



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Laurent LAFFORGUE

**Du transfert automorphe de Langlands aux formules de Poisson non linéaires**

Tome 66, n° 3 (2016), p. 899-1012.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2016\\_\\_66\\_3\\_899\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2016__66_3_899_0)



© Association des Annales de l'institut Fourier, 2016,

*Certains droits réservés.*



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier »  
(<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales  
d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>).

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## DU TRANSFERT AUTOMORPHE DE LANGLANDS AUX FORMULES DE POISSON NON LINÉAIRES

par Laurent LAFFORGUE

---

RÉSUMÉ. — On montre dans le cas des corps de fonctions que le transfert automorphe des groupes réductifs vers les groupes linéaires – qui est maintenant connu dans ce cas – permet de définir sur les groupes réductifs en chaque place des opérateurs de transformation de Fourier qui vérifient une formule de Poisson adélique globale, généralisant les formules de Poisson adéliques linéaires de Tate et Godement-Jacquet.

ABSTRACT. — We prove in the case of function fields that the automorphic transfer from reductive groups to linear groups – which is by now known in that case – allows to define on reductive groups at each place Fourier transform operators which verify a global adelic Poisson formula, generalising the linear adelic Poisson formulas of Tate and Godement-Jacquet.

### Introduction

Dans cet article, on se place sur un corps de fonctions  $F$  muni de son anneau des adèles  $\mathbb{A}$ .

Considérant un groupe réductif connexe (pas nécessairement déployé ni même quasi-déployé)  $G$  sur  $F$  et le groupe réductif complexe  $\widehat{G}$  dual de  $G$  muni de l'action naturelle du groupe de Galois  $\Gamma_F$  de  $F$ , on s'intéresse aux représentations de transfert continues

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

On montre que le transfert automorphe de  $G$  à  $\mathrm{GL}_r$  via  $\rho$  permet de définir un espace de fonctions sur  $G(\mathbb{A})$ , appelées les  $\rho$ -fonctions, muni d'un automorphisme de  $\rho$ -transformation de Fourier  $f \mapsto \widehat{f}$  puis d'établir une

---

*Mots-clés* : corps de fonctions, adèles, groupes réductifs, transfert automorphe de Langlands, transformation de Fourier, formule de Poisson.

*Classification math.* : 11R58, 11R56, 20G25, 20G30, 11F70, 43A30, 11M06.

formule de Poisson associée : celle-ci consiste à construire une fonctionnelle linéaire de l'espace des  $\rho$ -fonctions qui coïncide avec  $f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$  sur les  $\rho$ -fonctions à support compact et qui est laissée invariante par la  $\rho$ -transformation de Fourier.

La possibilité de définir un tel espace de fonctions muni d'une transformation de Fourier associé à  $\rho$  et une fonctionnelle linéaire de cet espace qui étende  $f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$  et satisfasse la formule de Poisson avait été conjecturée par A. Braverman et D. Kazhdan (voir [1]).

Comme le transfert automorphe de  $G$  à  $GL_r$  via une telle représentation de transfert  $\rho$  est maintenant connu sur les corps de fonctions  $F$  (grâce à [5] et [9]), la formule de Poisson sur  $G(\mathbb{A})$  associée à toute telle représentation  $\rho$  est un théorème.

Le présent article complète les parties de la prépublication [6] (dont il corrige une erreur) et de l'article [8] consacrées à déduire des "formules de Poisson non linéaires" du transfert automorphe des groupes réductifs  $G$  vers les groupes linéaires  $GL_r$ .

On a aussi montré dans la prépublication [6] que, en sens inverse, les "formules de Poisson non linéaires" sur les groupes réductifs sur un corps de fonctions permettent de construire des "noyaux du transfert" et donc de réaliser le transfert automorphe des groupes réductifs vers les groupes linéaires.

On montrera dans un article en préparation que cette implication en sens inverse vaut aussi sur les corps de nombres.

Décrivons maintenant le contenu de l'article.

Les sections 1 à 4 sont constituées de rappels.

La section 1 commence par rappeler la structure algébrique de l'ensemble  $\{\pi\}_x^G$  des représentations lisses admissibles irréductibles d'un groupe réductif  $G(F_x)$  sur le corps localisé  $F_x$  de  $F$  en une place  $x$ . Elle est caractérisée par le fait que les fonctions traces  $\pi \mapsto \text{Tr}_\pi(h_x)$  des éléments  $h_x$  de l'algèbre  $\mathcal{H}_x^G$  des fonctions localement constantes à support compact sur  $G(F_x)$  sont des polynômes. Puis, introduisant la mesure de Plancherel  $d\pi$ , la section 1 caractérise les éléments  $h_x \in \mathcal{H}_x^G$  par leur décomposition spectrale

$$h_x(\bullet) = \int d\pi \cdot h_{x,\pi}(\bullet)$$

dont les coefficients  $h_{x,\pi}(\bullet)$  doivent être des polynômes en  $\pi$ .

La section 2, pour laquelle on renvoie au livre de référence [10], rappelle le théorème de décomposition spectrale de Langlands appliqué aux fonctions

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \ni g_1, g_2 \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2)$$

associées à des éléments  $h$  de l'algèbre  $\mathcal{H}^G$  des fonctions localement constantes à support compact sur  $G(\mathbb{A})$ .

La section 3 rappelle la transformation de Fourier linéaire des fonctions sur  $GL_r(F_x)$ , appelées fonctions de Schwartz, qui se prolongent en des fonctions localement constantes à support compact sur  $M_r(F_x)$ . Ces fonctions sont caractérisées par leur décomposition spectrale

$$f_x(\bullet) = |\det(\bullet)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \int d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

dont les coefficients doivent être des fractions rationnelles en  $\pi$  admettant un certain dénominateur commun polynomial  $L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$  qui ne dépend que de  $\pi$ . La transformée de Fourier  $\widehat{f}_x$  d'une telle fonction  $f_x$  est donnée spectralement comme

$$\widehat{f}_x(\bullet) = |\det(\bullet)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \int d\pi \cdot f_{x,\pi}((\bullet)^{-1}) \cdot L_x\left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où les valeurs propres  $\varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$  sont des polynômes inversibles en  $\pi$ .

