déf}}{=}(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}\mathrm{GL}_n)\times_{\mathbb{Q}_p}E\quad\text{et}\quad B_H\overset{\text{déf}}{=}(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}\overline{B})\times_{\mathbb{Q}_p}E$$

et on utilise les notations du §4 (par exemple $w^{\mathrm{alg}}\in W_H$). Exprimé dans la base $\mathcal{B}\overset{\text{déf}}{=}(\mathcal{B}_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$ ci-dessus, le drapeau (6.2) pour tout σ correspond à un E-point $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)$ sur la variété algébrique projective H/B_H :

$$\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)\in(H/B_H)(E)\cong\prod_{\sigma\in\mathcal{S}}\mathrm{GL}_n(E)/\overline{B}(E),$$

le drapeau évident :

$$\begin{aligned}EN^{\ell_1-1}(e_{1,\sigma})&\subsetneq EN^{\ell_1-1}(e_{1,\sigma})\oplus EN^{\ell_1-1}(e_{2,\sigma})\\&\subsetneq\cdots\subsetneq D(1)_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\subsetneq D(1)_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\oplus EN^{\ell_1-2}(e_{1,\sigma})\\&\subsetneq\cdots\subsetneq D(1)_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\oplus D(2)_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\\&\subsetneq\cdots\subsetneq D_{1,\ell_1,L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\subsetneq\cdots\subsetneq D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}\end{aligned}\tag{6.3}$$

correspondant par définition à la classe de l'identité dans $\mathrm{GL}_n(E)/\overline{B}(E)$.

On voit une permutation w de $\{1,\cdots,\sum_{i=1}^r\ell_i\}$ comme un élément du groupe de Weyl de $\mathrm{GL}_{n/L}$, donc en particulier comme une matrice $\widehat{w}$ dans $\mathrm{GL}_n(L)\subseteq\mathrm{GL}_n(L\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)=H(E)$, qui envoie les racines simples positives de $\mathrm{GL}_{n(1)}\times\cdots\times\mathrm{GL}_{n(\sum_i\ell_i)}$ vers des racines simples positives de GL_n (noter que $\widehat{w}$ dépend de la numérotation choisie des $\underline{D}_{i,\ell_i}$ puisque les blocs n'ont pas forcément tous la même taille). Avec cette convention on vérifie que $\widehat{w}L_{P_{\mathrm{Id}}}\widehat{w}^{-1}=L_{P_w}$ et (via le Lemme 6.2) que $(w^{\mathrm{alg}},w_1)\sim(w^{\mathrm{alg}},w_2)$ dans $\mathcal{W}$ si et seulement si $\widehat{w_2}\widehat{w_1}^{-1}$ appartient au sous-groupe de Weyl $W_{P(w^{\mathrm{alg}})}$.

Lemme 6.3. — *Soit $(w^{\mathrm{alg}},w_1),(w^{\mathrm{alg}},w_2)\in\mathcal{W}$, on a $(w^{\mathrm{alg}},w_1)\sim(w^{\mathrm{alg}},w_2)$ si et seulement si $\widehat{w_1}^{-1}\overline{B_Hw^{\mathrm{alg}}w_0B_H/B_H}=\widehat{w_2}^{-1}\overline{B_Hw^{\mathrm{alg}}w_0B_H/B_H}$.*

Démonstration. — On a $W_{P(w^{\mathrm{alg}})} \subseteq W_{P_H(w^{\mathrm{alg}})}$ (plongement "diagonal", cf. §4 pour $P_H(w^{\mathrm{alg}})$) et par maximalité de $P(w^{\mathrm{alg}})$, on a $\widehat{w_2}\widehat{w_1}^{-1} \in W_{P(w^{\mathrm{alg}})}$ si et seulement si $\widehat{w_2}\widehat{w_1}^{-1} \in W_{P_H(w^{\mathrm{alg}})}$. Le résultat découle donc de la Proposition 4.4. □

On définit la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $\mathrm{GL}_n(L)$ sur E :

$$\begin{aligned}\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) &\overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\{(w^{\mathrm{alg}},w)\}} C(w^{\mathrm{alg}},w)\\ &= \bigoplus_{\{(w^{\mathrm{alg}},w)\}} \mathcal{F}_{P(w^{\mathrm{alg}})}^{\mathrm{GL}_n}\big(M_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda}, \overline{\pi}_{w,P(w^{\mathrm{alg}})}\big)\end{aligned} \tag{6.4}$$

où la somme directe est prise sur les classes $\{(w^{\mathrm{alg}},w)\} \in \mathcal{W}/\sim$ telles que :

$$\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1}\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$$

(i.e. $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ est un E-point de la variété $\widehat{w}^{-1}\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$). Le Lemme 6.2 et le Lemme 6.3 montrent que la représentation $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ est bien définie.

Proposition 6.4.

(i) La représentation $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ ne dépend ni de l'ordre des $\underline{D}_{i,\ell_i}$ ni du choix de la base $\mathcal{B}$ comme ci-dessus.

(ii) La représentation $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ est semi-simple, sans multiplicité et contient toujours la représentation localement algébrique $\pi(\underline{D},\underline{h})$.

Démonstration.

(i) Nous allons montrer d'une part que la représentation $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ est indépendante de la numérotation des $\underline{D}_{i,\ell_i}$, d'autre part qu'à numérotation fixée elle est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$. Soit $\widetilde{w}$ une permutation de l'ensemble $\{1,\cdots,r\}$ et $\widetilde{\underline{D}_{i,\ell_i}} \overset{\text{déf}}{=} \underline{D}_{\widetilde{w}(i),\ell_{\widetilde{w}(i)}}$ une autre numérotation. Notons avec un tilde tout ce qui est relatif à cette autre numérotation, par exemple $\widetilde{\mathcal{B}} = (\widetilde{\mathcal{B}}_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$ est la base de $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ obtenue en permutant suivant $\widetilde{w}$ pour chaque σ les bases des $D_{i,\ell_i,L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ données par $\mathcal{B}_\sigma$ sans changer l'ordre des vecteurs à l'intérieur de chacune de ces bases. On note encore $\widetilde{w}$ l'unique permutation de $\{1,\cdots,\sum_{i=1}^r \ell_i\}$ qui envoie l'ensemble ordonné (5.1) sur l'ensemble ordonné $\{\pi_{\widetilde{w}(1)}|\det|_L^{\ell_{\widetilde{w}(1)}-1}$, $\pi_{\widetilde{w}(1)}|\det|_L^{\ell_{\widetilde{w}(1)}-2},\cdots,\pi_{\widetilde{w}(1)},\pi_{\widetilde{w}(2)}|\det|_L^{\ell_{\widetilde{w}(2)}-1},\cdots,\pi_{\widetilde{w}(r)}|\det|_L,\pi_{\widetilde{w}(r)}\}$. On vérifie par un calcul de changement de base élémentaire que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1}\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$ si et seulement si $\widetilde{\mathcal{B}}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w\widetilde{w}}^{-1}\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$ où $\widehat{w\widetilde{w}}$ est le relevé dans $\mathrm{GL}_n(L)$ de la permutation $w\widetilde{w}$ de $\{1,\cdots,\sum_{i=1}^r \ell_i\}$

relativement à la *nouvelle* numérotation $\mathrm{GL}_{n(\widetilde{w}(1))} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n(\widetilde{w}(r))}$. Par ailleurs on a $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}$ si et seulement si $(w^{\mathrm{alg}}, w\widetilde{w}) \in \widetilde{\mathcal{W}}$ et dans ce cas $C(w^{\mathrm{alg}}, w) = \widetilde{C}(w^{\mathrm{alg}}, w\widetilde{w})$. On voit donc que la somme directe des $\widetilde{C}(w^{\mathrm{alg}}, w\widetilde{w})$ sur les $\{(w^{\mathrm{alg}}, w\widetilde{w})\} \in \widetilde{\mathcal{W}}/\sim$ tels que $\widetilde{\mathcal{B}}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w\widetilde{w}}^{-1} \times \overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H}$ coïncide avec la somme directe des $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ sur les $\{(w^{\mathrm{alg}}, w)\} \in \mathcal{W}/\sim$ tels que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1}\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H}$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}$, $i \in \{1, \cdots, r\}$ et modifions maintenant la base $(e_{m_{i-1}+1,\sigma}, \cdots, e_{m_i,\sigma})$ de $D(\sum_{s=1}^{i} \ell_s)_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$. Par un calcul de changement de base, on a une matrice h dans $((\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} L_{P_w}) \times_{\mathbb{Q}_p} E)(E)$ (en fait dans $((\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p} L_{P_w}) \times_{L,\sigma} E)(E))$ telle que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1}\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H}$ si et seulement si $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ correspond dans la nouvelle base à un point dans $\widehat{w}^{-1}h\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H} = \widehat{w}^{-1}\overline{hB_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H}$. Comme $L_{P_w} \subseteq L_{P(w^{\mathrm{alg}})}$, l'élément h est aussi un E-point de $P_H(w^{\mathrm{alg}})$ défini comme au §4. Mais :

$$\begin{aligned} P_H(w^{\mathrm{alg}}) B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H &= P_H(w^{\mathrm{alg}}) w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H \\ &= \bigcup_{w' \in W_{P_H(w^{\mathrm{alg}})}} B_H w' B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H \end{aligned}$$

et par la Proposition 4.4 on a $w' B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H \subseteq \overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H}$ pour tout $w' \in W_{P_H(w^{\mathrm{alg}})}$. On en déduit $P_H(w^{\mathrm{alg}}) w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H \subseteq \overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H}$ d'où $\overline{hB_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H} = \overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H}$ et donc $\widehat{w}^{-1}h\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H} = \widehat{w}^{-1}\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H}$. Ainsi, on ne change pas la représentation $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ en travaillant dans la nouvelle base.

(ii) La semi-simplicité est claire puisque chaque $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ est irréductible. L'assertion de multiplicité 1 découle de la définition de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ et du Lemme 6.2. Si $w^{\mathrm{alg}} = 1$, on a $\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H / B_H} = \overline{B_H w_0 B_H / B_H} = H/B_H$ et donc le constituant $C(1, \mathrm{Id}) \cong \pi(\underline{D}, \underline{h})$ est toujours là (notons que $C(1, \mathrm{Id}) \cong C(1, w)$ pour tout w par le Lemme 6.2). ☐

7. Faible admissibilité et conditions nécessaires d'intégralité

On montre que si $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ admet un $\mathcal{O}_E$-réseau stable par $\mathrm{GL}_n(L)$ alors la filtration $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est faiblement admissible.

On conserve les notations et conventions du §6. À $\underline{D}$ est associé le nombre rationnel positif ou nul (voir [6, (4)]) :

$$t_N(\underline{D}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{f'} \operatorname{val}\left(\det_{L'_0}(\varphi^{f'})\right)$$

où $\det_{L'_0}(\varphi^{f'})$ est le déterminant de l'automorphisme L'_0-linéaire $\varphi^{f'}$ du L'_0-espace vectoriel D dans une base quelconque. À $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est associé le nombre rationnel positif ou nul (voir [6, (5)]) :

$$\begin{aligned} t_H(\underline{D},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} i\dim_{L'}\big(\mathrm{Fil}^i D_{L'}/\,\mathrm{Fil}^{i+1}D_{L'}\big)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}}\sum_{i\in\mathbb{Z}} i\dim_{L'}\big(\mathrm{Fil}^i D_{L',\sigma}/\,\mathrm{Fil}^{i+1}D_{L',\sigma}\big). \end{aligned}$$

Si $\underline{D}'\subseteq\underline{D}$ est un sous-module de Deligne-Fontaine, on le munit de la filtration de Hodge induite $(D'_{L'}\cap\mathrm{Fil}^i D_{L'})_{i\in\mathbb{Z}}$.

