ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Pierre-Henri CHAUDOUARD & Gérard LAUMON

Un théorème du support pour la fibration de Hitchin

Tome 66, nº 2 (2016), p. 711-727.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2016__66_2_711_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
66, 2 (2016) 711-727

UN THÉORÈME DU SUPPORT POUR LA FIBRATION DE HITCHIN

par Pierre-Henri CHAUDOUARD & Gérard LAUMON (*)

RÉSUMÉ. — L'outil principal dans la démonstration par Ngô Bao Châu du lemme fondamental de Langlands-Shelstad est un théorème sur le support de la cohomologie relative de la partie elliptique de la fibration de Hitchin. Dans le cas particulier de $\mathrm{GL}(n)$ et d'un diviseur de degré $> 2g-2$, le théorème dit que cette cohomologie relative est complètement déterminée par sa restriction à n'importe quel ouvert non vide de la base de la fibration de Hitchin. Nous présentons ici, dans ce cas particulier, une extension du théorème de Ngô Bao Châu à toute la fibration de Hitchin, y compris le cône global nilpotent.

ABSTRACT. — The main tool in Ngô Bao Châu's proof of the Langlands-Shelstad fundamental lemma is a support theorem on the relative cohomology of the elliptic part of the Hitchin fibration. In the case of $\mathrm{GL}(n)$ and a divisor of degree $> 2g-2$, the theorem states that this relative cohomology is completely determined by its restriction to any open dense subset of the base of the Hitchin fibration. In this article, we prove that the theorem is true in this particular case for the whole Hitchin fibration, including the global nilpotent cone.

1. Introduction

Soit X une courbe connexe, projective et lisse, de genre g, sur un corps k algébriquement clos. Soit D un diviseur sur X de degré $> 2g-2$ et soit G un groupe réductif. Notons $f : \mathcal{N} \to \mathbb{A}$ la fibration de Hitchin associée à ces données.

Sur l'ouvert elliptique $\mathbb{A}^{\mathrm{ell}} \subset \mathbb{A}$, chaque composante connexe de cette fibration est une gerbe sur un morphisme propre $f^{\mathrm{ell}} : N^{\mathrm{ell}} \to \mathbb{A}^{\mathrm{ell}}$, de source

Mots-clés : Fibration de Hitchin, faisceaux pervers, théorème de décomposition, cohomologie relative.
Classification math. : 14F20, 14D20, 14D24.
(*) Durant l'élaboration de cet article, Pierre-Henri Chaudouard a bénéficié du support de l'Institut Universitaire de France et des projets Ferplay ANR-13-BS01-0012 et Vargen ANR-13-BS01-0001-01 de l'ANR.

N^{ell} lisse sur k, auquel on peut appliquer le théorème de décomposition de Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber [3]. L'outil principal dans la démonstration par Ngô [14] du lemme fondamental de Langlands-Shelstad pour G, est un théorème sur les supports des constituants simples de la cohomologie relative de f^{ell}.

Dans [6], nous avons prolongé ce résultat de Ngô à l'ouvert génériquement régulier semi-simple $\mathbb{A}^{\text{ell}} \subset \mathbb{A}^{\text{grss}} \subset \mathbb{A}$ de la fibration de Hitchin.

Dans le cas particulier où k est de caractéristique nulle, $G = \mathrm{GL}(n)$ et D est de degré $> 2g-2$, le théorème de Ngô sur $\mathbb{A}^{\text{ell}}$ et notre extension à $\mathbb{A}^{\text{grss}}$ disent que la cohomologie relative de $f^{\text{grss}} : N^{\text{grss}} \to \mathbb{A}^{\text{grss}}$ (pour un schéma $N^{\text{grss}} \supset N^{\text{ell}}$ convenablement défini à partir de la restriction de $\mathcal{N}$ à $\mathbb{A}^{\text{grss}}$) est complètement déterminée par sa restriction à n'importe quel ouvert non vide de $\mathbb{A}^{\text{grss}}$.

L'objet de cette note est de prolonger ce dernier résultat à $\mathbb{A}$ tout entier.

Remerciements. — Nous remercions le rapporteur de cet article pour ses remarques constructives.

2. La fibration de Hitchin

Soient n un entier positif (le rang) et e un entier n (le degré). Soit k un corps algébriquement clos, soit X une courbe connexe, projective et lisse sur k, de genre g, et soit $D = \sum_x d_x[x]$ un diviseur sur X que l'on suppose effectif ($d_x \geqslant 0,\ \forall x$) et de degré

$$d = \sum_x d_x > 2g-2$$

(voir la section 11 pour des commentaires sur le cas où D est un diviseur canonique et donc $d = 2g-2$). Soit enfin ℓ un nombre premier inversible dans k (pour la cohomologie ℓ-adique).

Rappelons [11] qu'un fibré de Hitchin est un couple $(\mathcal{E}, \theta)$ formé d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X, de rang n et de degré e, et d'un endomorphisme tordu $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}(D) := \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D)$ de ce fibré vectoriel. Rappelons aussi que le champ $\mathcal{N}_n^e$ des fibrés de Hitchin est algébrique et localement de type fini sur k.

La base de la fibration de Hitchin est le schéma affine

$$\mathbb{A}_n = \bigoplus_{i=1}^{n} H^0(X, \mathcal{O}_X(iD)) \ ;$$

sa dimension $d_{\mathbb{A}_n}$ peut être calculée par le théorème de Riemann-Roch et est égale à

$$d_{\mathbb{A}_n} = n(1-g) + \frac{n(n+1)}{2} d\ .$$

La fibration de Hitchin est le morphisme de champs algébriques

$$f_n : \mathcal{N}_n^e \to \mathbb{A}_n$$

qui envoie $(\mathcal{E}, \theta)$ sur le polynôme caractéristique de θ

$$a = (-\mathrm{tr}(\theta), \dots, (-1)^n \det(\theta))\ .$$

3. Courbes spectrales

Soit $p : \Sigma = \mathbb{V}(\mathcal{O}_X(-D)) \to X$ l'espace total du fibré en droites $\mathcal{O}_X(D)$ et u la section universelle de $p^*\mathcal{O}_X(D)$. Tout $a \in \mathbb{A}_n$ définit une section globale

$$P_a(u) = u^n + p^*(a_1)u^{n-1} + \cdots + p^*(a_n) \in H^0(\Sigma, p^*\mathcal{O}_X(nD))\ .$$

La courbe spectrale $X_a = X_{n,a} \subset \Sigma$ est le diviseur de Cartier des zéros de cette section $P_a(u)$. Un théorème de Bertini assure que X_a est connexe, mais elle n'est pas nécessairement irréductible, ni réduite. La restriction $\pi_a : X_a \to X$ de p à X_a est un morphisme fini et plat de degré n, et on a

$$\pi_{a,*}\mathcal{O}_{X_a} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-D) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(-(n-1)D)\ ,$$

de sorte que

$$\chi(X_a, \mathcal{O}_{X_a}) = n(1-g) - \frac{n(n-1)}{2} d\ .$$

Pour $a \in \mathbb{A}_n$, soit $X_{a,\eta}$ la fibre de $\pi_a : X_a \to X$ au point générique η de X et $j_a : X_{a,\eta} \hookrightarrow X_a$ l'inclusion ; $X_{a,\eta}$ est une réunion disjointe finie de schémas artiniens, un pour chaque point générique de X_a.