La section 4 rappelle la transformation de Fourier globale  $f \mapsto \widehat{f}$  des fonctions de Schwartz sur  $GL_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A})$  et la formule de Poisson

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in M_r(F)} \widehat{f}(\gamma)$$

puis sa décomposition spectrale due à Tate dans le cas  $r = 1$  (voir [11]), et à Godement et Jacquet dans le cas  $r \geq 2$  (voir [3]). Cette décomposition spectrale s'exprime par le fait que, pour toute représentation automorphe  $\pi = \otimes_x \pi_x$  de  $GL_r(\mathbb{A})$ , la série formelle

$$L(\pi, Z) = \prod_x L_x\left(\pi_x, Z^{\deg(x)}\right)$$

est une fraction rationnelle et satisfait l'équation fonctionnelle

$$L\left(\pi^\vee, \frac{1}{qZ}\right) = L(\pi, Z) \cdot \varepsilon(\pi, \psi, Z)$$

avec

$$\varepsilon(\pi, \psi, Z) = \prod_x \varepsilon_x\left(\pi_x, \psi_x, Z^{\deg(x)}\right).$$

La section 5 donne de la fonctionnelle de Poisson

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma)$$

une expression purement multiplicative, c'est-à-dire qui s'exprime uniquement en termes de  $GL_r(\mathbb{A})$  et de son sous-groupe discret  $GL_r(F)$ . On choisit pour cela n'importe quelle place  $x_0$  de  $F$  en laquelle  $f$  admette une factorisation

$$f = f_{x_0} \otimes f^{x_0}$$

par un facteur non ramifié  $f_{x_0} : GL_r(O_{x_0}) \backslash GL_r(F_{x_0}) / GL_r(O_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$ , et on écrit  $f_{x_0}$  comme la somme d'une série

$$f_{x_0} = \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} f_{x_0}^{N, N'}$$

de fonctions  $f_{x_0}^{N, N'}$  qui ne dépendent que de la décomposition spectrale de  $f_{x_0}$  et qui sont à support compact ainsi que leurs transformées de Fourier. On montre alors, en se fondant sur les propriétés globales des fonctions  $L(\pi, Z)$  des représentations automorphes  $\pi$ , que la série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in GL_r(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes f^{x_0} \right) (\gamma)$$

est une fraction rationnelle dont la "valeur régularisée" en  $Z = 1$  est égale à

$$S(f) = \sum_{\gamma \in GL_r(F)} f(\gamma) + \sum_{\gamma \in GL_r(F)} \widehat{f}(\gamma) - \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma)$$

et vérifie donc la formule de Poisson

$$S(f) = S(\widehat{f}).$$

La section 6 s'appuie sur les caractérisations spectrales de la section 3 pour proposer une définition spectrale très générale d'un espace de  $\rho$ -fonctions sur  $G(F_x)$  muni d'un automorphisme de  $\rho$ -transformation de Fourier, en supposant donnés des dénominateurs

$$L_x(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_x^G,$$

qui sont les inverses de polynômes en  $\pi$  et  $Z$ , et des valeurs propres

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_x^G,$$

qui sont des polynômes inversibles en  $\pi$  et  $Z^{\pm 1}$ .

Ayant choisi un caractère  $\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ , les  $\rho$ -fonctions sur  $G(F_x)$  sont définies par leur décomposition spectrale

$$f_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

dont les coefficients doivent être des fractions rationnelles en  $\pi$  admettant  $L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$  pour dénominateur commun, et leurs  $\rho$ -transformées de Fourier sont définies spectralement par

$$\widehat{f}_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot f_{x,\pi}((\bullet)^{-1}) \cdot L_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

La section 7 définit l'espace des  $\rho$ -fonctions sur  $G(\mathbb{A})$  et son automorphisme de  $\rho$ -transformation de Fourier en formant simplement le produit sur toutes les places de  $F$  des espaces de  $\rho$ -fonctions locales munis de leur automorphisme de  $\rho$ -transformation de Fourier locale. On écrit toute  $\rho$ -fonction locale non ramifiée

$$f_{x_0} : G(O_{x_0}) \backslash G(F_{x_0}) / G(O_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

comme la somme d'une série

$$f_{x_0} = \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} f_{x_0}^{N, N'}$$

de fonctions  $f_{x_0}^{N, N'}$  qui ne dépendent que de la décomposition spectrale de  $f_{x_0}$  et qui sont à support compact dans  $G(F_{x_0})$  ainsi que leur  $\rho$ -transformée de Fourier. On dit alors que la formule de Poisson est satisfaite si, pour toute  $\rho$ -fonction  $f$  sur  $G(\mathbb{A})$  factorisée en

$$f = f_{x_0} \otimes f^{x_0},$$

la série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes f^{x_0} \right) (\gamma)$$

est une fraction rationnelle dont la "valeur régularisée"  $S(f)$  en  $Z = 1$  ne dépend pas du choix de la place  $x_0$  et vérifie

$$S(f) = S(\widehat{f}).$$

La section 8 considère le cas où  $G = T$  est un tore et où la représentation de transfert  $\rho = \rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  envoie  $\widehat{T}$  dans le tore diagonal  $(\mathbb{C}^\times)^r$  et fait agir  $\Gamma_F$  sur  $\mathbb{C}^r$  par permutation de ses  $r$  vecteurs de base. Cela permet de définir en toute place  $x$  de  $F$  des facteurs

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z), \quad \chi \in \{\pi\}_x^T,$$

puis de montrer que l'espace des  $\rho_T$ -fonctions sur  $T(\mathbb{A})$  muni de sa  $\rho_T$ -transformation de Fourier satisfait la formule de Poisson au sens de la section précédente. Dans ce cas, les séries

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes f^{x_0} \right) (\gamma)$$

sont même absolument convergentes et égales à  $S(f)$ .

La section 9 considère le cas d'un groupe réductif  $G$  quasi-déployé sur  $F$ , donc muni d'une paire de Borel  $(T, B = T \cdot N_B)$ , dont le tore maximal  $T$  est muni d'une représentation de transfert  $\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  comme à la section 8. On suppose donnée en chaque place  $x \in |F|$  une famille de facteurs

$$L_x(\rho, \pi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_x^G,$$

qui coïncident avec les

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z), \quad \chi \in \{\pi\}_x^T,$$

en les représentations  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  induites par des caractères  $\chi \in \{\pi\}_x^T$ . On montre alors que la  $\rho_T$ -formule de Poisson pour les  $\rho_T$ -fonctions sur  $T(\mathbb{A})$  induit pour les  $\rho$ -fonctions sur  $G(\mathbb{A})$  une forme faible de formule de Poisson obtenue après moyennisation par l'opérateur

$$\int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du.$$

Enfin, la section 10 considère un groupe réductif  $G$  sur  $F$  et une représentation de transfert  $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ , sous la seule hypothèse d'existence d'un caractère

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

dont le cocaractère central dual  $\widehat{\det}_G : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{G}$  agisse sur  $\mathbb{C}^r$  par  $z \mapsto z$ . On montre que le transfert automorphe de  $G$  à  $\mathrm{GL}_r$  via  $\rho$  (connu grâce à [5] et [9]) permet de définir en toute place  $x$  de  $F$  des facteurs

$$L_x(\rho, \pi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_x^G,$$

puis d'établir que l'espace associé des  $\rho$ -fonctions sur  $G(\mathbb{A})$  muni de la  $\rho$ -transformation de Fourier satisfait la formule de Poisson au sens de la section 7.

De plus, la fonctionnelle

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) + \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma) - S(f),$$

qui satisfait elle-même la formule de Poisson, coïncide avec l'évaluation

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$$

en toutes les  $\rho$ -fonctions produits  $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$  dont au moins un facteur local non ramifié  $f_x$  est supporté par une partie compacte de  $G(F_x)$ .