Définition 7.1 (Fontaine). — *On dit que la filtration de Hodge $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est faiblement admissible si pour tout sous-module de Deligne-Fontaine $\underline{D}'\subseteq\underline{D}$ on a $t_H(\underline{D}',\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})\leqslant t_N(\underline{D}')$ et si de plus $t_H(\underline{D},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})=t_N(\underline{D})$.*

Remarques 7.2.

(i) En fait, la condition de faible admissibilité initiale demande à ce que l'inégalité $t_H(\underline{D}',\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})\leqslant t_N(\underline{D}')$ soit vérifiée pour tout sous-L'_0-espace vectoriel D' de D stable par φ et N (on n'utilise ni l'action de E ni celle de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ dans la définition de ces invariants). Le fait qu'il suffise de considérer les sous-$L'_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$-modules de D stables par φ, N et $\mathrm{Gal}(L'/L)$, c'est-à-dire les sous-modules de Deligne-Fontaine de $\underline{D}$, découle par exemple de [17, Prop.4.4.9] et [4, Prop.3.1.1.5].

(ii) Rappelons que, par le résultat principal de [11], à toute filtration faiblement admissible correspond une représentation potentiellement semi-stable de dimension n de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$.

Comme les seuls sous-modules de Deligne-Fontaine de $\underline{D}_{i,\ell_i}$ (pour $i\in\{1,\cdots,r\}$) sont les modules $\bigoplus_{\ell=1}^{j}\underline{D}\big((\sum_{s=1}^{i-1}\ell_s)+\ell\big)$ pour $j\in\{1,\cdots,\ell_i\}$ (cf. (5.2)), on en déduit le lemme suivant (dont la preuve est immédiate).

Lemme 7.3. — *Soit $\underline{D}'\subseteq\underline{D}$ un sous-module de Deligne-Fontaine. Alors il existe une permutation admissible w de $\{1,\cdots,\sum_{s=1}^r\ell_s\}$ (non unique en général) et $i\in\{1,\cdots,\sum_{s=1}^r\ell_s\}$ tels que $\underline{D}'=\oplus_{j=1}^{i}\underline{D}(w^{-1}(j))$.*

Si w est une permutation de $\{1,\cdots,\sum_{s=1}^r\ell_s\}$, on note $P_{H,w}\overset{\text{déf}}{=}(\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}\overline{P}_w)\times_{\mathbb{Q}_p}E$, $\chi_{\pi_{w,P_w}}$ le caractère central de π_{w,P_w} et $Z_{L_{P_w}}(L)^+$ le sous-monoïde du centre $Z_{L_{P_w}}(L)$ de $L_{P_w}(L)$ défini comme après (3.4) pour $N^0_{\overline{P}_w}\overset{\text{déf}}{=}N_{\overline{P}_w}(\mathcal{O}_L)$. Concrètement $Z_{L_{P_w}}(L)^+$ est le monoïde des matrices diagonales de $\mathrm{GL}_n(L)$ qui sont dans le centre de $L_{P_w}(L)$ et dont la valuation des coefficients (diagonaux) décroît quand on "descend la diagonale".

Proposition 7.4. — *Soit $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}$ et $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ une filtration de Hodge de poids de Hodge-Tate $\underline{h}$ sur $\underline{D}$ telle que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1}P_{H,w}w^{\mathrm{alg}}w_0B_H/B_H$ dans un quelconque choix de base $\mathcal{B}$ comme au §6. Les conditions :*

$$\begin{aligned}&t_H\big(\oplus_{j=1}^{i}\underline{D}(w^{-1}(j)), \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}\big) \leqslant t_N\big(\oplus_{j=1}^{i}\underline{D}(w^{-1}(j))\big),\ 1 \leqslant i \leqslant \sum_{s=1}^{r}\ell_s - 1\\ &t_H\big(\oplus_{j=1}^{\sum_{s=1}^{r}\ell_s}\underline{D}(w^{-1}(j)), \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}\big) = t_N\big(\oplus_{j=1}^{\sum_{s=1}^{r}\ell_s}\underline{D}(w^{-1}(j))\big)\end{aligned} \tag{7.1}$$

sont équivalentes aux conditions :

$$(w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda)(z)\chi_{\pi_{w,P_w}}(z) \in \mathcal{O}_E \quad \forall\ z \in Z_{L_{P_w}}(L)^{+}. \tag{7.2}$$

Démonstration. — Notons d'abord qu'en procédant comme dans la preuve du (i) de la Proposition 6.4, on voit que la condition $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1}P_{H,w}w^{\mathrm{alg}}w_0B_H/B_H$ est vraie pour la base $\mathcal{B}$ si et seulement si elle est vraie pour un autre choix de base. On peut donc travailler dans une base $\mathcal{B}$ fixée.

On donne d'abord la preuve dans le cas où $N = 0$ sur D, c'est-à-dire $\ell_i = 1$ pour $i \in \{1, \cdots, r\}$. On a $\underline{D} = \oplus_{i=1}^{r}\underline{D}(i)$ et $\underline{D}(i) = \underline{D}_{i,1} = \underline{D}_i$. Supposons dans un premier temps $w = \mathrm{Id}$ et $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in B_Hw^{\mathrm{alg}}w_0B_H/B_H$. Si l'on explicite la filtration de Hodge dans ce cas dans la base $\mathcal{B}_\sigma = (e_{j,\sigma})_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ (notons que $m_r = n$), on trouve un drapeau dont les gradués sont de la forme (pour chaque σ) :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Gr}^{h_{n+1-j,\sigma}}D_{L',\sigma} =\\ &\quad L'\otimes_{L,\sigma}E\cdot\big(*\,e_{1,\sigma}\oplus *e_{2,\sigma}\oplus\cdots\oplus *e_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}}w_{0,\sigma})(j)-1,\sigma}\oplus e_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}}w_{0,\sigma})(j),\sigma}\big)\end{aligned} \tag{7.3}$$

où $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\mathrm{Gr}^{h_\cdot}D_{L',\sigma} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Fil}^{h_\cdot}D_{L',\sigma}/\mathrm{Fil}^{h_\cdot+1}D_{L',\sigma}$ et $* \in L'\otimes_{L,\sigma}E$ (rappelons que $w^{\mathrm{alg}}w_0 = (w_\sigma^{\mathrm{alg}}w_{0,\sigma})_\sigma$ est un élément du groupe de Weyl de $H \cong \prod_\sigma \mathrm{GL}_{n/E}$ et notons que $*$ peut être nul, i.e. par exemple $e_{1,\sigma}$ n'apparaît pas nécessairement dans chaque gradué). On en déduit en particulier pour $i \in \{1, \cdots, r\}$ en notant que $w_{0,\sigma}^{-1}(j) = w_{0,\sigma}(j) = n+1-j$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{[E:L]}t_H\big(\oplus_{j=1}^{i}\underline{D}(j), \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}\big) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}}\sum_{j=1}^{n_1+n_2+\cdots+n_i}h_{n+1-(w_\sigma^{\mathrm{alg}}w_{0,\sigma})^{-1}(j),\sigma}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}}\sum_{j=1}^{n_1+n_2+\cdots+n_i}h_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j),\sigma}.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Pour $j \in \{1, \cdots, r\}$, soit $\chi_{\pi(j)} : L^\times \to E^\times$ le caractère central de $\pi(j)$ ($= \pi_j$ ici), on a (voir la preuve de [6, Prop.5.1]) :

$$\frac{1}{[E:L]} t_N(\underline{D}(j)) = [L:L_0] \operatorname{val}\big(\chi_{\pi(j)}(\varpi_L)\big) - [L:\mathbb{Q}_p] \frac{n_j(n_j-1)}{2} \tag{7.5}$$

de sorte que les inégalités (7.1) sont équivalentes aux inégalités pour $i \in \{1, \cdots, r\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \sum_{j=1}^{n_1+n_2+\cdots+n_i} & h_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j),\sigma} \\ & \leqslant \sum_{j=1}^{i} \Big([L:L_0] \operatorname{val}\big(\chi_{\pi(j)}(\varpi_L)\big) - [L:\mathbb{Q}_p] \frac{n_j(n_j-1)}{2}\Big)\end{aligned} \tag{7.6}$$

(avec égalité pour $i = r$). On a par ailleurs en notant ρ_σ la demi-somme des racines positives de $\mathrm{GL}_n \times_{L,\sigma} E$ et $\lambda_\sigma = (\lambda_{\sigma,1}, \cdots, \lambda_{\sigma,n})$:
(7.7)
$$\begin{aligned} w_\sigma^{\mathrm{alg}} \cdot \lambda_\sigma = w_\sigma^{\mathrm{alg}}(\lambda_\sigma + \rho_\sigma) - \rho_\sigma &= \Big(\lambda_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j),\sigma} + j - (w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j)\Big)_{1\leqslant j\leqslant n} \\ &= \Big(- h_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j),\sigma} - (n-j)\Big)_{1\leqslant j\leqslant n}.\end{aligned}$$

Comme $(w^{\mathrm{alg}} \cdot \lambda)(z) = \prod_\sigma (w_\sigma^{\mathrm{alg}} \cdot \lambda_\sigma)(\sigma(z))$, les conditions (7.2) s'explicitent donc comme suit (en vertu de la description ci-dessus de $Z_{L_{P_{\mathrm{Id}}}}(L)^+$, de (5.3) pour $P = P_{\mathrm{Id}}$ et en se souvenant que $\operatorname{val}(\varpi_L) = [L:L_0]^{-1}$ et $\operatorname{val}(|\varpi_L|_L^{-1}) = [L_0:\mathbb{Q}_p]$) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{[L:L_0]} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \Big(& \sum_{j=1}^{n_1+\cdots+n_i} \big(- h_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j),\sigma} - (n-j)\big)\Big) \\ & + \sum_{j=1}^{i} \Big(\operatorname{val}\big(\chi_{\pi(j)}(\varpi_L)\big) + [L_0:\mathbb{Q}_p] n_j \big(n - (n_1 + \cdots + n_j)\big)\Big) \geqslant 0\end{aligned} \tag{7.8}$$

pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$ avec $= 0$ (au lieu de $\geqslant 0$) pour $i = r$ puisque $Z_G(L)$ est un groupe. En multipliant par $[L:L_0]$, l'inégalité (7.8) se récrit :

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \sum_{j=1}^{n_1+n_2+\cdots+n_i} h_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j),\sigma} \leqslant [L:L_0] \sum_{j=1}^{i} \operatorname{val}\big(\chi_{\pi(j)}(\varpi_L)\big) - C \tag{7.9}$$

(avec égalité pour $i = r$) où :

$$C \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \sum_{j=1}^{n_1+\cdots+n_i} (n-j) - [L:\mathbb{Q}_p]\sum_{j=1}^{i} n_j\big(n-(n_1+\cdots+n_j)\big)$$
$$= [L:\mathbb{Q}_p]\Big(\sum_{j=1}^{n_1+\cdots+n_i}(n-j) - \sum_{j=1}^{i} n_j\big(n-(n_1+\cdots+n_j)\big)\Big).$$

Un calcul élémentaire montre que l'on a :

$$C = [L:\mathbb{Q}_p]\Big(-\frac{(n_1+\cdots+n_i)(n_1+\cdots+n_i+1)}{2} + \sum_{j=1}^{i} n_j(n_1+\cdots+n_j)\Big)$$
$$= [L:\mathbb{Q}_p]\sum_{j=1}^{i}\frac{n_j(n_j-1)}{2}$$

et l'on voit que (7.9) est la même chose que (7.6). Comme on passe d'un point dans $B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H$ à un point dans $P_{H,\mathrm{Id}} w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H$ en changeant la base de chaque $D(i)_{L',\sigma}$ (cf. preuve de la Proposition 6.4), ce qui ne change donc pas les conditions (7.1) ou (7.6), on voit que le résultat précédent reste valable pour $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in P_{H,\mathrm{Id}} w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H$.