Suivant la définition donnée par Schaub [16], un module sans torsion de rang 1 sur X_a est un $\mathcal{O}_{X_a}$-module cohérent $\mathcal{F}$ tel que l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{F} \to j_{a,*}j_a^*\mathcal{F}$$

est injectif et tel qu'en chaque point générique de X_a, les fibres de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{O}_{X_a}$ ont la même longueur.

Si X_a est réduite, c'est la notion habituelle ; en particulier, $\mathcal{F}$ est localement libre de rang 1 sur le lieu lisse de X_a.

Si $\mathcal{F}$ est un module sans torsion de rang 1 sur X_a, $\mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \pi_{a,*}\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel de rang n et la multiplication par u le munit d'un endomorphisme tordu $\theta_{\mathcal{F}} : \mathcal{E}_{\mathcal{F}} \to \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(D)$. On vérifie à l'aide du théorème de Riemann-Roch que

$$\deg(\mathcal{F}) := \chi(X_a, \mathcal{F}) - \chi(X_a, \mathcal{O}_{X_a}) = \deg(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}) + \frac{n(n-1)}{2} d\,.$$

Théorème 3.1 (Hitchin [11] si X_a est lisse ; Beauville, Narasimhan et Ramanan [2] si X_a est intègre ; Schaub [16] en général). — *Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto (\mathcal{E}_{\mathcal{F}}, \theta_{\mathcal{F}})$ est un isomorphisme du champ modulaire des modules sans torsion de rang 1 et degré $e + \frac{n(n-1)}{2} d$ sur X_a, sur le champ algébrique $f_n^{-1}(a) \subset \mathcal{N}_n^e$.*

4. Lieu lisse, lieu elliptique et stabilité

Par définition, le lieu lisse $\mathbb{A}_n^{\mathrm{lisse}} \subset \mathbb{A}_n$ est l'ouvert dense au-dessus duquel la courbe spectrale est lisse. Le lieu elliptique est l'ouvert $\mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}} \subset \mathbb{A}_n$ au-dessus duquel X_a est intègre ; il contient le lieu lisse.

Nous savons d'après le théorème 3.1 et les travaux de Altmann et Kleiman [1], qu'au-dessus du lieu elliptique, l'espace grossier du champ $\mathcal{N}_n^e$ est un schéma $N_n^{e,\mathrm{ell}}$. De plus, le schéma $N_n^{e,\mathrm{ell}}$ est lisse de dimension $d_{N_n^{e,\mathrm{ell}}} = d_{\mathbb{A}_n} + d_{f_n} = n^2 d + 1$ sur k, et la fibration de Hitchin $f_n^{\mathrm{ell}} : N_n^{e,\mathrm{ell}} \to \mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}$ est plate, projective, à fibres connexes de dimension d_{f_n}.

Hors du lieu elliptique, $\mathcal{N}_n^e$ est plus compliqué :

— même si l'on tue les automorphismes scalaires, $\mathcal{N}_n^e$ reste hautement non séparé : les groupes d'automorphismes sont affines mais ne sont pas finis en général ;

— $\mathcal{N}_n^e$ est localement de type fini mais n'est plus quasi-compact.

Pour obtenir un espace plus utilisable, on tronque $\mathcal{N}_n^e$ à l'aide la stabilité au sens de Mumford, Narasimhan, Seshadri et Hitchin.

Tout fibré vectoriel $\mathcal{F} \neq (0)$ a une pente

$$\mu(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F})/\mathrm{rank}(\mathcal{F})\,.$$

Définition 4.1 (Hitchin). — *Un fibré de Hitchin $(\mathcal{E}, \theta)$ est stable si pour tout sous-fibré $(0) \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ tel que $\theta(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}(D)$, on a*

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})\,.$$

Remarque 4.2. — On peut énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un module sans torsion de rang 1 sur une courbe spectrale X_a donne, par le foncteur décrit dans le théorème 3.1, un fibré de Hitchin stable : c'est l'objet du théorème 3.1 de [16]. Cependant cet énoncé doit être légèrement corrigé : il faut en effet tester l'inégalité (les notations sont celles de [16])

$$\frac{\deg_Z(E_Z)}{r_Z} + \frac{1}{2}(r - r_Z)\deg(\mathcal{L}) \geqslant \frac{\deg_X(E)}{r} \quad (\text{resp. } >) \tag{4.1}$$

pour tous les $\mathcal{O}_Z$-modules E_Z sans torsion de rang 1, qui sont quotients des $E \otimes \mathcal{O}_Z$.

Théorème 4.3 (Hitchin, Nitsure [15]). — *Les fibrés de Hitchin stables forment un sous-champ ouvert $\mathcal{N}_n^{e,\mathrm{st}}$ qui admet un schéma de modules grossier $N_n^{e,\mathrm{st}}$. Le schéma $N_n^{e,\mathrm{st}}$ est quasi-projectif et lisse purement de dimension $d_{\mathbb{A}_n} + d_{f_n} = n^2d + 1$ sur k.*

Si de plus e est premier à n, le morphisme $f_n^{\mathrm{st}} : N_n^{e,\mathrm{st}} \to \mathbb{A}_n$ est projectif à fibres connexes.

5. Symétries

Soit $\mathcal{P}_n$ la composante de degré 0 du champ de Picard relatif de la courbe spectrale universelle (le diviseur de Cartier relatif dans $\mathbb{A}_n \times_k \Sigma/\mathbb{A}_n$ défini par l'équation $P_a(u) = 0$) : pour chaque $a \in \mathbb{A}_n$, $\mathcal{P}_{n,a}$ est le champ de Picard des modules inversibles de degré 0 sur X_a.