### 1. Décomposition spectrale locale en une place ultramétrique : rappels

Dans cette section, on considère un groupe réductif  $G$  sur un corps local ultramétrique  $F_x$ .

On note  $O_x$  l'anneau des entiers de  $F_x$ ,  $q_x$  le cardinal fini du corps résiduel  $\kappa_x$  de  $F_x$  et

$$|\bullet|_x : F_x \rightarrow q_x^{-\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

la norme ultramétrique par laquelle  $F_x^\times$  agit sur les mesures additives de  $F_x$ .

On suppose que  $G$  est connexe mais pas nécessairement déployé ni même quasi-déployé sur  $F_x$ .

DÉFINITION 1.1. — Une représentation complexe  $\pi$  de  $G(F_x)$  est dite "lisse admissible" si

- pour tout sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $G(F_x)$ ,

$$\pi_K = \{v \in \pi \mid K \cdot v = v\}$$

est de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ ,

- $\pi$  est la réunion filtrante de ses sous-espaces  $\pi_K$ .

Le groupe topologique localement compact  $G(F_x)$  est unimodulaire et peut être muni d'une mesure bi-invariante  $dg_x$ . Soient alors  $\mathcal{H}_x^G$  l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact

$$h_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et, pour tout  $K \subset G(F_x)$ ,  $\mathcal{H}_{x,K}^G$  sa sous-algèbre des fonctions à support compact

$$K \backslash G(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}.$$

Pour toute représentation lisse admissible  $\pi$  de  $G(F_x)$ , chaque  $\pi_K$  est une représentation de dimension finie de  $\mathcal{H}_{x,K}^G$ , et  $\pi = \varinjlim \pi_K$  peut être vue comme une représentation de  $\mathcal{H}_x^G = \varinjlim \mathcal{H}_{x,K}^G$ .

Notons  $\{\pi\}_x^G$  l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses admissibles irréductibles de  $G(F_x)$  et, pour tout  $K \subset G(F_x)$ ,  $\{\pi\}_{x,K}^G$  le sous-ensemble des  $\pi$  telles que  $\pi_K \neq 0$ .

On a :

LEMME 1.2. — Pour tout sous-groupe ouvert compact  $K \subset G(F_x)$  et toute représentation irréductible  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ , la représentation de dimension finie  $\pi_K \neq 0$  de  $\mathcal{H}_{x,K}^G$  est irréductible.

Réciproquement, toute représentation de dimension finie irréductible de  $\mathcal{H}_{x,K}^G$  provient d'une représentation irréductible  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ , unique à unique isomorphisme près.



Il résulte de ce lemme que les fonctionnelles linéaires

$$\mathcal{H}_{x,K}^G \ni h_x \mapsto \text{Tr}_\pi(h_x) = \text{Tr}_{\pi_K}(h_x)$$

associées aux représentations  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$  sont linéairement indépendantes les unes des autres. En particulier, elles caractérisent les éléments  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ .

Pour tout  $K \subset G(F_x)$ , on notera  $A_{x,K}^G$  l'algèbre de fonctions

$$\{\pi\}_{x,K}^G \rightarrow \mathbb{C}$$

engendrée par les fonctions traces

$$\{\pi\}_{x,K}^G \ni \pi \mapsto \text{Tr}_\pi(h_x)$$

associées aux éléments  $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$ .

On a :

THÉORÈME 1.3.

- (i) Pour tout  $K \subset G(F_x)$ , l'algèbre  $A_{x,K}^G$  est un produit fini d'algèbres de type fini et intègres sur  $\mathbb{C}$ . Autrement dit,  $\text{Spec } A_{x,K}^G$  est réunion disjointe finie de variétés algébriques affines intègres sur  $\mathbb{C}$ .
- (ii) Chaque  $\{\pi\}_{x,K}^G$  s'identifie à un ouvert de Zariski du spectre maximal de  $A_{x,K}^G$ .
- (iii) La réunion filtrante  $\{\pi\}_x^G = \varinjlim \{\pi\}_{x,K}^G$  s'écrit comme une réunion disjointe de variétés algébriques intègres sur  $\mathbb{C}$ , de telle façon que chaque  $\{\pi\}_{x,K}^G$  est une réunion finie de composantes connexes.

On notera  $[\pi]$  le schéma intègre de type fini sur  $\mathbb{C}$  qui est la composante connexe de n'importe quelle  $\pi \in \{\pi\}_x^G$ , et  $A_{[\pi]}^G$  l'algèbre de fonctions  $[\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  image des  $A_{x,K}^G$ .

Soit  $\Lambda_x^G$  le groupe des caractères continus

$$G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui sont triviaux sur tout sous-groupe compact de  $G(F_x)$ . Comme le plus grand quotient abélien  $G^{\text{ab}} = G/G^{\text{der}}$  de  $G$  est un tore, que  $G^{\text{ab}}(F_x)$  admet un plus grand sous-groupe compact et que son quotient par celui-ci est un réseau (isomorphe à une puissance finie de  $\mathbb{Z}$ ), le groupe  $\Lambda_x^G$  est un tore complexe (isomorphe à une puissance finie de  $\mathbb{C}^\times$ ) et son sous-groupe  $\text{Im } \Lambda_x^G$  des caractères unitaires est un tore réel compact (isomorphe à la puissance correspondante du cercle unité).

Le tore complexe  $\Lambda_x^G$  s'identifie à une composante connexe de  $\{\pi\}_x^G$ .

D'autre part, il agit par le produit tensoriel

$$(\chi, \pi) \mapsto \pi \otimes \chi$$

sur chaque composante connexe de  $\{\pi\}_x^G$ .

On dit qu'une représentation lisse admissible irréductible  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  est "discrète" si sa composante connexe  $[\pi]$  se réduit à son orbite  $\Lambda_x^G \cdot \pi$  sous l'action du tore  $\Lambda_x^G$ . On peut montrer que toute représentation discrète  $\pi$  est unitaire à multiplication près par un caractère de  $\Lambda_x^G$ .

Si  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  défini sur  $F_x$  et  $M$  un sous-groupe de Levi de  $P$ , le tore  $\Lambda_x^M$  contient en particulier le caractère modulaire

$$|\delta_P(\bullet)|_x : M(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}^\times$$

par lequel  $M(F_x)$  agit sur les mesures invariantes du radical unipotent  $N_P(F_x)$  de  $P(F_x)$ .

Si  $\pi$  est une représentation lisse admissible de  $M(F_x)$ , on note

$$\text{Ind}_P^G(\pi) \quad \text{ou} \quad \text{Ind}_P^G(M, \pi)$$

la représentation lisse admissible de  $G(F_x)$  induite de

$$\pi \otimes |\delta_P(\bullet)|_x^{1/2}$$

considérée comme une représentation de  $P(F_x)$ . La représentation  $\text{Ind}_P^G(\pi)$  admet une suite de composition finie par des représentations lisses admissibles irréductibles s'il en est ainsi de  $\pi$ . De même, la présence du facteur  $|\delta_P(\bullet)|_x^{1/2}$  dans la définition assure que  $\text{Ind}_P^G(\pi)$  est unitaire si  $\pi$  est unitaire et, dans ce cas,  $\text{Ind}_P^G(\pi)$  est irréductible si et seulement si  $\pi$  est irréductible.