La preuve pour w arbitraire est la même en remplaçant $(e_{j,\sigma})_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ par $(e_{\widehat{w}^{-1}(j),\sigma})_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ pour tout σ.

Enfin, la preuve dans le cas $\underline{D}$ quelconque, i.e. N éventuellement non nul, est analogue en remplaçant n_j par $n(j)$ ($j \in \{1,\cdots,\sum_{s=1}^{r}\ell_s\}$) et $(e_{j,\sigma})_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ par la base du drapeau évident (6.3), c'est-à-dire $(f_{j,\sigma})_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ où les $f_{j,\sigma}$ sont définis par :

$$f_{\sum_{s=1}^{i-1} l_s n_s + (\ell-1)n_i + k,\sigma} \overset{\text{déf}}{=} N^{\ell_i-\ell}(e_{m_{i-1}+k,\sigma}) \tag{7.10}$$

pour $i \in \{1,\cdots,r\}$, $\ell \in \{1,\cdots,\ell_i\}$ et $k \in \{1,\cdots,n_i\}$. □

Proposition 7.5. — *Soit $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}$ et $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ une filtration de Hodge de poids de Hodge-Tate $\underline{h}$ sur $\underline{D}$ telle que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1}\overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$ dans un quelconque choix de base $\mathcal{B}$ comme au §6. Les conditions (7.1) impliquent les conditions (7.2).*

Démonstration. — Là encore, quitte à remplacer $\underline{D}(j)$ par $\underline{D}(w^{-1}(j))$ et $f_{j,\sigma}$ par $f_{\widehat{w}^{-1}(j),\sigma}$ (cf. (7.10)), il suffit de traiter le cas $w = \mathrm{Id}$. Par (4.4), on a $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in B_H w_1^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H$ pour un $w_1^{\mathrm{alg}} \in W_H$ tel que $w_1^{\mathrm{alg}} \geqslant w^{\mathrm{alg}}$ et par la Proposition 7.4, (7.1) pour $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est équivalent à (7.2) pour w_1^{alg}. Il suffit donc de montrer que (7.2) pour w_1^{alg} implique (7.2) pour w^{alg}. Par récurrence (cf. [23, §0.4]), on peut supposer $w_1^{\mathrm{alg}} = s_\alpha w^{\mathrm{alg}}$ et $\ell(w_1^{\mathrm{alg}}) > \ell(w^{\mathrm{alg}})$

dans W_H où s_α est la réflexion par rapport à une racine de B_H. On a donc $\sigma\in\mathcal{S}$ et $j_0<j_1\in\{1,\cdots,n\}$ tels que $w_{1,\tau}^{\mathrm{alg}}=w_\tau^{\mathrm{alg}}$ si $\tau\in\mathcal{S}\backslash\{\sigma\}$ et $w_{1,\sigma}^{\mathrm{alg}}=s_\alpha w_\sigma^{\mathrm{alg}}$ où s_α est la transposition de $\{1,\cdots,n\}$ qui échange j_0 et j_1 (i.e. α est la racine "$\varepsilon_{j_0}-\varepsilon_{j_1}$"). De plus, la condition $\ell(s_\alpha w_\sigma^{\mathrm{alg}})>\ell(w_\sigma^{\mathrm{alg}})$ est équivalente à $(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(\alpha)>0$ ([23, §0.3]), i.e. $(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j_0)<(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j_1)$ ou encore $h_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j_0),\sigma}<h_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j_1),\sigma}$. Donc on a $(w_{1,\sigma}^{\mathrm{alg}})^{-1}(j)=(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j)$ si $j\notin\{j_0,j_1\}$, $(w_{1,\sigma}^{\mathrm{alg}})^{-1}(j_0)=(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j_1)>(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j_0)$ et $(w_{1,\sigma}^{\mathrm{alg}})^{-1}(j_1)=(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j_0)$ de sorte que pour tout $i\in\{1,\cdots,n\}$ on a :

$$\sum_{j=1}^{i}h_{(w_\sigma^{\mathrm{alg}})^{-1}(j),\sigma}\leqslant\sum_{j=1}^{i}h_{(w_{1,\sigma}^{\mathrm{alg}})^{-1}(j),\sigma}$$

avec égalité pour $i=n$. Comme $h_{(w_\tau^{\mathrm{alg}})^{-1}(j),\tau}=h_{(w_{1,\tau}^{\mathrm{alg}})^{-1}(j),\tau}$ si $\tau\neq\sigma$, on voit en particulier que si l'inégalité (7.9) est vraie pour w_1^{alg} (plus précisément l'analogue de (7.9) dans le cas N quelconque, rappelons que cette inégalité est équivalente à (7.2), cf. preuve de la Proposition 7.4) alors elle est vraie pour w^{alg}, d'où le résultat. $\square$

Si $\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet$ est une filtration de Hodge comme au §6, on note $\mathcal{W}(\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)\subseteq\mathcal{W}$ le sous-ensemble des (w^{alg},w) tels que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)\in\widehat{w}^{-1}\overline{B_Hw^{\mathrm{alg}}w_0B_H/B_H}$ pour un choix quelconque de base $\mathcal{B}$ comme au §6.

Théorème 7.6. — *Soit $\underline{D}$ un module de Deligne-Fontaine vérifiant les hypothèses (5.1) et (5.2). Soit $\underline{h}=(h_{i,\sigma})_{i\in\{1,\cdots,n\},\,\sigma\in\mathcal{S}}$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $h_{1,\sigma}<h_{2,\sigma}<\cdots<h_{n,\sigma}$ pour tout σ et soit $\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet$ une filtration de Hodge de poids de Hodge-Tate $\underline{h}$ sur $\underline{D}$. Soit $\lambda=\otimes_\sigma\lambda_\sigma$ avec $\lambda_\sigma=(-h_{j,\sigma}-(n-j))_{1\leqslant j\leqslant n}$, π_{w,P_w} comme en (5.3) et $\chi_{\pi_{w,P_w}}$, $Z_{L_{P_w}}(L)^+$ comme ci-dessus pour w permutation de $\{1,\cdots,\sum_{i=1}^r\ell_i\}$. Alors la filtration $\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet$ est faiblement admissible si et seulement si pour tout $(w^{\mathrm{alg}},w)\in\mathcal{W}(\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)$ on a :*

$$(w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda)(z)\chi_{\pi_{w,P_w}}(z)\in\mathcal{O}_E\quad\forall\,z\in Z_{L_{P_w}}(L)^+. \tag{7.11}$$

Démonstration. — Supposons $\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet$ faiblement admissible et soit $(w^{\mathrm{alg}},w)\in\mathcal{W}(\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)$. Alors par définition $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)\in\widehat{w}^{-1}\overline{B_Hw^{\mathrm{alg}}w_0B_H/B_H}$ et par la Proposition 7.5 les conditions (7.11) sont satisfaites. Supposons les conditions (7.11) satisfaites pour tout $(w^{\mathrm{alg}},w)\in\mathcal{W}(\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)$ et soit $\underline{D}'\subseteq\underline{D}$ un sous-module de Deligne-Fontaine. Par le Lemme 7.3, il existe une permutation admissible w de $\{1,\cdots,\sum_{s=1}^r\ell_s\}$ et $i\in\{1,\cdots,\sum_{s=1}^r\ell_s\}$ tel que $\underline{D}'=\oplus_{j=1}^i\underline{D}(w^{-1}(j))$. Par la décomposition de Bruhat, il existe $w^{\mathrm{alg}}\in W_H$ tel que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)\in\widehat{w}^{-1}P_{H,w}w^{\mathrm{alg}}w_0B_H/B_H$. Soit $w_H=(w_{H,\sigma})_\sigma$ un élément de $W_{P_{H,w}}$ tel que, pour tout $\sigma\in\mathcal{S}$, $w_{H,\sigma}w_\sigma^{\mathrm{alg}}\cdot 0$ est dominant pour $L_{\overline{P}_w}\times_{L,\sigma}E=L_{P_w}\times_{L,\sigma}E$ par rapport à $\overline{B}\times_{L,\sigma}E$ (un tel w_H existe car

$W_{P_{H,w}}$ est le groupe de Weyl de $P_{H,w} = (\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}_p}\overline{P}_w) \times_{\mathbb{Q}_p} E)$. Alors on a $P_w \subseteq P(w_H w^{\mathrm{alg}})$ par définition de $P(w_H w^{\mathrm{alg}})$ (cf. début du §6). Quitte à remplacer w^{alg} par $w_H w^{\mathrm{alg}}$, on a encore $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1} P_{H,w} w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H$ (en voyant $w_H \in W_{P_{H,w}}$ dans $P_{H,w}$), et on peut donc supposer $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}$. Par la Proposition 7.4, on en déduit $t_H(\underline{D}', \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \leqslant t_N(\underline{D}')$ avec égalité si $\underline{D}' = \underline{D}$, et $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est donc faiblement admissible. □

Corollaire 7.7. — *Soit $\underline{D}$, $\underline{h}$, $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ comme dans le Théorème 7.6. Si la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ possède un réseau stable par $\mathrm{GL}_n(L)$ alors la filtration $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est faiblement admissible.*

Démonstration. — L'hypothèse implique que, pour tout $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$, le constituant $C(w^{\mathrm{alg}}, w) = \mathcal{F}^{\mathrm{GL}_n}_{P(w^{\mathrm{alg}})}\big(M_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda}, \overline{\pi}_{w,P(w^{\mathrm{alg}})}\big)$ possède un réseau invariant. Par le Corollaire 3.6 appliqué à $G = \mathrm{GL}_{n/L}$, $M = M_{w^{\mathrm{alg}}\cdot\lambda}$, $P = P_w$, $\pi_P = \pi_{w,P_w}$, $Q = P(w^{\mathrm{alg}})$ et $\overline{\pi}_Q = \overline{\pi}_{w,P(w^{\mathrm{alg}})}$, on a $(w^{\mathrm{alg}} \cdot \lambda)(z)\chi_{\pi_{w,P_w}}(z) \in \mathcal{O}_E$ si $z \in Z_{L_{P_w}}(L)^+$. Le résultat découle donc du Théorème 7.6. □

8. Quelques cas particuliers

On examine la compatibilité de la représentation $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ avec les résultats de [6] (cas générique), [1] (cas GL_2) et [3] (cas ordinaire).

On utilise les notations des §§5, 6 et 7, en particulier on fixe un module de Deligne-Fontaine $\underline{D}$ satisfaisant (5.1), (5.2) et des poids de Hodge-Tate $\underline{h}$. Les filtrations de Hodge $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ sur $\underline{D}$ ci-dessous sont toujours supposées de poids de Hodge-Tate $\underline{h}$.

8.1. Cas générique

Définition 8.1. — *On dit que $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est générique si :*

$$\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1} P_{H,w} w_0 B_H/B_H$$

pour tout permutation admissible w de $\{1, \cdots, \sum_{s=1}^{r} \ell_s\}$.

Rappelons que cette définition est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$ (voir par exemple le début de la preuve de la Proposition 7.4). Comme chaque $\widehat{w}^{-1} P_{H,w} w_0 B_H/B_H$ contient un translaté de la grosse cellule $B_H w_0 B_H/B_H$ de la variété H/B_H, on voit qu'une filtration "prise au hasard" est générique. Si $\underline{D}$ est irréductible, toute filtration de Hodge est générique.