Ce champ de Picard $\mathcal{P}_n$ agit sur $\mathcal{N}_n^e$: si $\mathcal{L} \in \mathcal{P}_{n,a}$ et $\mathcal{F}$ est un module sans torsion de rang 1 sur X_a, l'action est définie par

$$\mathcal{L} \cdot (\mathcal{E}_{\mathcal{F}}, \theta_{\mathcal{F}}) = (\mathcal{E}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{F}}, \theta_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{F}}) .$$

Le champ algébrique $\mathcal{P}_n$ n'est ni séparé, ni de type fini, mais sa composante neutre $\mathcal{J}_n \subset \mathcal{P}_n$ admet un espace grossier J_n qui est un espace algébrique en groupes, lisse et de type fini sur $\mathbb{A}_n$ (cf. [4] section 8.3 théorème 1, section 8.4 proposition 2 et section 8.4 théorème 4 a) et c)). Pour chaque $a \in \mathbb{A}_n$, on obtient $J_{n,a}$ le schéma en groupes des classes d'isomorphie de fibrés inversibles sur X_a dont la restriction à chaque composante irreducible de X_a est de degré 0.

On vérifie que l'action de $\mathcal{J}_n$ sur $\mathcal{N}_n^e$ préserve l'ouvert stable et induit une action de J_n sur $N_n^{e,\mathrm{st}}$: avec les notations du théorème 3.1 de [16] reprises dans la remarque 4.2, il s'agit simplement de vérifier que pour tout Z les degrés dans la formule (4.1) de la remarque 4.2 ne changent pas lorsqu'on prend le produit tensoriel de E par un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1 et de degré 0 sur chaque composante irréductible de X. Pour $e = -\frac{n(n-1)}{2}d$, le faisceau structural de la courbe spectrale définit une section de la fibration de Hitchin stable $N_n^{e,\mathrm{st}} \to \mathbb{A}_n$ et l'orbite de cette section est un ouvert de $N_n^{e,\mathrm{st}}$ isomorphe à J_n (voir la section 5 de [16]) ; l'espace algébrique J_n est donc un schéma quasi-projectif.

La restriction $J_n^{\mathrm{lisse}} = J_n|\mathbb{A}_n^{\mathrm{lisse}}$ est un schéma abélien. La restriction $\mathcal{N}_n^e|\mathbb{A}_n^{\mathrm{lisse}}$ admet un espace de module grossier $f_n^{\mathrm{lisse}} : N_n^{e,\mathrm{lisse}} \to \mathbb{A}_n^{\mathrm{lisse}}$ qui est un torseur sous J_n^{lisse}. Les morphismes f_n^{lisse} et $J_n^{\mathrm{lisse}} \to \mathbb{A}_n^{\mathrm{lisse}}$ sont tous les deux lisses, purement de dimension relative

$$d_{f_n} = n(g-1) + \frac{n(n-1)d}{2} + 1\,.$$

Par suite, le faisceau ℓ-adique $R^1 f_{n,*}^{\mathrm{lisse}}\mathbb{Q}_\ell$ est un système local de rang $2d_{f_n}$ et

$$R^i f_{n,*}^{\mathrm{lisse}}\mathbb{Q}_\ell = \bigwedge^i R^1 f_{n,*}^{\mathrm{lisse}}\mathbb{Q}_\ell,\ \forall i = 0, 1, \ldots, 2d_{f_n}\,.$$

6. Rappels sur les faisceaux pervers

Soit A un schéma de type fini sur k. Dans la catégorie dérivée $D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(A, \mathbb{Q}_\ell)$ des faisceaux ℓ-adiques sur A, on a la sous-catégorie pleine des faisceaux pervers $\mathrm{Perv}(A, \mathbb{Q}_\ell)$ définie par Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber [3].

La catégorie $\mathrm{Perv}(A, \mathbb{Q}_\ell)$ est abélienne. La dualité de Poincaré sur $D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(A, \mathbb{Q}_\ell)$ envoie $\mathrm{Perv}(A, \mathbb{Q}_\ell)$ dans elle-même. On a des foncteurs de cohomologie ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^i : D_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}}(A, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathrm{Perv}(A, \mathbb{Q}_\ell)$ qui vérifient les propriétés usuelles (suite exacte longue de cohomologie, ...).

Tous les objets de $\mathrm{Perv}(A, \mathbb{Q}_\ell)$ sont de longueur finie. Les objets simples sont les faisceaux pervers de la forme

$$i_{a,*}\mathrm{IC}_{\overline{\{a\}},\mathcal{L}}[\mathrm{d}_a]$$

où $a \in A$ (un point au sens de Zariski, non fermé en général),

$$i_a : \overline{\{a\}} \hookrightarrow A$$

est l'adhérence de Zariski de a dans A, d_a est la dimension de $\overline{\{a\}}$, $\mathcal{L}$ est un système local ℓ-adique irréductible sur $\{a\}$ qui se prolonge à un voisinage ouvert de a dans $\overline{\{a\}}$, et $\mathrm{IC}_{\overline{\{a\}},\mathcal{L}}$ est le complexe d'intersection de $\overline{\{a\}}$ à valeurs dans $\mathcal{L}$ (en particulier, $\mathrm{IC}_{\overline{\{a\}},\mathcal{L}}|\{a\} = \mathcal{L}[0]$).

Tout faisceau pervers semi-simple K sur A admet donc une décomposition

$$K \cong \bigoplus_{a\in A} i_{a,*}\mathrm{IC}_{\overline{\{a\}},\mathcal{L}_a}[\mathrm{d}_a]$$

où pour chaque a, $\mathcal{L}_a$ est un système local ℓ-adique semi-simple sur $\{a\}$ qui se prolonge à un voisinage ouvert de a dans $\overline{\{a\}}$.

Un complexe $K \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{c}}(A, \mathbb{Q}_\ell)$ est dit semi-simple si

$$K \cong \bigoplus_i {}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^i K[-i]$$

et si chaque ${}^{\mathrm{p}}\mathcal{H}^i K$ est un faisceau pervers semi-simple. Un tel complexe admet une décomposition

$$K \cong \bigoplus_{a \in A} \bigoplus_i i_{a,*}\mathrm{IC}_{\overline{\{a\}}, \mathcal{L}_a^i}[\mathrm{d}_a - i]$$

où pour chaque a et chaque i, $\mathcal{L}_a^i$ est un système local ℓ-adique semi-simple sur $\{a\}$ qui se prolonge à un voisinage ouvert de a dans $\overline{\{a\}}$. On note alors

$$\mathrm{Socle}(K) = \{a \in A \mid \exists i \text{ tel que } \mathcal{L}_a^i \neq (0)\}\,,$$

et pour chaque $a \in \mathrm{Socle}(K)$,

$$n_a^+(K) = \mathrm{Sup}\{i \mid \mathcal{L}_a^i \neq (0)\} \text{ et } n_a^-(K) = \mathrm{Inf}\{i \mid \mathcal{L}_a^i \neq (0)\}\,.$$

L'amplitude en a de K est l'entier

$$\mathrm{Amp}_a(K) = n_a^+(K) - n_a^-(K)$$

Si K est auto-dual, on a $n_a^+(K) = -n_a^-(K)$ et donc $\mathrm{Amp}_a(K) = 2n_a^+(K)$.