La proposition suivante précise la structure algébrique des composantes connexes  $[\pi]$  des  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  :

PROPOSITION 1.4.

- (i) Pour  $P, M$  et  $\pi \in \{\pi\}_x^M$  comme ci-dessus, la suite de composition de la représentation  $\text{Ind}_P^G(\pi)$  ne dépend que de la classe de conjugaison de  $(M, \pi)$  par  $G(F_x)$ .

En particulier, elle ne dépend pas de  $P$  et elle est invariante par l'action sur  $\{\pi\}_x^M$  du groupe fini

$$W_M^G = \{g \in G(F_x) \mid g \cdot M \cdot g^{-1} = M\} / M(F_x).$$

- (ii) Réciproquement, pour toute  $\pi \in \{\pi\}_x^G$ , il existe  $P, M$  comme ci-dessus et une représentation discrète  $\pi_0 \in \{\pi\}_x^M$  telle que  $\pi \cong \text{Ind}_P^G(\pi_0)$ . La paire  $(M, \pi_0)$  est unique à conjugaison près par  $G(F_x)$  et peut être appelée le support discret de  $\pi$ .

Si  $\text{Fixe}(M, \pi_0)$  désigne le stabilisateur de  $\pi_0$  dans le groupe  $\Lambda_x^M \rtimes W_M^G$ , on a

$$A_{[\pi]}^G = \left( A_{[\pi_0]}^M \right)^{\text{Fixe}(M, \pi_0)},$$

si bien que  $[\pi]$  s'identifie à un ouvert de Zariski du quotient de  $[\pi_0]$  par l'action du groupe fini  $\text{Fixe}(M, \pi_0)$ .

- (iii) Une représentation  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  est unitaire si son support discret  $(M, \pi_0)$  est unitaire.

Alors la sous-variété algébrique réelle

$$\text{Im}[\pi] \subset [\pi]$$

des représentations unitaires contient le quotient de

$$\text{Im}[\pi_0] = \text{Im} \Lambda_x^M \cdot \pi_0$$

par l'action du groupe fini  $\text{Fixe}(M, \pi_0)$ .

Pour toute représentation lisse admissible  $\pi$  de  $G(F_x)$ , on appelle “représentation contragrédiente de  $\pi$ ” et on note  $\pi^\vee$  la représentation lisse admissible de  $G(F_x)$  constituée des formes linéaires

$$v^\vee : \pi \mapsto \mathbb{C}$$

qui sont invariantes par un sous-groupe ouvert compact de  $G(F_x)$ . On vérifie que pour toute paire  $(P, M)$  comme plus haut, le foncteur

$$\pi \mapsto \text{Ind}_P^G(\pi)$$

commute avec la formation des représentations contragrédientes.

Pour toute représentation lisse admissible  $\pi$  de  $G(F_x)$ , on appelle “coefficients matriciels de  $\pi$ ” les fonctions sur  $G(F_x)$  de la forme

$$G(F_x) \ni g \mapsto \langle v^\vee, g \cdot v \rangle = \langle g^{-1} \cdot v^\vee, v \rangle, \quad v \in \pi, \quad v^\vee \in \pi^\vee,$$

ou, plus généralement, les combinaisons linéaires de telles fonctions. On note qu'une fonction  $g \mapsto \varphi(g)$  est un coefficient matriciel de  $\pi$  si et seulement si la fonction  $g \mapsto \varphi(g^{-1})$  est un coefficient matriciel de  $\pi^\vee$ .

Toute représentation irréductible  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  possède un caractère central

$$\chi_\pi : Z_G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

par lequel le centre  $Z_G(F_x)$  de  $G(F_x)$  agit sur l'espace de  $\pi$ , si bien que les coefficients matriciels  $\varphi$  de  $\pi$  vérifient tous

$$\varphi(z \cdot g) = \chi_\pi(z) \cdot \varphi(g), \quad \forall z \in Z_G(F_x), \quad \forall g \in G(F_x).$$

Une telle représentation  $\pi$  est dite “supercuspidale” si ses coefficients matriciels sont à support compact modulo  $Z_G(F_x)$ . Elle est dite “de carré intégrable” si ses coefficients matriciels sont de carré intégrable modulo  $Z_G(F_x)$ .

Les représentations supercuspidales sont de carré intégrable mais il existe en général des représentations de carré intégrable qui ne sont pas supercuspidales.

De même, on montre que les représentations de carré intégrable sont discrètes mais il existe en général des représentations discrètes qui ne sont pas de carré intégrable.

On a cependant :

PROPOSITION 1.5. — *Pour toute représentation  $\pi \in \{\pi\}_x^G$ , il existe un sous-groupe parabolique  $P$  de  $G$  défini sur  $F_x$ , un sous-groupe de Levi  $M$  de  $P$  et une représentation supercuspidale  $\pi_0$  de  $M(F_x)$  telle que  $\pi$  soit isomorphe à l'un des sous-quotients irréductibles de  $\text{Ind}_P^G(\pi_0)$ .*

*La paire  $(M, \pi_0)$  est unique à conjugaison près par  $G(F_x)$  et peut être appelée le support supercuspidal de  $\pi$ .*

Si  $G$  est quasi-déployé sur  $F_x$ , c'est-à-dire possède une paire de Borel  $(T_x, B_x)$  définie sur  $F_x$ , on peut appeler “de type torique” les représentations irréductibles  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  dont le support supercuspidal est constitué de  $T_x$  et d'un caractère  $\chi : T_x(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . Le caractère  $\chi$  de support est alors uniquement déterminé modulo l'action du groupe de Weyl  $F_x$ -rationnel  $W_x^G$  constitué des éléments du groupe de Weyl  $W^G$  de  $G$  fixés par l'action du groupe de Galois  $\Gamma_{F_x}$  de  $F_x$ .

On rappelle que  $G$  est dit “non ramifié” sur  $F_x$  s'il est quasi-déployé sur  $F_x$  et si l'action de  $\Gamma_{F_x}$  sur la donnée radicielle de  $G$  ou, ce qui revient au même, sur le groupe réductif complexe  $\widehat{G}$  dual de  $G$ , se factorise à travers son quotient non ramifié  $\Gamma_{F_x}^{\text{nr}}$  engendré topologiquement par l'élément de Frobenius  $\sigma_x$ . Dans ce cas,  $G$  s'étend canoniquement en un schéma en groupes réductifs au-dessus de  $\text{Spec}(O_x)$  et on peut introduire le sous-groupe  $G(O_x)$  de  $G(F_x)$ ; c'est un sous-groupe compact ouvert maximal. On appelle alors “sphériques” les fonctions sur  $G(F_x)$  bi-invariantes par  $G(O_x)$  et, normalisant la mesure de Haar  $dg_x$  de  $G(F_x)$  par la condition  $\text{vol}(G(O_x)) = 1$ , on note  $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = \mathcal{H}_{x,G(O_x)}^G$  l'algèbre de convolution des fonctions sphériques à support compact. Enfin, on appelle “non ramifiées” les représentations éléments de  $\{\pi\}_{x,\emptyset}^G = \{\pi\}_{x,G(O_x)}^G$  qui admettent des vecteurs non nuls invariants par  $G(O_x)$ .