Lemme 8.2. — *La filtration de Hodge* $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ *est générique si et seulement si l'on a* $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) = \pi(\underline{D},\underline{h})$ *(i.e. si et seulement si* $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ *est localement algébrique).*

Démonstration. — Montrons d'abord que si $(w_1^{\mathrm{alg}}, w), (w_2^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}$ et $w_1^{\mathrm{alg}} \neq w_2^{\mathrm{alg}}$, on a :

$$(P_{H,w} w_1^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H) \cap (P_{H,w} w_2^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H) = \emptyset. \tag{8.1}$$

Il suit des hypothèses que $P_{H,w} \subseteq P_H(w_i^{\mathrm{alg}})$, $i = 1,2$. Supposons $w_2^{\mathrm{alg}} = w' w_1^{\mathrm{alg}}$ pour un $w' \in W_{P_{H,w}}$, $w' \neq 1$ et soit α une racine positive de $L_{P_{H,w}}$ (par rapport à B_H) telle que ${w'}^{-1}(\alpha) < 0$. On a (avec des notations évidentes) :

$$\begin{aligned}\langle w_2^{\mathrm{alg}} \cdot 0, \alpha^\vee\rangle &= \langle (w' w_1^{\mathrm{alg}}) \cdot 0, \alpha^\vee\rangle \\ &< \langle w'(w_1^{\mathrm{alg}} \cdot 0), \alpha^\vee\rangle = \langle w_1^{\mathrm{alg}} \cdot 0, {w'}^{-1}(\alpha)^\vee\rangle \leqslant 0\end{aligned}$$

où la première inégalité découle de $\langle w'(\rho_H) - \rho_H, \alpha^\vee\rangle = \langle \rho_H, {w'}^{-1}(\alpha)^\vee\rangle - \langle \rho_H, \alpha^\vee\rangle < 0$ et la deuxième du fait que $w_1^{\mathrm{alg}} \cdot 0$ est dominant pour $L_{P_{H,w}} \cap B_H$. Mais cela contredit le fait que $w_2^{\mathrm{alg}} \cdot 0$ est aussi dominant pour $L_{P_{H,w}} \cap B_H$. On a donc $w_2^{\mathrm{alg}} {w_1^{\mathrm{alg}}}^{-1} \notin W_{P_{H,w}}$ et (8.1) découle alors de la décomposition de Bruhat généralisée (cf. [12, Lem.5.5] par exemple). On en déduit que si $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}$ et $w^{\mathrm{alg}} \neq 1$, on a :

$$(P_{H,w} w_0 B_H/B_H) \cap \overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H} = \emptyset. \tag{8.2}$$

En effet, sinon il existe $w_1^{\mathrm{alg}} \in W_H$ tel que $w_1^{\mathrm{alg}} \geqslant w^{\mathrm{alg}}$ (donc en particulier $w_1^{\mathrm{alg}} \neq 1$) et $w_1^{\mathrm{alg}} w_0 \in P_{H,w} w_0 B_H$ ce qui contredit (8.1) appliqué avec $w_2^{\mathrm{alg}} = 1$. Supposons maintenant $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ générique. On a $\widehat{w}^{-1} P_{H,w} w_0 B_H/B_H \subseteq \widehat{w}^{-1} \overline{B_H w_0 B_H/B_H} = H/B_H$ et par (8.2) on en déduit $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1} \overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$ si et seulement si $w^{\mathrm{alg}} = 1$ d'où $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) = \pi(\underline{D},\underline{h})$. Réciproquement supposons $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) = \pi(\underline{D},\underline{h})$ et soit w une permutation admissible de $\{1, \cdots, \sum_{i=1}^r \ell_i\}$. Par (8.1) (et la décomposition de Bruhat généralisée) il existe un *unique* $w^{\mathrm{alg}} \in W_H$ tel que $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}$ et $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1} P_{H,w} w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H$. Or $\widehat{w}^{-1} P_{H,w} w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H \subseteq \widehat{w}^{-1} \overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$ (voir la fin de la preuve du (i) de la Proposition 6.4) et par hypothèse on a $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \notin \widehat{w}^{-1} \overline{B_H w^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$ si $w^{\mathrm{alg}} \neq 1$. On a donc forcément $w^{\mathrm{alg}} = 1$ i.e. $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \widehat{w}^{-1} P_{H,w} w_0 B_H/B_H$. □

Le corollaire suivant du Théorème 7.6 et du Corollaire 7.7 combinés avec le Lemme 8.2 précise certains résultats de [6] (et de [32], [22]) sous les hypothèses (5.1), (5.2).

Corollaire 8.3. — *Soit* $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ *une filtration de Hodge générique sur* $\underline{D}$*. Alors* $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ *est faiblement admissible si et seulement si pour toute permutation admissible* w *de* $\{1,\cdots,\sum_{s=1}^{r}\ell_s\}$ *on a :*

$$\lambda(z)\chi_{\pi_{w,P_w}}(z)\in\mathcal{O}_E\quad\forall\ z\in Z_{L_{P_w}}(L)^{+}.$$

En particulier, s'il existe une filtration de Hodge faiblement admissible sur $\underline{D}$*, alors il en existe une générique (faiblement admissible) et si* $\pi(\underline{D},\underline{h})$ *possède un réseau stable par* $\mathrm{GL}_n(L)$*, alors toute filtration de Hodge générique est faiblement admissible.*

Les filtrations de Hodge construites dans [6] sont en fait génériques. Il est conjecturé dans [6] la réciproque au tout dernier énoncé du Corollaire 8.3 : s'il existe une filtration de Hodge faiblement admissible sur $\underline{D}$ (que l'on peut supposer générique), alors il existe un réseau stable par $\mathrm{GL}_n(L)$ sur $\pi(\underline{D},\underline{h})$. Récemment, de nombreux cas de cette réciproque ont été démontrés (que l'on ne recense pas ici). Il est donc naturel de se demander si cette réciproque reste vraie en dehors du cas générique.

Question 8.4. — *Est-ce que la réciproque du Corollaire 7.7 est vraie ? C'est-à-dire est-ce que la faible admissibilité de* $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ *est toujours suffisante pour qu'il existe un réseau stable par* $\mathrm{GL}_n(L)$ *sur* $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ *?*

8.2. Cas GL_2

On suppose ici $\underline{D}$ libre de rang 2 sur $L_0'\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$. Si $\underline{D}$ est irréductible, auquel cas $\underline{D}$ satisfait automatiquement (5.1) et (5.2), on a $\mathcal{W}=\{(1,\mathrm{Id})\}$ et $\pi(\underline{D},\underline{h},\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})=\pi(\underline{D},\underline{h})$ pour toute filtration de Hodge $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ (et rappelons que $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est faiblement admissible si et seulement si le caractère central de $\pi(\underline{D},\underline{h})$ est entier).

Si $\underline{D}$ est réductible et $N\neq 0$, on a $\underline{D}=\underline{D}(1)\oplus\underline{D}(2)$ avec $N(\underline{D}(2))=\underline{D}(1)$ et $N(\underline{D}(1))=0$ (cf. (5.2)), et la seule permutation admissible w de $\{1,\cdots,\sum_{i=1}^{r}\ell_i\}=\{1,2\}$ est $w=\mathrm{Id}$. Pour chaque $\sigma\in\mathcal{S}$ on fixe une base $\mathcal{B}_\sigma=(N(e_\sigma),e_\sigma)$ du E-espace vectoriel $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ telle que e_σ est une base de $D(2)_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$. La donnée d'une filtration de Hodge $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ sur $\underline{D}$ est équivalente à la donnée pour chaque $\sigma\in\mathcal{S}$ d'une droite :

$$\mathrm{Fil}^{h_{2,\sigma}}D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}=E(a_{1,\sigma}N(e_\sigma)\oplus a_{2,\sigma}e_\sigma),\quad(a_{1,\sigma},a_{2,\sigma})\in E^2\backslash\{(0,0)\}$$

de $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}=\mathrm{Fil}^{h_{1,\sigma}}D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$. Les éléments de W_H sont paramétrés par les parties de $\mathcal{S}$ comme suit : à $J\subseteq\mathcal{S}$ correspond $w_J^{\mathrm{alg}}=(w_{J,\sigma}^{\mathrm{alg}})_\sigma\in W_H$

tel que $w_{J,\sigma}^{\mathrm{alg}} \neq 1$ si et seulement si $\sigma \in J$ et on a $w_J^{\mathrm{alg}} \leqslant w_{J'}^{\mathrm{alg}}$ si et seulement si $J \subseteq J'$. On voit donc que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in B_H w_J^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H$ si et seulement si $a_{2,\sigma} \neq 0$ pour $\sigma \notin J$ et $a_{2,\sigma} = 0$ pour $\sigma \in J$. Autrement dit $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \overline{B_H w_J^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$ si et seulement si $a_{2,\sigma} = 0$ pour $\sigma \in J$. Soit $Z_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \{\sigma \in \mathcal{S}, a_{2,\sigma} = 0\}$, on voit donc que :

$$\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) = \oplus_{J \subseteq Z_2} C(w_J^{\mathrm{alg}}, \mathrm{Id}).$$

Soit $\chi(2) : L^\times \to E^\times$ le caractère lisse tel que $\chi(2) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{WD}(\underline{D}(2)) \circ \mathrm{rec}^{-1}$ (où l'on munit ici $\underline{D}(2)$ de $N = 0$), on a explicitement si $J \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} C(w_J^{\mathrm{alg}}, \mathrm{Id}) = \Big(\bigotimes_{\sigma \in \mathcal{S}} \sigma(\det)^{-h_{2,\sigma}}\Big) \otimes_E \Big(\bigotimes_{\sigma \notin J} \big(\mathrm{Sym}^{h_{2,\sigma}-h_{1,\sigma}-1} E^2\big)^{\sigma}\Big) \\ \otimes_E \Big(\mathrm{Ind}_{B(L)}^{\mathrm{GL}_2(L)} \chi(2) \prod_{\sigma \in J} \sigma(z)^{-1} \otimes \chi(2) \prod_{\sigma \in J} \sigma(z)^{h_{2,\sigma}-h_{1,\sigma}}\Big)^{J-\mathrm{an}} \end{aligned} \tag{8.3}$$

(l'action de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur $(\mathrm{Sym}^{h_{2,\sigma}-h_{1,\sigma}-1} E^2)^{\sigma}$ se faisant via le plongement σ) et idem si $J = \emptyset$ en remplaçant l'induite localement J-analytique ([36, §2]) par $\mathrm{Steinberg} \otimes_E (\chi(2) \circ \det)$. Notons que $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est faiblement admissible si et seulement si $2\,\mathrm{val}(\chi(2)(\varpi_L)) = ([L : \mathbb{Q}_p] + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} (h_{1,\sigma} + h_{2,\sigma}))\,\mathrm{val}(\varpi_L)$ et $\sum_{\sigma \in \mathcal{S} \setminus Z_2} (h_{2,\sigma} - h_{1,\sigma}) \geqslant [L : \mathbb{Q}_p] + \sum_{\sigma \in Z_2} (h_{2,\sigma} - h_{1,\sigma})$ (cela force $Z_2 = \emptyset$ si $L = \mathbb{Q}_p$ ou si $h_{2,\sigma} - h_{1,\sigma} = 1$ pour tout σ).