Un résultat fondamental de la théorie des faisceaux pervers est le théorème de décomposition.

Théorème 6.1 (Beilinson, Bernstein, Deligne et Gabber [3]). — *Soient N un schéma lisse purement de dimension d_N sur k et $f : N \to A$ un morphisme propre. Alors le complexe auto-dual $Rf_*^{\mathrm{ell}}\mathbb{Q}_\ell[d_N]$ est semi-simple.*

7. Le théorème de Ngô sur le lieu elliptique

Comme $N_n^{e,\mathrm{ell}}$ est lisse sur k et $f_n^{\mathrm{ell}} : N_n^{e,\mathrm{ell}} \to \mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}$ est propre, le complexe auto-dual $Rf_{n,*}^{\mathrm{ell}}\mathbb{Q}_\ell[d_{N_n^{e,\mathrm{ell}}}]$ est semi-simple d'après le théorème de décomposition.

Dans le cas particulier considéré, le théorème cohomologique principal de Ngô dans sa preuve du lemme fondamental de Langlands-Shelstad s'énonce :

Théorème 7.1 (Ngô [14], théorème 7.8.3). — *Si k est de caractéristique nulle, le socle du complexe auto-dual $Rf_{n,*}^{\mathrm{ell}}\mathbb{Q}_\ell[d_{N_n^{e,\mathrm{ell}}}]$ est réduit au point générique de $\mathbb{A}_n$. En d'autres termes on a un isomorphisme*

$$Rf_{n,*}^{\mathrm{ell}}\mathbb{Q}_\ell \cong \bigoplus_i \mathrm{IC}_{\mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}, R^i f_{n,*}^{\mathrm{lisse}}\mathbb{Q}_\ell}[-i]\,.$$

Les ingrédients principaux de la preuve sont :

— l'action de J_n^{ell} sur la partie elliptique de la fibration de Hitchin est suffisamment libre pour borner inférieurement l'amplitude en a de $Rf_{n,*}^{\mathrm{ell}}\mathbb{Q}_\ell[d_{N_n^{e,\mathrm{ell}}}]$, et donc supérieurement la codimension de a dans $\mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}$, pour chaque $a \in \mathrm{Socle}(Rf_{n,*}^{\mathrm{ell}}\mathbb{Q}_\ell[d_{N_n^{e,\mathrm{ell}}}])$.

— une inégalité de type Severi qui borne inférieurement la codimension de tout point dans $\mathrm{Socle}(Rf_{n,*}^{\mathrm{ell}}\mathbb{Q}_\ell[d_{N_n^{e,\mathrm{ell}}}])$ (pour le moment, cette inégalité n'est disponible en toute généralité qu'en caractéristique nulle).

Plus précisément, soient A un schéma séparé de type fini sur k et soit J un schéma en groupes commutatifs, lisse, de type fini et à fibres connexes sur A.

Pour chaque $a \in A$ et chaque point géométrique $\overline{a} \to a$ on a un dévissage

$$0 \to J_{\overline{a}}^{\mathrm{aff}} \to J_{\overline{a}} \to J_{\overline{a}}^{\mathrm{ab}} \to 0$$

où $J_{\overline{a}}^{\mathrm{ab}}$ est une variété abélienne et $J_{\overline{a}}^{\mathrm{aff}}$ est affine. Les dimensions de $J_{\overline{a}}^{\mathrm{aff}}$ et $J_{\overline{a}}^{\mathrm{ab}}$ dépendent seulement de a et sont notées dans la suite $\mathrm{d}_a^{\mathrm{aff}}(J)$ et $\mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J)$.

Soit $f : N \to A$ un A-schéma, muni d'une action de J.

Théorème 7.2 (Ngô [14] Théorème 7.3.2). — *On suppose que $f : N \to A$ est projectif, purement de dimension relative d_f, que N est lisse sur k (purement de dimension $d_N = d_A + d_f$), que les stabilisateurs dans J des points fermés dans N sont tous affines, et que le module de Tate $V_\ell(J)$ est polarisable. Alors pour tout $a \in \mathrm{Socle}(Rf_*\mathbb{Q}_\ell[d_N])$, on a*

$$2d_f - d_N + d_a \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{Amp}_a(Rf_*\mathbb{Q}_\ell[d_N]) \geqslant \mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J)\,,$$

soit encore

$$\mathrm{d}_f - \mathrm{d}_A + \mathrm{d}_a \geqslant n_a^+(Rf_*\mathbb{Q}_\ell[d_N]) \geqslant \mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J)\,.$$

Pour tout $a \in \mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}$, la courbe spectrale X_a est intègre et on peut donc introduire sa normalisation $\widetilde{X}_a$. On note

$$\delta_{X_a} = \mathrm{long}(\mathcal{O}_{\widetilde{X}_a}/\mathcal{O}_{X_a})\,.$$

On a

$$d_{f_n} - \mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n) = \mathrm{d}_a^{\mathrm{aff}}(J_n) = \delta_{X_a}$$

puisque la jacobienne de $\widetilde{X}_a$ est la partie abélienne de la composante neutre $J_{n,a}$ du schéma de Picard de X_a.

Théorème 7.3 (Diaz and Harris [7] Théorème 4.15 et Loeser [12] Théorème 3.4). — *Si k est de caractéristique nulle, pour tout $a \in \mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}$, on a l'inégalité de Severi*

$$\mathrm{d}_{\mathbb{A}_n} - \mathrm{d}_a \geqslant \delta_{X_a} = \mathrm{d}_a^{\mathrm{aff}}(J_n)\,,$$

ou de manière équivalente

$$\mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n) \geqslant d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} + d_a\,.$$

La preuve du théorème 7.1 de Ngô consiste à combiner les inégalités de dimension formulées ci-dessus :

Démonstration. — Soit $a \in \mathrm{Socle}(Rf_{n,*}^{\mathrm{ell}}\mathbb{Q}_\ell[d_{N_n^{e,\mathrm{ell}}}])$. En combinant le théorème 7.2 et l'inégalité de Severi (théorème 7.3), on obtient

$$d_a^{\mathrm{ab}}(J_n^{\mathrm{ell}}) = n_a^+(Rf_*^{\mathrm{ell}}\mathbb{Q}_\ell[d_{N_n^{e,\mathrm{ell}}}]) = d_a - (d_{\mathbb{A}_n} - d_{f_n})\,.$$

La seconde de ces inégalités implique que $Rf_{n,*}^{\mathrm{ell},2\mathrm{d}_n}\mathbb{Q}_\ell$ admet comme facteur direct un faisceau ℓ-adique non trivial de support $\overline{\{a\}}$.