On a le théorème de Satake :

THÉORÈME 1.6. — *Supposons que  $G$  est non ramifié sur  $F_x$  et considérons une paire de Borel  $(T_x, B_x)$  de  $G$  définie sur  $F_x$ . Alors :*

- (i) *L'algèbre sphérique  $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$  admet un isomorphisme naturel*

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} (\mathcal{H}_{x,\emptyset}^{T_x})^{W_x^G}$$

vers l'algèbre des fonctions sphériques sur  $T_x(F_x)$  invariantes par le groupe de Weyl  $F_x$ -rationnel  $W_x^G$ .

En particulier,  $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$  est commutative et s'identifie à l'algèbre  $A_{x,\emptyset}^G = A_{x,G(O_x)}^G$  des fonctions traces des fonctions sphériques.

- (ii) Se donner une représentation non ramifiée  $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$  équivaut à se donner un caractère

$$(\mathcal{H}_{x,\emptyset}^{T_x})^{W_x^G} \rightarrow \mathbb{C}$$

ou, ce qui revient au même, un caractère non ramifié

$$z_\pi : T_x(F_x)/T_x(O_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

uniquement déterminé modulo l'action de  $W_x^G$ .

Dans cette correspondance,  $(T_x, z_\pi)$  est le support supercuspidal de  $\pi$ . Il est son support discret, soit  $\pi \cong \text{Ind}_{B_x}^G(z_\pi)$ , si et seulement si  $z_\pi$  appartient à un ouvert de Zariski du tore complexe  $[z_\pi] = \Lambda_x^{T_x}$  qui contient le sous-tore réel compact  $\text{Im } \Lambda_x^{T_x}$  des caractères unitaires.

- (iii) Notant  $\widehat{G}_x$  la fibre du produit semi-direct

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\text{nr}}$$

au-dessus de l'élément de Frobenius  $\sigma_x \in \Gamma_{F_x}^{\text{nr}}$ , munie de l'action par conjugaison de  $\widehat{G}$ , l'isomorphisme de Satake  $S_x^G$  de (i) s'écrit aussi comme un isomorphisme

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$$

vers l'algèbre des fonctions polynomiales sur  $\widehat{G}_x$  qui sont invariantes par conjugaison par  $\widehat{G}$ .

*Remarque.* — Il résulte de (ii) que les représentations non ramifiées  $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$  sont “de type torique”.

Revenons à un groupe réductif arbitraire  $G$  sur  $F_x$ .

On note  $\text{Im } \{\pi\}_x^G$  la sous-variété algébrique réelle des représentations  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  qui sont unitaires. Pour tout sous-groupe ouvert compact  $K \subset G(F_x)$ , la sous-variété algébrique réelle  $\text{Im } \{\pi\}_{x,K}^G$  des représentations unitaires de  $\{\pi\}_{x,K}^G$  est une réunion finie de composantes connexes de  $\text{Im } \{\pi\}_x^G$ . Pour toute  $\pi \in \text{Im } \{\pi\}_x^G$ , et si  $(M, \pi_0)$  désigne son support discret, sa composante connexe  $\text{Im } [\pi]$  contient le quotient de

$$\text{Im } [\pi_0] = \text{Im } \Lambda_x^M \cdot \pi_0$$

par l'action du groupe fini  $W_M^G$ .

On a le théorème de Plancherel :

THÉORÈME 1.7.

- (i) Il existe sur  $\text{Im} \{\pi\}_x^G$  une unique mesure  $d\pi$ , appelée mesure de Plancherel, telle que, pour tout  $K \subset G(F_x)$  et toute  $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$ , on ait

$$h_x(1) = \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot \text{Tr}_\pi(h_x).$$

- (ii) La mesure de Plancherel  $d\pi$  est supportée par les représentations unitaires  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  qui sont “tempérées” au sens que leur support discret  $(M, \pi_0)$  est “de carré intégrable” et unitaire.
- (iii) Si  $\pi \in \text{Im} \{\pi\}_x^G$  est une représentation tempérée de support discret  $(M, \pi_0)$ , la restriction de la mesure de Plancherel  $d\pi$  à

$$\text{Im} [\pi_0]/W_M^G \subset \text{Im} [\pi]$$

est de la forme

$$d\pi = R_{\pi_0}(\bullet) \cdot d\pi_0$$

où :

- $d\pi_0$  désigne une mesure sur  $\text{Im} [\pi_0] = \text{Im} \Lambda_x^M \cdot \pi_0$  invariante par  $\text{Im} \Lambda_x^M$  et donc aussi par  $W_M^G$ ,
- $R_{\pi_0}(\bullet)$  est une fonction rationnelle sur  $[\pi_0] = \Lambda_x^M \cdot \pi_0$  qui est invariante par  $W_M^G$  et dont les pôles sont simples et ne rencontrent pas  $\text{Im} [\pi_0]$ ,
- la variété complexe  $[\pi]$  s’identifie à l’ouvert de Zariski de  $[\pi_0]/W_M^G$  complémentaire des pôles de la fraction rationnelle  $R_{\pi_0}(\bullet)$ .

Disons qu’une fonction sur une composante connexe  $[\pi_1]$  de  $\{\pi\}_x^G$  est “polynomiale” si elle est élément de l’algèbre engendrée par les fonctions traces  $\pi \mapsto \text{Tr}_\pi(h_x)$ ,  $h_x \in \mathcal{H}_x^G$ .

Si  $\pi_0 \in \{\pi\}_x^M$  est une représentation supercuspidale d’un sous-groupe de Levi  $M$  de  $G$  et  $[\pi_1] \subset \{\pi\}_x^G$  est l’unique classe des représentations dont le support discret est contenu dans  $[\pi_0]$ ,  $[\pi_1]$  s’identifie à un ouvert de Zariski de  $[\pi_0]/W_M^G$  et toute fonction polynomiale sur  $[\pi_1]$  se prolonge à  $[\pi_0]/W_M^G$  tout entier. Si  $[\pi_2] \subset \{\pi\}_x^G$  est n’importe quelle autre classe de représentations dont le support supercuspidal est contenu dans  $[\pi_0]$ , l’application de passage à ce support définit une immersion localement fermée de  $[\pi_2]$  dans  $[\pi_0]/W_M^G$ . Cela permet de parler des spécialisations en les points de  $[\pi_2]$  des fonctions polynomiales sur  $[\pi_1]$ .