Si $\underline{D}$ est réductible et $N = 0$, on a $\underline{D} = \underline{D}(1) \oplus \underline{D}(2)$ et l'unique permutation non triviale w de $\{1, \cdots, \sum_{i=1}^r \ell_i\} = \{1, 2\}$ est maintenant admissible. Pour chaque σ dans $\mathcal{S}$ on fixe une base $\mathcal{B}_\sigma = (e_{1,\sigma}, e_{2,\sigma})$ de $D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ telle que $e_{i,\sigma}$ est une base de $D(i)_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)}$ ($i = 1, 2$) et on a (pour chaque σ) :

$$\mathrm{Fil}^{h_{2,\sigma}} D_{L',\sigma}^{\mathrm{Gal}(L'/L)} = E(a_{1,\sigma} e_{1,\sigma} \oplus a_{2,\sigma} e_{2,\sigma}), \quad (a_{1,\sigma}, a_{2,\sigma}) \in E^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Notons $Z_i \stackrel{\text{déf}}{=} \{\sigma \in \mathcal{S}, a_{i,\sigma} = 0\}$ ($i = 1, 2$), alors comme dans le cas $N \neq 0$ on voit que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in \overline{B_H w_J^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$ (resp. $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in w^{-1} \overline{B_H w_J^{\mathrm{alg}} w_0 B_H/B_H}$) si et seulement si $J \subseteq Z_2$ (resp. $J \subseteq Z_1$). On en déduit :

$$\begin{aligned} &\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \\ &\quad = \pi(\underline{D}, \underline{h}) \oplus \big(\oplus_{\emptyset \subsetneq J \subseteq Z_2} C(w_J^{\mathrm{alg}}, \mathrm{Id})\big) \oplus \big(\oplus_{\emptyset \subsetneq J \subseteq Z_1} C(w_J^{\mathrm{alg}}, w)\big) \end{aligned} \tag{8.4}$$

où les constituants $C(w_J^{\mathrm{alg}}, \mathrm{Id})$, $C(w_J^{\mathrm{alg}}, w)$ se décrivent de manière analogue à (8.3). Lorsque l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ est triviale et $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est faiblement admissible (cas "cristallin"), alors (8.4) est exactement le socle de la représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique de $\mathrm{GL}_2(L)$ définie dans [1, §4] (où l'on ne supposait pas (5.2)).

Lorsque $n = 2$ et $L = \mathbb{Q}_p$, on a enfin le résultat suivant qui se déduit de [9], [10] et [25] et dont on laisse les détails de vérification au lecteur.

Proposition 8.5. — *Supposons $n = 2$ et $L = \mathbb{Q}_p$. Soit $\underline{D}$ un module de Deligne-Fontaine vérifiant l'hypothèse (5.2), $\underline{h} = (h_1, h_2)$ des poids de Hodge-Tate tels que $h_1 < h_2$ et $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ une filtration de Hodge faiblement admissible sur $\underline{D}$ de poids de Hodge-Tate $\underline{h}$ (notons que la condition de faible admissibilité force dans ce cas $\underline{D}$ à vérifier (5.1)). Soit $\Pi(\underline{D})$ le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire sur E correspondant à la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ associée à $\underline{D}$ (par la correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ [10]). Alors on a une injection équivariante $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \hookrightarrow \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \Pi(D)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ qui est un isomorphisme lorsque $\underline{D}$ est réductible.*

Il est probable que $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \cong \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \Pi(D)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ reste vrai pour $\underline{D}$ irréductible.

8.3. Cas ordinaire

On suppose ici $L = \mathbb{Q}_p$, $N = 0$ et on oublie σ en indice puisque $\mathcal{S}$ est un singleton (l'unique plongement de $\mathbb{Q}_p$ dans E). On considère $\underline{D}$ de la forme $\underline{D} = \underline{D}(1) \oplus \cdots \oplus \underline{D}(n)$ avec $D(i) = D_i$ libre de rang 1 sur $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ tel que $t_H(\underline{D}(i)) = [E : \mathbb{Q}_p] h_i$ où $h_1 < \cdots < h_n$ est la liste des poids de Hodge-Tate. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de $D_{L'}^{\mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q}_p)}$ telle que e_i est une base de $D(i)_{L'}^{\mathrm{Gal}(L'/\mathbb{Q}_p)}$. On considère une filtration de Hodge $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$:

$$t_H\big(\oplus_{j=1}^{i} \underline{D}(j), \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}\big) = t_N\big(\oplus_{j=1}^{i} \underline{D}(j)\big) = [E : \mathbb{Q}_p] \sum_{j=1}^{i} h_j.$$

Il est facile de vérifier que $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ est faiblement admissible, que l'on a :

$$\mathrm{Gr}^{h_i} D_{L'} = L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \cdot \big(a_{1,i} e_1 \oplus a_{2,i} e_2 \oplus \cdots \oplus a_{i-1,i} e_{i-1} \oplus e_i\big), \quad i \in \{1, \cdots, n\} \tag{8.5}$$

pour des $a_{i,j}$ dans $L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ (qui peuvent être nuls) et que la représentation ρ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ associée par [11] est triangulaire supérieure (et potentiellement cristalline) de la forme :

$$\rho \cong \begin{pmatrix} (\eta_1 \circ \mathrm{rec})\varepsilon^{-h_1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ 0 & (\eta_2 \circ \mathrm{rec})\varepsilon^{-h_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & (\eta_n \circ \mathrm{rec})\varepsilon^{-h_n} \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

où $\varepsilon : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{Z}_p^\times \subset E^\times$ est le caractère cyclotomique p-adique, $\eta_i : \mathbb{Q}_p^\times \to E^\times$ le caractère lisse $\eta_i \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathrm{WD}(\underline{D}(i)) \circ \mathrm{rec}^{-1})|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}^{h_i}$ et $c_{i,j} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \to E$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ des fonctions continues. L'hypothèse (5.2) force $(\eta_i \circ \mathrm{rec}\,\varepsilon^{-h_i})(\eta_{i+1} \circ \mathrm{rec}\,\varepsilon^{-h_{i+1}})^{-1} \neq \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ et comme $h_i < h_{i+1}$, on voit que ρ est générique au sens de [3, Def.3.3.1]. De plus toute représentation ρ de la forme (8.6) correspond à un unique $\underline{\mathrm{Fil}}^\bullet$ de la forme (8.5).

Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ soit $\chi(i) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{WD}(\underline{D}(i)) \circ \mathrm{rec}^{-1} = \eta_i|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}^{-h_i}$. On a pour $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}$ (cf. (5.3) et (6.1)) :

$$
\begin{aligned}
C(w^{\mathrm{alg}}, w) = \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \Big(&\mathrm{Ind}_{\overline{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} (w^{\mathrm{alg}} \cdot \lambda)\big(\chi(w^{-1}(1))|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}^{-(n-1)} \\
&\otimes \chi(w^{-1}(2))|\cdot|_{\mathbb{Q}_p}^{-(n-2)} \otimes \cdots \otimes \chi(w^{-1}(n))\big)\Big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}.
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

Comme $(w^{\mathrm{alg}} \cdot \lambda)_i = -h_{(w^{\mathrm{alg}})^{-1}(i)} - (n-i)$ (cf. (7.7)), un calcul montre que ($i \in \{1, \cdots, n\}$, $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ et on identifie ε et $\varepsilon \circ \mathrm{rec}^{-1}$) :

$$
\begin{aligned}
&\big((w^{\mathrm{alg}} \cdot \lambda)_i \chi(w^{-1}(i))\big)(x)|x|_{\mathbb{Q}_p}^{-(n-i)} \\
&\qquad = \big(x^{h_{w^{-1}(i)} - h_{(w^{\mathrm{alg}})^{-1}(i)}}\big)\big(\eta_{w^{-1}(i)}\varepsilon^{-h_{w^{-1}(i)}}\varepsilon^{-(n-i)}\big)(x).
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

Définition 8.6. — *Soit $(w^{\mathrm{alg}}, w) \in \mathcal{W}$, on dit que $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ est unitaire s'il existe w' tel que $(w^{\mathrm{alg}}, w) \sim (w^{\mathrm{alg}}, w')$ dans $\mathcal{W}$ (i.e. $C(w^{\mathrm{alg}}, w) \cong C(w^{\mathrm{alg}}, w')$ par le Lemme 6.2) et tel que $(w^{\mathrm{alg}} \cdot \lambda)(z)\chi_{\pi_{w',P_{w'}}}(z) \in \mathcal{O}_E^\times$ pour tout $z \in Z_{L_{P_{w'}}}(L)^+$.*

Remarque 8.7. — La Définition 8.6 est valable dans le cas général (pas seulement ordinaire).

Comme $\eta_{w^{-1}(i)}\varepsilon^{-h_{w^{-1}(i)}}\varepsilon^{-(n-i)}$ est un caractère entier, on voit sur (8.8) que $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ est unitaire si et seulement si $C(w^{\mathrm{alg}}, w) \cong C(w^{\mathrm{alg}}, w')$ avec $h_{w'^{-1}(i)} = h_{(w^{\mathrm{alg}})^{-1}(i)}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, i.e. $w' = w^{\mathrm{alg}}$ puisque les h_i sont tous distincts. Autrement dit, dans le cas ordinaire, les $C(w^{\mathrm{alg}}, w)$ unitaires sont exactement les $C(w, w)$ (il y en a donc $n!$). On note $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)^{\mathrm{u}} \subseteq \pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)$ la sous-$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-représentation somme directe des constituants unitaires apparaissant dans $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^\bullet)$.

Soit $R^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{\varepsilon_i - \varepsilon_j, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ les racines positives de GL_n par rapport à $\overline{B}$ et $C \subseteq R^+$ le plus petit sous-ensemble *clos* (voir par exemple [3, §2.3]) tel que $\varepsilon_i - \varepsilon_j \in C$ si $a_{i,j} \neq 0$ dans (8.5). C'est un exercice de théorie de Hodge p-adique de vérifier que, quitte à conjuguer ρ par une matrice dans $\overline{B}(E)$, on peut supposer $c_{i,j} \equiv 0$ dans (8.6) si $\varepsilon_i - \varepsilon_j \notin C$ et que ρ est alors un *bon conjugué* au sens de [3, Def.3.2.4] (avec les notations de *loc.cit.* on a $C_\rho = C$). On dispose donc du $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ de [3, §3.3]. On pose :

$$\begin{aligned} W_C &\overset{\text{déf}}{=} \{w \in W, w^{-1}(i) < w^{-1}(j) \text{ pour tout } \varepsilon_i - \varepsilon_j \in C\} \\ &= \{w \in W, w^{-1}(i) < w^{-1}(j) \text{ pour tout } a_{i,j} \neq 0\}, \end{aligned}$$

la deuxième égalité découlant du fait que C est clos.

Lemme 8.8. — *On a* $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}\big(\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}\big)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}} = \oplus_{w^{-1}\in W_C} C(w,w)$.