Mais si a n'est pas le point générique de $\mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}$, c'est impossible. En effet les fibres de f_n^{ell} étant toutes irréductibles d'après Altmann et Kleiman [1], on a

$$Rf_{n,*}^{\mathrm{ell},2\mathrm{d}_n}\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_\ell\,.$$

□

8. Dimension des fibres de la fibration de Hitchin

Nous avons vu que le morphisme $f_n : N_n^{e,\mathrm{lisse}} \to \mathbb{A}_n^{\mathrm{lisse}}$ est lisse purement de dimension relative d_{f_n}. Par suite le morphisme de champs $f_n : \mathcal{N}_n^e \to \mathbb{A}_n$ est purement de dimension relative $d_{f_n} - 1$ au-dessus de l'ouvert $\mathbb{A}_n^{\mathrm{lisse}}$.

Il en est de même au-dessus de l'ouvert elliptique et plus généralement au-dessus de l'ouvert $\mathbb{A}_n^{\mathrm{grss}} \subset \mathbb{A}_n$ où X_a est réduite, c'est-à-dire où θ est génériquement régulier semi-simple. En effet, au-dessus de $\mathbb{A}_n^{\mathrm{grss}}$, l'ouvert des modules inversibles sur X_a est dense dans le champ $f_n^{-1}(a)$ des modules sans torsion de rang générique 1 sur X_a, d'après Esteves [8].

Nous démontrerons plus loin (cf. section 10) que :

Proposition 8.1. — *Le cône global nilpotent, i.e. la fibre en 0 de la fibration de Hitchin $\mathcal{N}_n^e \to \mathbb{A}_n$, est de dimension au plus $d_{f_n} - 1$.*

Corollaire 8.2. — *Le morphisme $f_n^{\mathrm{st}} : N_n^{e,\mathrm{st}} \to \mathbb{A}_n$ est purement de dimension relative d_{f_n}.*

Démonstration. — D'après la proposition, $(f_n^{\mathrm{st}})^{-1}(0)$ est de dimension au plus d_{f_n}, or la dimension des fibres de f_n^{st} ne peut pas chuter par spécialisation. □

9. Le théorème principal

Dans la suite, nous supposons que e est premier à n.

Il résulte du théorème de décomposition que $Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell[d_{\mathbb{A}_n}+d_{f_n}]$ est semi-simple. Le théorème suivant prolonge le théorème 7.1 de Ngô, et aussi notre extension du théorème 7.1 à l'ouvert génériquement régulier semi-simple [6].

Théorème 9.1. — *Si k est de caractéristique nulle, le socle de $Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell$ est réduit au point générique de $\mathbb{A}_n$. En d'autres termes on a un isomorphisme*

$$Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell \cong \bigoplus_i \mathrm{IC}_{\mathbb{A}_n, R^i f_{n,*}^{\mathrm{lisse}}\mathbb{Q}_\ell}[-i]\,.$$

Démonstration. — Soit Λ_n l'ensemble des couples $(\underline{n},\underline{m})$ de suites $\underline{n} = (n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_s)$ et $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_s)$ d'entiers strictement positifs telles que

$$m_{i+1} \geqslant m_i \text{ si } n_{i+1} = n_i,\ \forall i = 1, \ldots, s-1,$$

et

$$n = n_1 m_1 + \cdots + n_s m_s\,.$$

Pour chaque $\lambda = (\underline{n},\underline{m})$ on a un morphisme fini

$$\iota_\lambda : \mathbb{A}_{n_1} \times_k \cdots \times_k \mathbb{A}_{n_s} \to \mathbb{A}_n$$

défini par $P_{\iota_\lambda(a_1,\ldots,a_s)}(u) = P_{a_1}^{m_1}(u) \cdots P_{a_s}^{m_s}(u)$.

Pour chaque $a \in \mathbb{A}_n$, il existe un unique $\lambda = \lambda(a) \in \Lambda_n$ tel que a puisse s'écrire $a = \iota_\lambda(a_1, \ldots, a_s)$ avec des $a_i \in \mathbb{A}_{n_i}^{\mathrm{ell}}$ et $P_{a_i}(u) \neq P_{a_j}(u)$, $\forall i \neq j$. Les X_{n_i,a_i} sont les composantes irréductibles de X_a et, pour chaque i, m_i est la multiplicité de X_{n_i,a_i} dans le diviseur de Cartier X_a.

Les ensembles $\mathbb{A}_{n,\lambda} = \{a \in \mathbb{A}_n \mid \lambda(a) = \lambda\}$ forment une stratification de $\mathbb{A}_n$ par des parties localement fermées, la strate ouverte étant $\mathbb{A}_{n,((n),(1))} = \mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}$ et la strate fermée étant la strate « nilpotente » $\mathbb{A}_{n,((1),(n))}$.

Pour $\lambda = (\underline{n},\underline{m}) \in \Lambda_n$ et $a = \iota_\lambda(a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{A}_{n,\lambda}$ avec des $a_i \in \mathbb{A}_{n_i}^{\mathrm{ell}}$ comme ci-dessus, on pose $n' = n_1 + \cdots + n_s$ et on définit $a' \in \mathbb{A}_{n'}^{\mathrm{grss}}$ par $P_{a'}(u) = P_{a_1}(u) \cdots P_{a_s}(u)$, de sorte que $X_{a'}$ n'est autre que la courbe réduite $(X_a)_{\mathrm{red}}$.