En remplaçant les fonctions  $h_x$  par leurs translatées  $h_x^g = h_x(\bullet g)$  ou  ${}^g h_x = h_x(g\bullet)$ , on démontre à partir du théorème ci-dessus :

THÉORÈME 1.8. — Pour tout  $K \subset G(F_x)$  et si  $d\pi$  désigne toujours la mesure de Plancherel sur  $\text{Im} \{\pi\}_x^G$ , on a :

(i) Toute fonction  $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$  s'écrit sous la forme

$$h_x(g) = \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(g), \quad \forall g \in G(F_x),$$

où :

- pour tout  $g \in G(F_x)$ ,

$$\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$$

est une fonction polynomiale sur  $\{\pi\}_{x,K}^G$ ,

- pour toute  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ , la fonction sur  $G(F_x)$

$$g \mapsto h_{x,\pi}(g)$$

est élément de l'espace  $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$  des "coefficients matriciels" de  $\pi$  bi-invariants par  $K$ ,

- si  $\pi_2 \in \{\pi\}_{x,K}^G$ ,  $(M, \pi_0)$  est le support supercuspidal de  $\pi_2$  et  $[\pi_1] \subset \{\pi\}_{x,K}^G$  est l'unique classe des représentations dont le support discret est contenu dans  $[\pi_0]$ , la fonction

$$G(F_x) \ni g \mapsto h_{x,\pi_2}(g)$$

est l'image de la famille des spécialisations en  $\pi_2$  des fonctions polynomiales

$$[\pi_1] \ni \pi \mapsto h_{x,\pi}(g), \quad g \in G(F_x),$$

par l'opérateur linéaire de restriction de l'action de  $\mathcal{H}_x^G$  au sous-quotient  $\pi_2$  de  $\text{Ind}_P^G(\pi_0)$ .

(ii) Cette décomposition spectrale de toute fonction  $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$  est unique, et on a nécessairement

$$h_{x,\pi}(g) = \text{Tr}_\pi(h_x^g) = \text{Tr}_\pi({}^g h_x), \quad \forall \pi, \quad \forall g.$$

(iii) Réciproquement, pour toute famille de fonctions

$$g \mapsto h_{x,\pi}(g), \quad \pi \in \{\pi\}_{x,K}^G,$$

qui vérifie les conditions de (i), l'intégrale

$$g \mapsto \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(g)$$

définit un élément de  $\mathcal{H}_{x,K}^G$ , c'est-à-dire une fonction bi-invariante

$$h_x : K \backslash G(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}$$

dont le support est compact.

On déduit de ce théorème :

COROLLAIRE 1.9. — *Considérons un sous-groupe ouvert compact  $K \subset G(F_x)$  et une fonction polynomiale*

$$\{\pi\}_{x,K}^G \ni \pi \mapsto \gamma(\pi)$$

dont les valeurs  $\gamma(\pi)$  ne dépendent que du support supercuspidal de  $\pi$ .

Alors, pour toute fonction  $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$  décomposée spectralement sous la forme

$$h_x(g) = \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(g), \quad g \in G(F_x),$$

l'intégrale

$$g \mapsto \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot \gamma(\pi) \cdot h_{x,\pi}(g), \quad g \in G(F_x),$$

définit un élément de  $\mathcal{H}_{x,K}^G$ , autrement dit a un support compact.

## 2. Décomposition spectrale globale : rappels

Dans cette section, on considère un groupe réductif  $G$  sur un corps de fonctions  $F$  dont le sous-corps des constantes est un corps fini  $\mathbb{F}_q$  à  $q$  éléments.

On note  $|F|$  l'ensemble des places de  $F$ ,  $F_x$  le corps local ultramétrique complété de  $F$  en chaque place  $x \in |F|$ ,  $O_x$  son anneau des entiers,  $q_x = q^{\deg(x)}$  le cardinal du corps résiduel  $\kappa_x$  de  $O_x$ , et

$$|\bullet|_x : F_x \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

la norme ultramétrique par laquelle  $F_x^\times$  agit sur les mesures additives de  $F_x$ . Enfin, on note

$$\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$$

l'anneau topologique des adèles de  $F$ ,

$$O_{\mathbb{A}} = \prod_{x \in |F|} O_x$$

son sous-anneau des entiers, et

$$|\bullet| = \prod_{x \in |F|} |\bullet|_x : \mathbb{A}^\times \rightarrow q^{\mathbb{Z}}$$

la norme produit qui vérifie

$$|\gamma| = 1, \quad \forall \gamma \in F^\times.$$



Comme dans la section précédente, le groupe réductif  $G$  est supposé connexe mais pas nécessairement déployé ni même quasi-déployé sur le corps de base  $F$ . On choisit une paire  $(T, B)$  constituée d'un sous-tore  $T$  de  $G$ , défini sur  $F$  et maximal pour cette propriété, et d'un sous-groupe parabolique  $B$  contenant  $T$  de  $G$ , défini sur  $F$  et minimal pour cette propriété. Le centralisateur de  $T$  dans  $G$  est un sous-groupe de Levi  $M_B$  de  $B$ . Les sous-groupes paraboliques  $P$  [resp. de Levi  $M$ ] de  $G$  définis sur  $F$  et contenant  $B$  [resp.  $M_B$ ] sont appelés standard. On sait que tout sous-groupe parabolique de  $G$  défini sur  $F$  est conjugué par  $G(F)$  à un unique sous-groupe parabolique standard, et que tout sous-groupe parabolique standard  $P$  possède un unique sous-groupe de Levi standard  $M_P$ .

Le groupe réductif  $G$  devient quasi-déployé et même non ramifié sur le corps localisé  $F_x$  en presque toute place  $x \in |F|$ ; autrement dit, l'ensemble  $S_G$  des places  $x \in |F|$  en lesquelles  $G$  est ramifié est fini. En toute place  $x \in |F| - S_G$ , on choisit une paire de Borel  $(T_x, B_x)$  de  $G$  définie sur  $F_x$  et telle que  $T \subset T_x$ ,  $B_x \subset B$ . Le groupe  $G$  sur  $F_x$  muni de la paire de Borel  $(T_x, B_x)$  se prolonge canoniquement en un schéma en groupes réductifs sur  $O_x$ , si bien que l'on dispose du sous-groupe ouvert compact maximal

$$K_{x,\emptyset} = G(O_x) \subset G(F_x).$$

Il vérifie la propriété d'Iwasawa

$$G(F_x) = B_x(F_x) \cdot G(O_x)$$

et a fortiori

$$G(F_x) = B(F_x) \cdot K_{x,\emptyset}.$$

En les places restantes  $x \in S_G$ , il est également possible de choisir un sous-groupe ouvert compact maximal

$$K_{x,\emptyset} \subset G(F_x)$$

tel que

$$G(F_x) = B(F_x) \cdot K_{x,\emptyset}.$$

En toute place  $x \in |F|$ , on munit  $G(F_x)$  de la mesure de Haar  $dg_x$  qui attribue le volume 1 à  $K_{x,\emptyset}$ , et on note  $\mathcal{H}_x^G$  l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact sur  $G(F_x)$ . De même, on note

$$\mathcal{H}^G = \bigotimes_{x \in |F|} \mathcal{H}_x^G$$

l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact sur le groupe topologique  $G(\mathbb{A})$  muni de la mesure produit  $dg = \bigotimes_{x \in |F|} dg_x$ .