Démonstration. — Pour $w \in W$ considérons la série principale continue (un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire admissible au sens de [3]) $\Pi(\rho)_w \overset{\text{déf}}{=} \big(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \eta(\rho)_w\big)^{\mathcal{C}^0}$ où :

$$\eta(\rho)_w \overset{\text{déf}}{=} \eta_{w^{-1}(1)}\varepsilon^{-h_{w^{-1}(1)}}\varepsilon^{-(n-1)} \otimes \cdots \otimes \eta_{w^{-1}(n)}\varepsilon^{-h_{w^{-1}(n)}}.$$

La représentation $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ est extension successive de représentations $\Pi(\rho)_w$ pour w^{-1} dans un sous-ensemble W_ρ de W contenant W_C, et les représentations $\Pi(\rho)_w$ en sous-objet dans $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ sont exactement les $\Pi(\rho)_w$ pour $w^{-1} \in W_C$ (cela résulte facilement de la construction de $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ dans [3, §3.3], en particulier [3, Prop.3.3.3], et d'une application du foncteur “parties ordinaires” d'Emerton [15]). Par exactitude du foncteur “vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques” ([35, Th.7.1]) et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(C(w',w'), \Pi(\rho)_{w''}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}) = 0$ si $w' \neq w''$ (cf. (8.7)), on se ramène à montrer que si $0 \to \Pi' \to \Pi \to \Pi(\rho)_{w'} \to 0$ est une extension non scindée dans la catégorie des $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires admissibles apparaissant en sous-quotient dans $\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}$ (donc avec ${w'}^{-1} \in W_\rho \backslash W_C$) et si $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(C(w',w'), {\Pi'}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}) = 0$, alors $C(w',w')$ ne peut être non plus dans le socle de $\Pi^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. Supposons que l'on a une injection $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$-équivariante continue $\iota : C(w',w') \hookrightarrow \Pi^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$. Par le Corollaire 3.3, l'irréductibilité de $C(w',w')$ et [13, (0.4)], on a une injection :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(C(w',w'), \Pi^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}(\eta(\rho)_{w'}\delta_{\overline{B}}, (\Pi^{\mathbb{Q}_p\text{-an}})^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}).$$

Donc ι donne un élément non nul dans $\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}(\eta(\rho)_{w'}\delta_{\overline{B}}, (\Pi^{\mathbb{Q}_p\text{-an}})^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)})$, ou bien, en tordant l'action de Hecke partout par $\delta_{\overline{B}}^{-1}$ (suivant les conventions de [15, §3.1] plutôt que celles de [14, §3.4]), dans

$$\mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}(\eta(\rho)_{w'}, (\Pi^{\mathbb{Q}_p\text{-an}})^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{T(\mathbb{Q}_p)^+}(\eta(\rho)_{w'}, \Pi^{\overline{N}(\mathbb{Z}_p)})$$

Par l'adjonction de [15, Th.4.4.6], il existe donc $\widehat{\iota} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(\Pi(\rho)_{w'}, \Pi)$ tel que $\widehat{\iota}|_{C(w',w')} = \iota$. Comme $C(w',w') = \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \Pi(\rho)_{w'}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$ par (8.7), on déduit de [35, Th.7.1] que $\widehat{\iota}$ est aussi injective. Comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(C(w',w'), {\Pi'}^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}) = 0,$$

la composée $\Pi(\rho)_{w'} \overset{\widehat{\iota}}{\hookrightarrow} \Pi \twoheadrightarrow \Pi(\rho)_{w'}$ est non nulle, donc est un scalaire non nul par [15, Th.4.4.6] et [15, Cor.4.3.5]. On a donc $\Pi \cong \Pi' \oplus \Pi(\rho)_{w'}$ ce qui est impossible. □

Théorème 8.9. — *On a un isomorphisme de représentations localement analytiques de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ *:*

$$\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})^{\mathrm{u}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \left(\Pi(\rho)^{\mathrm{ord}}\right)^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}$$

Démonstration. — Soit $\overline{B}_C \subseteq \overline{B}$ le groupe algébrique des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients $c_{i,j}$ (avec les mêmes notations que pour ρ en (8.6)) sont nuls si $\varepsilon_i - \varepsilon_j \notin C$. En particulier ρ est à valeurs dans $\overline{B}_C(E)$. Soit $w \in W$ tel que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in w^{-1}\overline{\overline{B}ww_0\overline{B}/\overline{B}}$, alors il existe $w^{\mathrm{alg}} \in W$ tel que $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in w^{-1}\overline{B}w^{\mathrm{alg}}w_0\overline{B}/\overline{B}$ et $w^{\mathrm{alg}} \geqslant w$ (cf. §4). Supposons $w^{\mathrm{alg}} > w$, alors en raisonnant comme dans la preuve de la Proposition 7.5, on a $\sum_{j=1}^{i} h_{w^{-1}(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{i} h_{(w^{\mathrm{alg}})^{-1}(j)}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ avec au moins un i tel que l'inégalité est *stricte*. Mais par la Proposition 7.4 et par (8.8) on doit avoir $x^{\sum_{j=1}^{i} h_{w^{-1}(j)} - \sum_{j=1}^{i} h_{(w^{\mathrm{alg}})^{-1}(j)}} \in \mathcal{O}_E$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$ ce qui est impossible. Donc $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in w^{-1}\overline{\overline{B}ww_0\overline{B}/\overline{B}}$ si et seulement si $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in w^{-1}\overline{B}ww_0\overline{B}/\overline{B}$ si et seulement si les gradués de $\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}$ pour $j \in \{1, \cdots, n\}$ sont de la forme (cf. (7.3)) :

$$\text{(8.9)}\quad \mathrm{Gr}^{h_j} D_{L'} = L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \cdot \left(* e_{w^{-1}(1)} \oplus * e_{w^{-1}(2)} \oplus \cdots \oplus * e_{w^{-1}(w(j)-1)} \oplus e_j\right)$$

pour $*$ arbitraire (en particulier éventuellement nul) dans $L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. On voit que les égalités (8.5) et (8.9) donnent les mêmes gradués si et seulement si $a_{i,j} \neq 0$ implique $i \in \{w^{-1}(1), w^{-1}(2), \cdots, w^{-1}(w(j)-1)\}$ (puisque, par (8.5), e_i doit alors apparaître avec un coefficient non nul dans (8.9) [attention au changement de notations dans les indices]) i.e. $w(i) \in \{1, 2, \cdots, w(j)-1\}$ i.e. $w(i) < w(j)$. Autrement dit $\mathcal{B}(\underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet}) \in w^{-1}\overline{\overline{B}ww_0\overline{B}/\overline{B}}$ si et seulement si $w^{-1} \in W_C$ ce qui implique $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})^{\mathrm{u}} = \oplus_{w^{-1} \in W_C} C(w, w)$ par définition de $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ et puisque seuls les $C(w, w)$ sont unitaires. On conclut avec le Lemme 8.8. □

Bien entendu, il peut y avoir de nombreux constituants non unitaires dans $\pi(\underline{D}, \underline{h}, \underline{\mathrm{Fil}}^{\bullet})$ (par exemple si ρ est scindée).

9. Appendice

On donne des détails pour les preuves du Théorème 2.3 et de la Proposition 2.4 suivant [28] et [26].

On utilise les notations du §2. Commençons par la preuve du Théorème 2.3.

Si H est un groupe p-adique L-analytique et $\sigma \in \mathcal{S}$, on note $C^{\sigma\text{-an}}(H,E)$ le E-espace vectoriel topologique localement convexe des fonctions localement L-analytiques pour le plongement σ de L dans les coefficients E (voir ([34, §2]) et ses références, où cet espace est juste noté $C^{\mathrm{an}}(H,E)$ puisque le plongement σ y est fixé) et $D_\sigma(G,E)$ son dual fort. On a une immersion fermée évidente $C^{\sigma\text{-an}}(H,E) \hookrightarrow C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(H,E)$ qui induit une surjection continue $D(H,E) \twoheadrightarrow D_\sigma(H,E)$. On fixe des modèles des groupes algébriques G, $P = L_P N_P$, $\overline{P} = L_{\overline{P}} N_{\overline{P}}$ sur $\mathcal{O}_L$ et on note $G(\mathcal{O}_L)$, $P(\mathcal{O}_L) = L_P(\mathcal{O}_L)N_P(\mathcal{O}_L)$, et c. leur points à valeurs dans $\mathcal{O}_L$. Rappelons que $D(G(\mathcal{O}_L),E)$, $D(P(\mathcal{O}_L),E)$ etc. contient respectivement $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, $\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, et donc $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$, $U(\mathfrak{p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$, $\ldots$, via l'accouplement $\langle \mathfrak{x}, f\rangle = \frac{d}{dt} f\big(\exp(-t\mathfrak{x})\big)|_{t=0}$. On note $U(\mathfrak{g}, P(\mathcal{O}_L), E)$ la sous-E-algèbre de $D(G(\mathcal{O}_L),E)$ engendrée par $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ et $D(P(\mathcal{O}_L),E)$. On fixe un pro-p-sous-groupe ouvert normal et uniforme* (au sens de [31, §2]) H de $G(\mathcal{O}_L)$ ce qui permet de définir avec [35] les complétés $D_r(G(\mathcal{O}_L),E)$ de $D(G(\mathcal{O}_L),E)$ pour $r \in p^{\mathbb{Q}}$ et $1/p < r < 1$ (des E-algèbres de Banach). On note $D_r(P(\mathcal{O}_L),E)$, $U_r(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$, $U_r(\mathfrak{g}, P(\mathcal{O}_L), E)$ l'adhérence de $D(P(\mathcal{O}_L),E)$, $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$, $U(\mathfrak{g}, P(\mathcal{O}_L), E)$ dans $D_r(G(\mathcal{O}_L),E)$. On a $U_r(\mathfrak{g}, P(\mathcal{O}_L), E) = U_r(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) D_r(P(\mathcal{O}_L), E)$ (car $U_r(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) D_r(P(\mathcal{O}_L), E) \subseteq U_r(\mathfrak{g}, P(\mathcal{O}_L), E)$ et [24, Th.1.4.2] implique que $U_r(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) D_r(P(\mathcal{O}_L), E)$ est déjà fermé, cf. “Step 3” de la preuve de [28, Th.5.5]).

La preuve du (i) est analogue à celle de [28] (la preuve de [28, Prop.4.5] et l'argument de [28, §4.6] se généralisant sans problème). Pour la preuve du (ii), on se ramène d'abord comme dans [28, Prop.4.9(a)] au cas où la représentation π_P est triviale. La preuve de [28, Prop.4.2] s'étend alors à condition de généraliser les résultats de [28, §3.8] qu'elle utilise. Un examen des détails montre que ces derniers résultats s'étendent aussi mais il faut considérer les groupes qui apparaissent dans [28, §3.8] comme des groupes $\mathbb{Q}_p$-analytiques (et non plus L-analytiques) et remplacer les algèbres de Lie par leurs tensorisés par E au-dessus de $\mathbb{Q}_p$ (et non plus au-dessus de L) comme au §2.

La preuve du (iii) demande plus d'attention : il faut étendre les preuves de [28, Th.5.3] et [28, Th.5.8], on indique ci-dessous les endroits à modifier.

Commençons par la preuve de [28, Th.5.3], c'est-à-dire le cas où π_P est la représentation triviale et rappelons que l'on a $M \cong \otimes_{\sigma \in \mathcal{S}} M_\sigma$ où M_σ est un objet simple de la catégorie $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{p}_\sigma}$ (cf. §2). On se ramène comme dans *loc.cit.* à montrer que, pour r comme ci-dessus suffisamment proche de 1, le $D_r(G(\mathcal{O}_L),E)$-module (non nul) :

$$M_r \overset{\text{déf}}{=} D_r(G(\mathcal{O}_L),E)\otimes_{U(\mathfrak{g},P(\mathcal{O}_L),E)} M$$

est simple. Soit $\mathfrak{m}_r$ le sous-$U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module de M_r engendré par M. Pour r suffisamment proche de 1 (ce que l'on suppose tacitement désormais), la surjection $U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)} M \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_r$ est un isomorphisme. En effet, l'image du $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module M dans ces deux $U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules de type fini est dense et M est un $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module simple. Par l'argument du "Step 3" de la preuve de [28, Th.5.5] (utilisant [27, Lem.3.4.4] et [27, Prop.3.4.8]) on en déduit que ces deux $U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules sont aussi simples, donc isomorphes. La surjection canonique $U(\mathfrak{g}_\tau)\twoheadrightarrow E$ consistant à envoyer sur 0 l'idéal d'augmentation de $U(\mathfrak{g}_\tau)$ pour $\tau\neq\sigma$ induit une surjection $U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\twoheadrightarrow U(\mathfrak{g}_\sigma)$ qui s'insère dans un diagramme commutatif (cf. par exemple [31, §2] ou la preuve de [31, Lem.4.2]) :

$$\begin{tikzcd}
D(G(\mathcal{O}_L),E) \arrow[r, two heads] & D_\sigma(G(\mathcal{O}_L),E) \\
U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E) \arrow[r, two heads] \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] & U(\mathfrak{g}_\sigma) \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \\
U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E) \arrow[r, two heads] & U_r(\mathfrak{g}_\sigma)
\end{tikzcd}$$

où $U_r(\mathfrak{g}_\sigma)$ est le complété de $U(\mathfrak{g}_\sigma)$ pour la norme quotient venant de $U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$. On note $\mathfrak{m}_{\sigma,r}\overset{\text{déf}}{=}U_r(\mathfrak{g}_\sigma)\otimes_{U(\mathfrak{g}_\sigma)}M_\sigma$ qui est encore un $U_r(\mathfrak{g}_\sigma)$-module simple (en procédant comme précédemment).