On a un homomorphisme de restriction de X_a à $X_{a'}$

$$J_{n,a} \to J_{n',a'}$$

qui est surjectif, et dont le noyau est affine et est une extension successive de copies du groupe additif. De plus on a un homomorphisme

$$J_{n',a'} \to J_{n_1,a_1} \times_k \cdots \times_k J_{n_s,a_s}$$

qui est lui aussi surjectif à noyau affine. Par suite

$$\mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n) = \mathrm{d}_{a_1}^{\mathrm{ab}}(J_{n_1}) + \cdots + \mathrm{d}_{a_s}^{\mathrm{ab}}(J_{n_s})\,.$$

Si $a = \iota_\lambda(a_1, \ldots, a_s)$ est de plus dans $\mathrm{Socle}(Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell)$, on a d'une part

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} + d_a \geqslant \mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n)$$

d'après le théorème 7.2 (voir le paragraphe 4.12 de [14] pour l'hypothèse sur la polarisation), et d'autre part, pour chaque i, on a

$$\mathrm{d}_{a_i}^{\mathrm{ab}}(J_{n_i}) \geqslant d_{f_{n_i}} - d_{\mathbb{A}_{n_i}} + d_{a_i}$$

d'après le théorème 7.3 appliqué à $a_i \in \mathbb{A}_{n_i}^{\mathrm{ell}}$. Or

$$\mathrm{d}_a = \mathrm{d}_{a_1} + \cdots + \mathrm{d}_{a_s}\,,$$
$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} = n(2g - 2 - d) + 1$$

et

$$\mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n) = \mathrm{d}_{a_1}^{\mathrm{ab}}(J_{n_1}) + \cdots + \mathrm{d}_{a_s}^{\mathrm{ab}}(J_{n_s})\,.$$

Par suite on obtient l'inégalité

$$1 - s \geqslant (n - n_1 - \cdots - n_s)(d - 2g + 2)$$

qui n'est possible que si $s = 1$ et $n_1 = n$, c'est-à-dire $\mathbb{A}_{n,\lambda} = \mathbb{A}_n^{\mathrm{ell}}$ puisque l'on a supposé $d > 2g - 2$. □

10. Dimension du cône global nilpotent

Dans cette section, nous allons démontrer la proposition 8.1. Nous procédons ici par réduction aux corps finis en utilisant les conjectures de Weil sur les poids dans la cohomologie ℓ-adique. Signalons que le rapporteur suggère une approche plus directe et plus géométrique inspirée de la proposition 3.1 de [17] et de la proposition 5.1 de [13].

Comme X et D sont définis sur une extension de type fini sur le corps premier contenu dans k ($\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$), il suffit de le faire quand k est la clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ et quand X et D sont définis sur ce corps fini.

Pour tout objet $(\mathcal{E},\theta)$ de $f_n^{-1}(0)$, il existe une entier $1\leqslant s\leqslant n$ tel que $\theta^s=0$ et $\theta^{s-1}\neq 0$ et on a le drapeau des images des itérées de θ,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\bullet=(\mathcal{E}_0=(0)\subsetneq \mathcal{E}_1=\mathrm{Im}(\theta^{s-1})((1-s)D)\subsetneq\cdots\subsetneq \mathcal{E}_{s-1}\\ =\mathrm{Im}(\theta)(-D)\subsetneq\mathcal{E}_s=\mathcal{E})\end{aligned}$$

où $\mathrm{Im}(\theta)$ est l'image dans la catégorie exacte des fibrés vectoriels (ou encore le sous-fibré engendré par l'image dans la catégorie abélienne des faisceaux cohérents).

On peut donc associer à $(\mathcal{E},\theta)$ la partition

$$\underline{n}(\mathcal{E},\theta)=(n_1+n_2+\cdots+n_s=n)$$

définie par $n_i=\mathrm{rang}(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$ et la suite d'entiers

$$\underline{e}(\mathcal{E},\theta)=(e_1,\ldots,e_s)\text{ avec }e_1+e_2+\cdots+e_s=e$$

définie par $e_i=\deg(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$.

Pour $\underline{n}$ et $\underline{e}$ fixées, les conditions $\underline{n}(\mathcal{E},\theta)=\underline{n}$ et $\underline{e}(\mathcal{E},\theta)=\underline{e}$ définissent une partie localement fermée $\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}\subset f_n^{-1}(0)$. On obtient ainsi une stratification de $f_n^{-1}(0)$ et il suffit de démontrer que pour chaque strate $\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}$, on a

$$\dim(\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}})\leqslant d_{f_n}-1.$$

À chaque $(\mathcal{E},\theta)\in\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}$, on peut associer la chaîne

$$\mathcal{F}^\bullet=(\mathcal{F}^s\to\mathcal{F}^{s-1}\to\cdots\mathcal{F}^1)$$

où

$$\mathcal{F}^i=\mathrm{Im}(\theta^{s-i})/\mathrm{Im}(\theta^{s-i+1})(-D)=(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})((s-i)D)$$

est de rang n_i et de degré

$$f_i=e_i+n_i(s-i)d\,,$$

et où les s induites par θ sont toutes génériquement surjectives. Par suite, pour que la strate $\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}$ soit non vide, il faut que

$$n_s\geqslant n_{s-1}\geqslant\cdots\geqslant n_1$$

et qu'en cas d'égalité $n_{i+1}=n_i$, on ait $e_{i+1}-d\leqslant e_i$ puisqu'alors $\mathcal{F}_{i+1}\to\mathcal{F}_i$ est une injection entre $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de même rang. On suppose dans la suite que ces deux dernières conditions sont vérifiées.

Soit $P=MN\subset\mathrm{GL}(n)$ le parabolique standard de sous-groupe de Levi $M=\mathrm{GL}(n_1)\times\mathrm{GL}(n_2)\times\cdots\times\mathrm{GL}(n_s)$, et soit γ l'élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N donné par la matrice par blocs $(\gamma_{i,j})_{i,j=1,\ldots s}$ avec tous les $\gamma_{i,j}$ nuls sauf les $\gamma_{i,i+1}\in\mathrm{Mat}(n_i\times n_{i+1})$ qui sont égaux à $(I,0)$ où I est la matrice identité de $\mathrm{GL}(n_i)$ et 0 est la matrice nulle de $\mathrm{Mat}(n_i \times (n_{i+1} - n_i))$. Au point générique de la courbe X, on peut identifier le drapeau $\mathcal{E}_\bullet$ au drapeau

$$(0) \subsetneq F^{n_1} \subsetneq F^{n_1+n_2} \subsetneq \cdots \subsetneq F^{n_1+\cdots n_{s-1}} \subsetneq F^n$$

de sorte que la matrice de θ soit précisément γ.