Pour tout sous-groupe ouvert compact produit

$$K = \prod_{x \in |F|} K_x$$

de  $G(\mathbb{A})$ , dont les facteurs  $K_x \subset G(F_x)$  sont nécessairement égaux à  $K_{x, \emptyset}$  en presque toute place  $x \in |F|$ , on note

$$\mathcal{H}_K^G = \bigotimes_{x \in |F|} \mathcal{H}_{x, K_x}^G$$

la sous-algèbre de convolution des fonctions à support compact dans  $G(\mathbb{A})$  bi-invariantes par  $K$ .

Comme dans le cas local, une représentation complexe  $\pi$  de  $G(\mathbb{A})$  est dite “lisse admissible” si

- pour tout  $K \subset G(\mathbb{A})$  comme ci-dessus

$$\pi_K = \{v \in \pi \mid K \cdot v = v\}$$

est de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ ,

- $\pi$  est la réunion filtrante de ses sous-espaces  $\pi_K$ .

Alors chaque  $\pi_K$  est une représentation de dimension finie de  $\mathcal{H}_K^G$ , et  $\pi = \varinjlim \pi_K$  peut être vue comme une représentation de  $\mathcal{H}^G = \varinjlim \mathcal{H}_K^G$ .

Les représentations lisses admissibles irréductibles sont les produits

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de représentations lisses admissibles irréductibles  $\pi_x$  des groupes locaux  $G(F_x)$  qui sont non ramifiées en presque toute place  $x \in |F| - S_G$ . Elles possèdent des caractères centraux

$$\chi_\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_{\pi_x} : Z_G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

par lesquels le centre  $Z_G(\mathbb{A}) = \prod_{x \in |F|} Z_G(F_x)$  de  $G(\mathbb{A})$  agit sur les espaces  $\pi$ .

Le sous-groupe  $G(F)$  du groupe topologique  $G(\mathbb{A})$  est discret. Cela permet de considérer l'espace topologique quotient  $G(F) \backslash G(\mathbb{A})$  muni de l'action à droite de  $G(\mathbb{A})$ , puis l'espace des fonctions automorphes lisses (c'est-à-dire invariantes à droite par un sous-groupe ouvert compact de  $G(\mathbb{A})$ )

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

muni de l'action de  $G(\mathbb{A})$  par translation à droite ou, ce qui revient au même, de l'action de  $\mathcal{H}^G$  par convolution à droite. On rappelle :

## DÉFINITION 2.1.

- (i) Une représentation lisse admissible irréductible  $\pi$  de  $G(\mathbb{A})$  est dite “automorphe” si elle admet une réalisation dans l’espace des fonctions automorphes lisses

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

- (ii) Une représentation automorphe  $\pi$  de  $G(\mathbb{A})$  est dite “cuspidale” si elle admet une réalisation dans le sous-espace des fonctions automorphes lisses

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui sont “cuspidales” au sens que, pour tout sous-groupe parabolique non-trivial  $P$  de  $G$  défini sur  $F$ , de radical unipotent  $N_P$ , on a

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} du_P \cdot \varphi(u_P \cdot g) = 0, \quad \forall g \in G(\mathbb{A}),$$

où  $du_P$  désigne une mesure invariante par  $N_P(\mathbb{A})$  sur le quotient compact  $N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})$ .

- (iii) Une représentation automorphe  $\pi$  de  $G(\mathbb{A})$ , de caractère central  $\chi_\pi : Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , est dite “de carré intégrable” si elle apparaît comme facteur direct de l’espace  $L^2_{\chi_\pi}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$  des fonctions automorphes lisses

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

telles que

$$\varphi(z \cdot g) = \chi_\pi(z) \cdot \varphi(g), \quad \forall z \in Z_G(\mathbb{A}), \quad \forall g \in G(\mathbb{A}),$$

et qui sont de carré intégrable modulo  $Z_G(\mathbb{A})$ .

## Remarques.

- (i) On notera  $\{\pi\}_{\text{aut}}^G$  [resp.  $\{\pi\}_{\text{cusp}}^G$ , resp.  $\{\pi\}_{\text{int}}^G$ ] l’ensemble des classes d’isomorphie de représentations automorphes [resp. cuspidales, resp. de carré intégrable] de  $G(\mathbb{A})$ , et  $\text{Im}\{\pi\}_{\text{aut}}^G$ ,  $\text{Im}\{\pi\}_{\text{cusp}}^G$ ,  $\text{Im}\{\pi\}_{\text{int}}^G$  les sous-ensembles des représentations unitaires.
- (ii) On montre que toute fonction automorphe lisse cuspidale  $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  est à support compact modulo  $Z_G(\mathbb{A})$ . Il en résulte que toute représentation automorphe cuspidale est de carré intégrable.
- (iii) Une représentation automorphe de carré intégrable  $\pi$  est unitaire si et seulement si son caractère central  $\chi_\pi$  est unitaire.

On note  $\Lambda^G$  le groupe des caractères de  $G(\mathbb{A})$  qui sont triviaux sur  $G(F)$  et sur tout sous-groupe ouvert compact de  $G(\mathbb{A})$ . Le plus grand quotient abélien  $G^{\text{ab}} = G/G^{\text{der}}$  de  $G$  est un tore sur  $F$ , et  $\Lambda^G$  s'identifie au groupe des caractères de  $G^{\text{ab}}(F)\backslash G^{\text{ab}}(\mathbb{A})$  qui sont triviaux sur son plus grand sous-groupe ouvert compact. Or le quotient de  $G^{\text{ab}}(F)\backslash G^{\text{ab}}(\mathbb{A})$  par ce sous-groupe est un réseau, isomorphe à une puissance finie de  $\mathbb{Z}$ . Donc  $\Lambda^G$  a la structure d'un tore complexe, isomorphe à une puissance finie de  $\mathbb{C}^\times$ , et son sous-groupe  $\text{Im } \Lambda^G$  des caractères unitaires a la structure d'une sous-variété réelle compacte, isomorphe à la puissance correspondante du cercle unité.

Les caractères  $\lambda \in \Lambda^G$  agissent sur  $\{\pi\}_{\text{aut}}^G$  et ses sous-ensembles  $\{\pi\}_{\text{cusp}}^G$ ,  $\{\pi\}_{\text{int}}^G$  par

$$(\lambda, \pi) \mapsto \pi \otimes \lambda = \pi_\lambda.$$

Si  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  défini sur  $F$ , de radical unipotent  $N_P$  et de sous-groupe de Levi  $M_P$ , on note

$$\delta_P : P \rightarrow P/N_P \cong M_P \rightarrow \mathbb{G}_m$$

le caractère modulaire par lequel  $P$  ou  $M_P$  agissent sur la puissance extérieure maximale de l'espace Lie  $N_P$ .