Comme dans la preuve de [28, Th.5.7], il suffit de montrer qu'il n'y a un isomorphisme de $U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules :

$$\phi:\delta_w\mathfrak{m}_r \xrightarrow{\sim} \delta_u\mathfrak{m}_r, \tag{9.1}$$

où $u\in N_{\overline{P}}(\mathcal{O}_L)$, w est dans le groupe de Weyl de $G_{/L}$ (vu dans $G(\mathcal{O}_L)$) et où $\delta_g\in D(G(\mathcal{O}_L),E)$ est la distribution de Dirac en $g\in G(\mathcal{O}_L)$, *que* si $\delta_{w^{-1}u}\in G(\mathcal{O}_L)\cap U_r(\mathfrak{g},P(\mathcal{O}_L),E)$ (l'intersection étant prise dans $D_r(G(\mathcal{O}_L),E)$). Notons que l'action adjointe de g^{-1}, i.e. la conjugaison par δ_g^{-1}, induit un automorphisme continu de $U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$ de sorte que $\delta_g\mathfrak{m}_r$ est bien encore un $U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module.

Comme dans le "Step 1" de la preuve de [28, Th.5.7], montrons d'abord que l'existence d'un isomorphisme (9.1) implique $w\in W_P$ où W_P est le groupe de Weyl de $L_{P/L}$. Par maximalité de P, on a $W_P=\cap_{\sigma\in\mathcal{S}}W_{P(\sigma)}$ où $P(\sigma)\subseteq G_{/L}$ est le sous-groupe parabolique maximal tel que $M_\sigma\in\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}(\sigma)_\sigma}$

et $W_{P(\sigma)}$ le groupe de Weyl de $L_{P(\sigma)}{}_{/L}$. Supposons $w \notin W_P$, alors il existe $\sigma_0 \in \mathcal{S}$ tel que $w \notin W_{P(\sigma_0)}$. Par [31, Lem.4.2] (et sa preuve), l'isomorphisme $U(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \xrightarrow{\sim} \otimes_{\sigma\in\mathcal{S}} U(\mathfrak{g}_\sigma)$ induit une injection continue d'image dense de E-algèbres de Banach $U_r(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \hookrightarrow \widehat{\otimes}_{\sigma\in\mathcal{S}} U_r(\mathfrak{g}_\sigma)$. De plus, il existe $r' < r$ tel que $\widehat{\otimes}_{\sigma\in\mathcal{S}} U_r(\mathfrak{g}_\sigma) \hookrightarrow U_{r'}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$, la composée redonnant l'inclusion $U_r(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \hookrightarrow U_{r'}(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ (voir la fin de la preuve de [31, Lem.4.2]). En tensorisant (9.1) par $\widehat{\otimes}_{\sigma\in\mathcal{S}} U_r(\mathfrak{g}_\sigma)$ au-dessus de $U_r(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ et en utilisant $\mathfrak{m}_r \cong U_r(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \otimes_{U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p} E)} M \cong U_r(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E) \otimes_{\otimes_\sigma U(\mathfrak{g}_\sigma)} (\otimes_\sigma M_\sigma)$ et la définition de $\mathfrak{m}_{\sigma,r}$, on obtient par ce qui précède un isomorphisme de $\widehat{\otimes}_{\sigma\in\mathcal{S}} U_r(\mathfrak{g}_\sigma)$-modules non nuls :

$$\begin{aligned}\widehat{\phi} : \big(\widehat{\otimes}_\sigma U_r(\mathfrak{g}_\sigma)\big) \otimes_{\otimes_\sigma U_r(\mathfrak{g}_\sigma)} \big(\otimes_\sigma \delta_w \mathfrak{m}_{\sigma,r}\big)& \\ \xrightarrow{\sim} \big(\widehat{\otimes}_\sigma U_r(\mathfrak{g}_\sigma)\big) &\otimes_{\otimes_\sigma U_r(\mathfrak{g}_\sigma)} \big(\otimes_\sigma \delta_u \mathfrak{m}_{\sigma,r}\big)\end{aligned}$$

où δ_w (resp. δ_u) dans chaque facteur est vu dans $D_\sigma(G(\mathcal{O}_L), E)$. Soit $s : \big(\widehat{\otimes}_\sigma U_r(\mathfrak{g}_\sigma)\big) \otimes_{\otimes_\sigma U_r(\mathfrak{g}_\sigma)} \big(\otimes_\sigma \delta_u \mathfrak{m}_{\sigma,r}\big) \twoheadrightarrow \delta_u \mathfrak{m}_{\sigma_0,r}$ une surjection continue de $U_r(\mathfrak{g}_{\sigma_0})$-modules. Le morphisme induit de $U_r(\mathfrak{g}_{\sigma_0})$-modules :

$$(\otimes_\sigma \delta_w \mathfrak{m}_{\sigma,r})|_{U_r(\mathfrak{g}_{\sigma_0})} \xrightarrow{1\otimes\mathrm{Id}} \big(\widehat{\otimes}_\sigma U_r(\mathfrak{g}_\sigma)\big) \otimes_{\otimes_\sigma U_r(\mathfrak{g}_\sigma)} \big(\otimes_\sigma \delta_w \mathfrak{m}_{\sigma,r}\big) \overset{s\circ\widehat{\phi}}{\twoheadrightarrow} \delta_u \mathfrak{m}_{\sigma_0,r}$$

est non nul car $\otimes_\sigma \delta_w \mathfrak{m}_{\sigma,r}$ est dense dans $\big(\widehat{\otimes}_\sigma U_r(\mathfrak{g}_\sigma)\big) \otimes_{\otimes_\sigma U_r(\mathfrak{g}_\sigma)} \big(\otimes_\sigma \delta_w \mathfrak{m}_{\sigma,r}\big)$. Donc il existe un élément $\otimes_\sigma \delta_w m_\sigma \in \otimes_\sigma \delta_w \mathfrak{m}_{\sigma,r}$ dont l'image est non nulle. Comme $\delta_w \mathfrak{m}_{\sigma_0,r}$ et $\delta_u \mathfrak{m}_{\sigma_0,r}$ sont des $U_r(\mathfrak{g}_{\sigma_0})$-modules simples, la restriction de $s \circ \widehat{\phi} \circ (1 \otimes \mathrm{Id})$ à $U_r(\mathfrak{g}_{\sigma_0}) \cdot \otimes_\sigma \delta_w m_\sigma \cong (\otimes_{\sigma\neq\sigma_0} \delta_w m_\sigma) \otimes \delta_w \mathfrak{m}_{\sigma_0,r}$ induit un isomorphisme de $U_r(\mathfrak{g}_{\sigma_0})$-modules $\delta_w \mathfrak{m}_{\sigma_0,r} \xrightarrow{\sim} \delta_u \mathfrak{m}_{\sigma_0,r}$. Le “Step 1” dans la preuve de [28, Th.5.7] montre alors que c'est impossible si $w \notin W_{P(\sigma_0)}$. On a donc $w \in W_P$. (Alternativement, on peut aussi partir de $\widehat{\phi}$ et appliquer directement l'argument du “Step 1” de la preuve de [28, Th.5.7] au groupe déployé $\prod_{\sigma\in\mathcal{S}} G \times_{L,\sigma} E$.)

Comme $W_P \subset P(\mathcal{O}_L) \subset G(\mathcal{O}_L) \cap U_r(\mathfrak{g}, P(\mathcal{O}_L), E)$ on peut comme dans la preuve de [28, Th.5.7] remplacer maintenant (9.1) par :

$$\phi : \mathfrak{m}_r \xrightarrow{\sim} \delta_u \mathfrak{m}_r \tag{9.2}$$

pour un $u \in N_{\overline{P}}(\mathcal{O}_L)$. Par le même argument que ci-dessus, (9.2) induit un isomorphisme $\phi_\sigma : \mathfrak{m}_{\sigma,r} \xrightarrow{\sim} \delta_u \mathfrak{m}_{\sigma,r}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$. La preuve de [28, Th.5.7] montre alors que cela implique :

$$\delta_u \in G(\mathcal{O}_L) \cap U_{\sigma,r}(\mathfrak{g}_\sigma, P(\mathcal{O}_L), E)$$

où $U_{\sigma,r}(\mathfrak{g}_\sigma, P(\mathcal{O}_L), E) \overset{\text{déf}}{=} U_r(\mathfrak{g}_\sigma) D_{\sigma,r}(P(\mathcal{O}_L), E)$, $D_{\sigma,r}(P(\mathcal{O}_L), E)$ étant le complété de $D_\sigma(P(\mathcal{O}_L), E)$ pour la norme quotient venant de $D_r(P(\mathcal{O}_L), E)$. Quitte à modifier le pro-p-sous-groupe uniforme* $H \subseteq G(\mathcal{O}_L)$, on peut le supposer de la forme $H = H^-H^+$ où H^- (resp. H^+) est un pro-p-sous-groupe uniforme* ouvert dans $N_{\overline{P}}(\mathcal{O}_L)$ (resp. $P(\mathcal{O}_L)$). Un examen de la preuve de [28, Sublem.5.6] montre alors que l'on a :

$$\begin{aligned}G(\mathcal{O}_L) \cap U_{\sigma,r}(\mathfrak{g}_\sigma, P(\mathcal{O}_L), E) &= H^{-,m}P(\mathcal{O}_L)\\ &= G(\mathcal{O}_L) \cap U_r(\mathfrak{g}, P(\mathcal{O}_L), E)\end{aligned} \tag{9.3}$$

pour tout entier m positif ou nul tel que $1/p < r^{p^m} < p^{-\frac{1}{p-1}}$ si $p > 2$, $1/2 < r^{2^m}$ et $r^{2^{m+1}} < 1/2$ si $p = 2$, et où $H^{-,m}$ est le $m^{\text{ième}}$ sous-groupe dans la p-série inférieure de H^-. En particulier, (9.3) implique que la distribution δ_u est aussi dans $G(\mathcal{O}_L) \cap U_r(\mathfrak{g}, P(\mathcal{O}_L), E)$ (en fait même dans $N_{\overline{P}}(\mathcal{O}_L) \cap U_r(\mathfrak{g}, P(\mathcal{O}_L), E)$) ce qui termine la généralisation de la preuve de [28, Th.5.3].