Si on note :

— P_γ le centralisateur de γ dans P,

— $P(\mathbb{A})^{\underline{e}} = N(\mathbb{A})M(\mathbb{A})^{\underline{e}}$ avec

$$M(\mathbb{A})^{\underline{e}} = \{m = (g_1, \ldots, g_s) \in \prod_{i=1}^{s} \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{A}) \mid \deg(\det(g_i)) = -e_i\}\,,$$

— $\mathbf{1}_D$ la fonction caractéristique de $\varpi^{-D}\mathfrak{p}(\mathcal{O})$ dans $\mathfrak{p}(\mathbb{A})$,

— $\mathrm{d}p$ la mesure de Haar à gauche qui donne le volume 1 à $P(\mathcal{O})$,

le cardinal champêtre de $\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}(\mathbb{F}_q)$ est égal à

$$|\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}(\mathbb{F}_q)| = \int_{P_\gamma(F)\backslash P(\mathbb{A})^{\underline{e}}} \mathbf{1}_D(p^{-1}\gamma p)\mathrm{d}p\,.$$

On peut calculer cette intégrale en deux temps

$$|\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}(\mathbb{F}_q)| = \int_{M_\gamma(F)\backslash M(\mathbb{A})^{\underline{e}}} \delta_P^{-1}(m) \int_{N_\gamma(F)\backslash N(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}n^{-1}\gamma nm)\mathrm{d}n\mathrm{d}m$$

où $M_\gamma = M \cap P_\gamma$, $N_\gamma = N \cap P_\gamma$, $\mathrm{d}m$ et $\mathrm{d}n$ sont les mesures de Haar sur $M(\mathbb{A})$ et $N(\mathbb{A})$ qui donnent le volume 1 à $M(\mathcal{O})$ et $N(\mathcal{O})$, et δ_P est le caractère modulaire dont la valeur sur $M(\mathbb{A})^{\underline{e}}$ est constante et égale à

$$q^{\sum_{i<j}(n_j e_i - n_i e_j)}\,.$$

Maintenant pour m fixé, on a

$$\begin{aligned}\int_{N_\gamma(F)\backslash N(\mathbb{A})} &\mathbf{1}_D(m^{-1}n^{-1}\gamma nm)\mathrm{d}n \\ &= \mathrm{vol}(N_\gamma(F)\backslash N_\gamma(\mathbb{A}), \mathrm{d}n_\gamma) \int_{N_\gamma(\mathbb{A})\backslash N(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}n^{-1}\gamma nm)\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}n_\gamma}\end{aligned}$$

où $\mathrm{d}n_\gamma$ est la mesure de Haar qui donne le volume 1 à $N_\gamma(\mathcal{O})$. Comme il est bien connu (cela se montre par exemple comme dans [5] sections 4 et 7), la flèche

$$N_\gamma\backslash N \to \mathfrak{n}',\ n \mapsto n^{-1}\gamma n - \gamma$$

où $\mathfrak{n}' = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$, est un isomorphisme algébrique qui envoie la mesure de Haar adélique $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}n_\gamma}$ sur la mesure de Haar $\mathrm{d}\nu'$ sur $\mathfrak{n}'(\mathbb{A})$ qui donne le volume 1 à $\mathfrak{n}'(\mathcal{O})$. En particulier, N_γ étant un groupe unipotent de dimension $\sum_{i=1}^{s-1} n_i n_{i+1}$, on a

$$\mathrm{vol}(N_\gamma(F)\backslash N_\gamma(\mathbb{A}), \mathrm{d}n_\gamma) = q^{\sum_{i=1}^{s-1} n_i n_{i+1}(g-1)}\,.$$

Comme

$$\mathbf{1}_D(m^{-1}\gamma m + m^{-1}\nu' m) = \mathbf{1}_D(m^{-1}\gamma m)\mathbf{1}_D(m^{-1}\nu' m)$$

et que

$$\int_{\mathfrak{n}'(\mathbb{A})} \mathbf{1}_D(m^{-1}\nu' m)\mathrm{d}\nu' = q^{\sum_{i<j-1}(n_j e_i - n_i e_j + n_i n_j d)}$$

ne dépend que de $\underline{e}$ et non de m, on obtient que

$$|\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}(\mathbb{F}_q)| = q^{\Delta} \int_{M_\gamma(F)\backslash M(\mathbb{A})^{\underline{e}}} \mathbf{1}_D(m^{-1}\gamma m)\mathrm{d}m$$

où

$$\begin{aligned}\Delta &= -\sum_{i<j}(n_j e_i - n_i e_j) + \sum_{i<j-1}(n_j e_i - n_i e_j + n_i n_j d) + \sum_{i=1}^{s-1} n_i n_{i+1}(g-1)\\ &= -\sum_{i=0}^{s-1}(n_{i+1}e_i - n_i e_{i+1}) + \sum_{i<j-1} n_i n_j d + \sum_{i=1}^{s-1} n_i n_{i+1}(g-1)\,.\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{C}$ est le champ des chaînes $\mathcal{F}^\bullet$. La dernière intégrale

$$\int_{M_\gamma(F)\backslash M(\mathbb{A})^{\underline{e}}} \mathbf{1}_D(m^{-1}\gamma m)\mathrm{d}m$$

n'est autre que le cardinal champêtre de la catégorie $\mathcal{C}(\mathbb{F}_q)$ et donc

$$|\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}(\mathbb{F}_q)| = q^{\Delta}|\mathcal{C}(\mathbb{F}_q)|\,.$$

Comme la dimension d'une variété est égale au plus grand poids qui intervient dans sa cohomologie ℓ-adique à supports compacts, on déduit de cette dernière formule l'égalité

$$\dim(\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}) = \dim(\mathcal{C}) + \Delta$$

à l'aide de la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz.

D'après Garcia-Prada, Heinloth et Schmitt [9] Corollaire 4.10 et les mêmes considérations de poids que ci-dessus, on a

$$\dim(\mathcal{C}) = \sum_{i=0}^{s-1} n_{i+1}(n_{i+1}-n_i)(g-1) + \sum_{i=0}^{s-1}(n_{i+1}f_i - n_i f_{i+1})$$

avec la convention $n_0 = 0$ et $f_0 = 0$, soit encore

$$\sum_{i=0}^{s-1} n_{i+1}(n_{i+1}-n_i)(g-1) + \sum_{i=0}^{s-1}(n_{i+1}e_i - n_i e_{i+1}) + \sum_{i=1}^{s-1} n_i n_{i+1} d$$

avec la convention $e_0 = 0$. Par suite

$$\dim(\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}) = \left(\sum_{i=1}^{s} n_i^2\right)(g-1) + \left(\sum_{i<j} n_i n_j\right) d\,.$$

Il ne reste plus qu'à comparer cette dimension de $\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}$ à

$$d_{f_n} - 1 = n(g-1) + \frac{n(n-1)}{2} d\,.$$

Si on écrit $d = 2g-2+d'$ avec $d' > 0$, on a

$$d_{f_n} - 1 - \dim(\mathcal{N}_{\underline{n}}^{\underline{e}}) = d'\left(\frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i<j} n_i n_j\right) = \frac{d'}{2}\sum_{i=1}^{s} n_i(n_i-1)$$

et cette expression est donc $\geqslant 0$, avec égalité si et seulement si tous les n_i sont égaux à 1.

11. Le cas du diviseur canonique

Dans le cas où D est un diviseur canonique, c'est-à-dire $\mathcal{O}_X(D) = \Omega_X^1$, les arguments utilisés jusqu'ici ne permettent pas de contrôler le socle de $Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell$. En effet, on a dans ce cas

$$d_{\mathbb{A}_n} = d_{f_n} = n^2(g-1) + 1\,.$$

et l'inégalité

$$1 - s \geqslant (n - n_1 - \cdots - n_s)(d - 2g + 2)$$

de la fin de la démonstration du théorème 9.1 est remplacée par

$$0 \geqslant (n - n_1 - \cdots - n_s)(2g - 2 - 2g + 2)$$

qui ne sert à rien. Néanmoins, avec les notations de cette démonstration, pour $a \in \mathbb{A}_{n,\lambda} \cap \mathrm{Socle}(R^{\mathrm{st}}_{f_{n,*}}\mathbb{Q}_\ell)$, en combinant les inégalités

$$d_a \geqslant n_a^+(Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell) \geqslant \mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n)$$

et

$$\mathrm{d}_{a_i}^{\mathrm{ab}}(J_{n_i}) \geqslant d_{a_i},\ \forall i = 1, \ldots, s\,,$$

à l'égalité

$$d_a = d_{a_1} + \cdots + d_{a_s}\,,$$

on obtient les égalités

$$d_a = n_a^+(Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{d}_a^{\mathrm{ab}}(J_n)$$

et la première de ces égalités implique que $Rf_{n,*}^{\mathrm{st},2d_{f_n}}\mathbb{Q}_\ell$ admet comme facteur direct un faisceau ℓ-adique non trivial de support $\overline{\{a\}}$.

Maintenant, on peut espérer que $Rf_{n,*}^{\mathrm{st},2d_{f_n}}\mathbb{Q}_\ell$ est localement constant sur chaque strate $\mathbb{A}_{n,\lambda}$ comme c'est le cas sur les strates contenues dans l'ouvert génériquement régulier semi-simple, c'est-à-dire celles avec λ de la forme $((n_1,\dots,n_s),(1,\dots,1))$ (voir [6]), et sur la strate nilpotente, c'est-à-dire celle avec $\lambda=((1),(n))$, sur laquelle $\mathcal{N}_n^e$ et $N_n^{e,\mathrm{st}}$ sont constants (cette strate est isomorphe à $H^0(X,\Omega_X^1)$ et on identifie la fibre en a à la fibre en 0 par $(\mathcal{E},\theta)\mapsto(\mathcal{E},\theta-a)$).

Dans le cas où D est un diviseur canonique, on peut donc espérer démontrer que le socle de $Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell$ est contenu dans l'ensemble fini des points génériques des strates $\mathbb{A}_{n,\lambda}$. Pour $n=2$, c'est bien le cas puisque la seule strate non contenue dans l'ouvert génériquement régulier semi-simple est la strate nilpotente.

Pour terminer, mentionnons que, pour n arbitraire, Heinloth a démontré que le point $0\in\mathbb{A}_{n,\lambda}$ n'est pas dans le socle de $Rf_{n,*}^{\mathrm{st}}\mathbb{Q}_\ell$. [10]

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. B. Altman & S. L. Kleiman, « Compactifying the Picard scheme », *Adv. in Math.* **35** (1980), n° 1, p. 50-112.

[2] A. Beauville, M. S. Narasimhan & S. Ramanan, « Spectral curves and the generalised theta divisor », *J. Reine Angew. Math.* **398** (1989), p. 169-179.

[3] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein & P. Deligne, « Faisceaux pervers », in *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, Astérisque, vol. 100, Soc. Math. France, Paris, 1982, p. 5-171.

[4] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990, x+325 pages.

[5] P.-H. Chaudouard, « Sur la contribution unipotente dans la formule des traces d'Arthur pour les groupes généraux linéaires », `http://arxiv.org/abs/1411.3005`.

[6] P.-H. Chaudouard & G. Laumon, « Le lemme fondamental pondéré. II. Énoncés cohomologiques », *Ann. of Math. (2)* **176** (2012), n° 3, p. 1647-1781.

[7] S. Diaz & J. Harris, « Ideals associated to deformations of singular plane curves », *Trans. Amer. Math. Soc.* **309** (1988), n° 2, p. 433-468.

[8] E. Esteves, « Compactifying the relative Jacobian over families of reduced curves », *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), n° 8, p. 3045-3095 (electronic).

[9] O. García-Prada, J. Heinloth & A. Schmitt, « On the motives of moduli of chains and Higgs bundles », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **16** (2014), n° 12, p. 2617-2668.

[10] J. Heinloth, « The intersection form on moduli spaces of twisted PGL_n-Higgs bundles vanishes », `http://arxiv.org/abs/1412.2232`.

[11] N. Hitchin, « Stable bundles and integrable systems », *Duke Math. J.* **54** (1987), n° 1, p. 91-114.

[12] F. Loeser, « Déformations de courbes planes (d'après Severi et Harris) », *Astérisque* (1987), n° 152-153, p. 4, 187-205 (1988), Séminaire Bourbaki, Vol. 1986/87.

[13] S. Mozgovoy & O. Schiffmann, « Counting Higgs bundles », `http://arxiv.org/abs/1411.2101`.

[14] B. C. Ngô, « Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2010), n° 111, p. 1-169.

[15] N. Nitsure, « Moduli space of semistable pairs on a curve », *Proc. London Math. Soc. (3)* **62** (1991), n° 2, p. 275-300.

[16] D. Schaub, « Courbes spectrales et compactifications de jacobiennes », *Math. Z.* **227** (1998), n° 2, p. 295-312.

[17] O. Schiffmann, « Indecomposable vector bundles and stable Higgs bundles over smooth projective curves », `http://arxiv.org/abs/1406.3839`.

Manuscrit reçu le 9 février 2015,
révisé le 27 juin 2015,
accepté le 10 septembre 2015.

Pierre-Henri CHAUDOUARD
Université Paris-Diderot (Paris 7) et Institut Universitaire de France
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche UMR 7586
Bâtiment Sophie Germain, Case 7012
75205 PARIS Cedex 13 (France)
Pierre-Henri.Chaudouard@imj-prg.fr

Gérard LAUMON
CNRS et Université Paris-Sud
UMR 8628
Mathématique, Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France)
gerard.laumon@math.u-psud.fr