La preuve de [28, Th.5.8] reste alors valable en utilisant les résultats intermédiaires généralisés comme ci-dessus. Ceci achève la preuve du Théorème 2.3

Passons maintenant à la preuve de la Proposition 2.4, en conservant les notations ci-dessus (et celles du §2). La preuve suit celle de [26, Prop.3.5]. D'abord, en procédant comme dans la preuve de [26, Lem.3.4] et en utilisant que $N_Q(L)$ agit trivialement sur π'_Q, on se ramène au cas où π_Q est la représentation triviale (et on note $\mathcal{F}_Q^G(M) = \mathcal{F}_Q^G(M, \pi_Q)$). Reprenons les notations de la preuve du Théorème 2.3 en remplaçant le parabolique P par le parabolique Q. Il suffit de montrer que $H^0(\mathfrak{n}_Q \otimes_{\mathbb{Q}_p} E, \mathcal{F}_Q^G(M)') = W(Q)$. Soit W^Q le sous-ensemble du groupe de Weyl de $G_{/L}$ qui envoie les racines positives de L_Q (i.e. les racines de $B \cap L_Q$) vers des racines positives de G, $I \subset G(\mathcal{O}_L)$ le sous-groupe d'Iwahori standard (noyau de la réduction vers $G(k_L)$ (on a $Q(\mathcal{O}_L) \subset I$) et $w \in W^Q$, comme dans la preuve de [26, Prop.3.5], on se ramène à montrer $H^0\big(\mathfrak{n}_Q \otimes_{\mathbb{Q}_p} E, D(I,E)_r \otimes_{U(\mathfrak{g},Q(\mathcal{O}_L),E)} M\big) = W(Q)$ et :

$$H^0\big(\mathrm{Ad}(w^{-1})\mathfrak{n}_Q \otimes_{\mathbb{Q}_p} E, D(w^{-1}Iw, E)_r \otimes_{U(\mathfrak{g},w^{-1}Iw\cap Q(\mathcal{O}_L),E)} M\big) = 0 \quad \text{si } w \neq 1.$$

Commençons par le deuxième cas. Comme dans *loc.cit.* il suffit de montrer $H^0\big(\mathrm{Ad}(w^{-1})\mathfrak{n}_Q \otimes_{\mathbb{Q}_p} E, \delta_u\mathfrak{m}_r\big) = 0$ pour $u \in N_{\overline{Q}}(\mathcal{O}_L)$ où $\mathfrak{m}_r$ est comme dans la preuve du (iii) du Théorème 2.3 (et r suffisamment proche de 1). Il suffit encore de montrer :

$$H^0\big(\mathrm{Ad}(w^{-1})\mathfrak{n}_Q \otimes_{\mathbb{Q}_p} E, (\widehat{\otimes}_{\sigma\in\mathcal{S}}U_r(\mathfrak{g}_\sigma)) \otimes_{U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)} \delta_u\mathfrak{m}_r\big) = 0$$

car $\delta_u\mathfrak{m}_r \hookrightarrow (\widehat{\otimes}_{\sigma\in\mathcal{S}}U_r(\mathfrak{g}_\sigma)) \otimes_{U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)} \delta_u\mathfrak{m}_r$ ($\delta_u\mathfrak{m}_r$ est un $U_r(\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$-module simple, cf. la preuve du (iii) du Théorème 2.3). On est finalement ramené au cas du groupe déployé $\prod_{\sigma\in\mathcal{S}} G\times_{L,\sigma} E$ et on peut appliquer la preuve de [26, Prop.3.5] en remarquant que la racine β de la preuve de *loc.cit.* est bien une racine de $\prod_{\sigma\in\mathcal{S}} N_Q\times_{L,\sigma} E$ (pour un σ tel que $w\notin W_{Q(\sigma)}$ où $Q(\sigma)\subseteq G_{/L}$ est le sous-groupe parabolique maximal tel que $M_\sigma\in\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{q}(\sigma)_\sigma}$ et $W_{Q(\sigma)}$ son groupe de Weyl, cf. la preuve du (iii) du Théorème 2.3).

Pour le premier cas, suivant la preuve de *loc.cit.* on se ramène à montrer $H^0(\mathfrak{n}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,\delta_u\mathfrak{m}_r)=0$ si $u\notin N_{\overline{Q}}(\mathcal{O}_L)\cap U_r(\mathfrak{g},Q(\mathcal{O}_L),E)$ (voir la preuve du (iii) du Théorème 2.3 pour les notations) et $H^0(\mathfrak{n}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,\mathfrak{m}_r)=W(Q)$. Le même argument que dans la preuve de [26, Prop.3.5] donne :

$$\begin{aligned}H^0(\mathfrak{n}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,\delta_u\mathfrak{m}_r)&=H^0(\mathrm{Ad}(u^{-1})\mathfrak{n}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,\mathfrak{m}_r)\\&=\mathfrak{m}_r\cap u^{-1}H^0(\mathfrak{n}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,\widehat{M})\end{aligned}$$

pour tout $u\in N_{\overline{Q}}(\mathcal{O}_L)$ où $\widehat{M}$ est le "complété formel" de M (cf. *loc.cit.*). Mais comme M est un objet simple de $\mathcal{O}_{\mathrm{alg}}^{\mathfrak{q}}$, on a $H^0(\mathfrak{n}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,M)=W(Q)$, en particulier $H^0(\mathfrak{n}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,M)$ est de dimension finie d'où on déduit $H^0(\mathfrak{n}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,\widehat{M})=H^0(\mathfrak{n}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,M)$ et donc $H^0(\mathfrak{n}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E,\delta_u\mathfrak{m}_r)=\mathfrak{m}_r\cap u^{-1}W(Q)$. Comme $\mathfrak{m}_r\cap u^{-1}W(Q)\subseteq\mathfrak{m}_r$ est stable par l'action de la sous-algèbre de Lie $\mathrm{Ad}(u^{-1})\mathfrak{l}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E\subseteq\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E$ et que $u^{-1}W(Q)$ est un $U(\mathrm{Ad}(u^{-1})\mathfrak{l}_Q\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module simple, on a $u^{-1}W(Q)\subseteq\mathfrak{m}_r$ si $\mathfrak{m}_r\cap u^{-1}W(Q)\neq 0$. En particulier $\mathfrak{m}_r$ contient $Eu^{-1}v^+$ où v^+ est un vecteur non nul de plus haut poids de $W(Q)$ (ou de M), ou de manière équivalente $\delta_u\mathfrak{m}_r$ contient Ev^+. L'application de $U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-modules $\mathfrak{m}_r=U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)\otimes_{U(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)}M\to\delta_u\mathfrak{m}_r$, $1\otimes v^+\mapsto v^+$ est non nulle, donc un isomorphisme puisque ces $U_r(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{Q}_p}E)$-module sont simples. Par la deuxième partie de la preuve du (iii) du Théorème 2.3, cela implique $u\in N_{\overline{Q}}(\mathcal{O}_L)\cap U_r(\mathfrak{g},Q(\mathcal{O}_L),E)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Breuil, « Remarks on some locally $\mathbb{Q}_p$-analytic representations of $\mathrm{GL}_2(F)$ in the crystalline case », in *Non-abelian fundamental groups and Iwasawa theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 393, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, p. 212-238.

[2] ———, « Vers le socle localement analytique pour GL_n II », *Math. Ann.* **361** (2015), n° 3-4, p. 741-785.

[3] C. Breuil & F. Herzig, « Ordinary representations of $G(\mathbb{Q}_p)$ and fundamental algebraic representations », *Duke Math. J.* **164** (2015), n° 7, p. 1271-1352.

[4] C. Breuil & A. Mézard, « Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en $l=p$ », *Duke Math. J.* **115** (2002), n° 2, p. 205-310, With an appendix by Guy Henniart.

[5] C. Breuil & V. Paškunas, « Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2 », *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), n° 1016, p. vi+114.

[6] C. Breuil & P. Schneider, « First steps towards p-adic Langlands functoriality », *J. Reine Angew. Math.* **610** (2007), p. 149-180.

[7] C. J. Bushnell, « Representations of reductive p-adic groups : localization of Hecke algebras and applications », *J. London Math. Soc. (2)* **63** (2001), n° 2, p. 364-386.

[8] K. Buzzard, F. Diamond & F. Jarvis, « On Serre's conjecture for mod ℓ Galois representations over totally real fields », *Duke Math. J.* **155** (2010), n° 1, p. 105-161.

[9] P. Colmez, « La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ », *Astérisque* (2010), n° 330, p. 213-262.

[10] ———, « Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (ϕ,Γ)-modules », *Astérisque* (2010), n° 330, p. 281-509.

[11] P. Colmez & J.-M. Fontaine, « Construction des représentations p-adiques semi-stables », *Invent. Math.* **140** (2000), n° 1, p. 1-43.

[12] F. Digne & J. Michel, *Representations of finite groups of Lie type*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 21, Cambridge University Press, Cambridge, 1991, iv+159 pages.

[13] M. Emerton, « Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups II. The relation to parabolic induction », à paraître à J. Institut Math. Jussieu.

[14] ———, « Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups. I. Construction and first properties », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), n° 5, p. 775-839.

[15] ———, « Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups I. Definition and first properties », *Astérisque* (2010), n° 331, p. 355-402.

[16] J.-M. Fontaine, « Représentations l-adiques potentiellement semi-stables », *Astérisque* (1994), n° 223, p. 321-347, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[17] ———, « Représentations p-adiques semi-stables », *Astérisque* (1994), n° 223, p. 113-184, With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[18] T. Gee, « Automorphic lifts of prescribed types », *Math. Ann.* **350** (2011), n° 1, p. 107-144.

[19] ———, « On the weights of mod p Hilbert modular forms », *Invent. Math.* **184** (2011), n° 1, p. 1-46.

[20] T. Gee & M. Kisin, « The Breuil-Mézard conjecture for potentially Barsotti-Tate representations », *Forum Math. Pi* **2** (2014), p. e1, 56.

[21] F. Herzig, « The weight in a Serre-type conjecture for tame n-dimensional Galois representations », *Duke Math. J.* **149** (2009), n° 1, p. 37-116.

[22] Y. Hu, « Normes invariantes et existence de filtrations admissibles », *J. Reine Angew. Math.* **634** (2009), p. 107-141.

[23] J. E. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, xvi+289 pages.

[24] J. Kohlhaase, « Invariant distributions on p-adic analytic groups », *Duke Math. J.* **137** (2007), n° 1, p. 19-62.

[25] R. Liu, « Locally analytic vectors of some crystabelian representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ », *Compos. Math.* **148** (2012), n° 1, p. 28-64.

[26] S. Orlik & B. Schraen, « The Jordan-Hölder series of the locally analytic Steinberg representation », *Doc. Math.* **19** (2014), p. 647-671.

[27] S. Orlik & M. Strauch, « On the irreducibility of locally analytic principal series representations », *Represent. Theory* **14** (2010), p. 713-746.

[28] ———, « On Jordan-Hölder series of some locally analytic representations », *J. Amer. Math. Soc.* **28** (2015), n° 1, p. 99-157.

[29] D. Prasad, « Locally algebraic representations of p-adic groups », *Represent. Theory* **5** (2001), p. 111-128, appendice à *$U(g)$-finite locally analytic representations* (Schneider P., Teitelbaum J.).

[30] M. M. Schein, « Weights in Serre's conjecture for Hilbert modular forms : the ramified case », *Israel J. Math.* **166** (2008), p. 369-391.

[31] T. Schmidt, « Analytic vectors in continuous p-adic representations », *Compos. Math.* **145** (2009), n° 1, p. 247-270.

[32] P. Schneider & J. Teitelbaum, « Banach-Hecke algebras and p-adic Galois representations », *Doc. Math.* (2006), n° Extra Vol., p. 631-684.

[33] P. Schneider, *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002, vi+156 pages.

[34] P. Schneider & J. Teitelbaum, « Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2 », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), n° 2, p. 443-468 (electronic).

[35] ———, « Algebras of p-adic distributions and admissible representations », *Invent. Math.* **153** (2003), n° 1, p. 145-196.

[36] B. Schraen, « Représentations p-adiques de $GL_2(L)$ et catégories dérivées », *Israel J. Math.* **176** (2010), p. 307-361.

[37] A. V. Zelevinsky, « Induced representations of reductive p-adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$ », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **13** (1980), n° 2, p. 165-210.

Manuscrit reçu le 22 octobre 2013,
révisé le 18 mars 2015,
accepté le 10 septembre 2015.

Christophe BREUIL
Bâtiment 425
C.N.R.S. et Université Paris-Sud
91405 Orsay Cedex
France
christophe.breuil@math.u-psud.fr