Si de plus  $\pi$  est une représentation lisse admissible de  $M_P(\mathbb{A})$ , on note

$$\text{Ind}_P^G(\pi)$$

la représentation lisse admissible de  $G(\mathbb{A})$  induite par

$$\pi \otimes |\delta_P(\bullet)|^{1/2}$$

considérée comme une représentation de  $P(\mathbb{A})$ . Si  $\pi$  admet une suite de composition finie par des représentations lisses admissibles irréductibles, il en est de même de  $\text{Ind}_P^G(\pi)$ . La présence du facteur  $|\delta_P(\bullet)|^{1/2}$  dans la définition assure que  $\text{Ind}_P^G(\pi)$  est unitaire si  $\pi$  est unitaire et, dans ce cas,  $\text{Ind}_P^G(\pi)$  est irréductible si  $\pi$  est irréductible.

La théorie des séries d'Eisenstein a permis à Langlands de démontrer :

**THÉOREME 2.2.**

- (i) *Pour tout sous-groupe parabolique  $P = M_P \cdot N_P$  de  $G$  défini sur  $F$  et pour toute représentation automorphe  $\pi$  de  $M_P(\mathbb{A})$ , l'un au moins des sous-quotients irréductibles de la représentation  $\text{Ind}_P^G(\pi)$  est une représentation automorphe de  $G(\mathbb{A})$ .*
- (ii) *Pour toute représentation automorphe  $\pi$  de  $G(\mathbb{A})$ , il existe un sous-groupe parabolique standard  $P = M_P \cdot N_P$  de  $G$  et une représentation automorphe cuspidale  $\pi_0$  de  $M_P(\mathbb{A})$  telle que  $\pi$  soit un sous-quotient de la représentation  $\text{Ind}_P^G(\pi_0)$ . La paire  $(M_P, \pi_0)$  est*

uniquement déterminée à conjugaison près par un élément de  $G(F)$  et s'appelle le support cuspidal de  $\pi$ .

Langlands a démontré que la décomposition spectrale de l'espace des fonctions automorphes

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

de carré intégrable fait apparaître les représentations automorphes de la forme

$$\pi = \text{Ind}_P^G(\pi_0)$$

pour un sous-groupe parabolique standard  $P = M_P \cdot N_P$  de  $G$  et une représentation automorphe unitaire de carré intégrable  $\pi_0$  de  $M_P(\mathbb{A})$ . Pour cette raison, les représentations de cette forme peuvent être appelées "spectrales" et on peut noter  $\{\pi\}_{\text{sp}}^G$  l'ensemble de leurs classes d'isomorphie. Pour toute représentation spectrale  $\pi$ , la paire de carré intégrable  $(M_P, \pi_0)$  qui la définit est uniquement déterminée à conjugaison près par un élément de  $G(F)$  et peut être appelée le support de carré intégrable de  $\pi$ .

Pour tout sous-groupe parabolique standard  $P$  de  $G$  et toute représentation  $\pi_0 \in \{\pi\}_{\text{int}}^{M_P}$ ,  $\pi_0$  apparaît avec une multiplicité finie comme facteur direct de l'espace  $L^2_{\chi_{\pi_0}}(M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}))$  des fonctions automorphes lisses

$$\varphi : M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que

$$\varphi(z \cdot m) = \chi_{\pi_0}(z) \cdot \varphi(g), \quad \forall z \in Z_{M_P}(\mathbb{A}), \quad \forall g \in G(\mathbb{A}),$$

et qui sont de carré intégrable modulo le centre  $Z_{M_P}(\mathbb{A})$ . On note

$$L^2_{\pi_0}(M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}))$$

le sous-espace de  $L^2_{\chi_{\pi_0}}(M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}))$  somme de ces facteurs directs isomorphes à  $\pi_0$ .

Si  $K = \prod_{x \in |F|} K_x$  est un sous-groupe ouvert compact de  $G(\mathbb{A})$ , on note encore

$$L^2_{\pi_0}(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K)$$

l'espace des fonctions

$$\varphi : M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que, pour tout  $g \in G(\mathbb{A})$ , la fonction

$$M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}) \ni m \mapsto |\delta_P(m)|^{-1/2} \cdot \varphi(mg)$$

soit élément de l'espace  $L^2_{\pi_0}(M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}))$ .

Cet espace

$$L^2_{\pi_0}(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K)$$

est nécessairement de dimension finie. On peut le munir d'une base ortho-normée notée  $\mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)$ .

Tout élément  $\lambda \in \Lambda^{M_P}$  peut être vu comme un caractère

$$P(\mathbb{A}) \rightarrow M_P(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

trivial sur  $P(F)$  et sur tout sous-groupe ouvert compact de  $P(\mathbb{A})$ , donc en particulier sur l'intersection  $P(\mathbb{A}) \cap K_\emptyset$  de  $P(\mathbb{A})$  et du sous-groupe ouvert compact maximal

$$K_\emptyset = \prod_{x \in |F|} K_{x, \emptyset} \subset G(\mathbb{A}).$$

D'après la décomposition

$$G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A}) \cdot K_\emptyset,$$

$\lambda$  se prolonge de manière unique en une fonction

$$N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K_\emptyset \rightarrow \mathbb{C}$$

que l'on notera encore  $\lambda$  et qui est invariante à gauche par  $M_P(F)$  et donc  $P(F)$ .

Si  $\pi \in \{\pi\}_{\text{int}}^{M_P}$  est une représentation automorphe de carré intégrable de  $M_P(\mathbb{A})$ , il en est de même des

$$\pi_\lambda = \pi \otimes \lambda, \quad \lambda \in \Lambda^{M_P},$$

et, si  $K$  est un sous-groupe ouvert compact de  $K_\emptyset$ , les multiplications

$$\varphi \mapsto \varphi \cdot \lambda$$

définissent des isomorphismes d'espaces vectoriels

$$L^2_\pi(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K) \xrightarrow{\sim} L^2_{\pi_\lambda}(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K).$$

Si  $\pi$  est unitaire,  $\pi_\lambda$  est unitaire si et seulement si  $\lambda$  est élément de  $\text{Im } \Lambda^{M_P}$ .

On note  $[\pi]$  la variété complexe, isomorphe à  $\Lambda^{M_P}$ , des représentations de la forme  $\pi_\lambda$  et  $\text{Im } [\pi]$  la sous-variété réelle compacte de  $[\pi]$ , isomorphe à  $\text{Im } \Lambda^{M_P}$ , constituée des représentations unitaires.

Deux paires de carré intégrable  $(M_P, \pi)$  et  $(M_{P'}, \pi')$  sont dites "équivalentes" si elles sont conjuguées l'une de l'autre par un élément de  $G(F)$ . Elles sont dites "faiblement équivalentes" s'il existe  $\lambda \in \Lambda^{M_P}$  tel que  $(M_P, \pi_\lambda)$  et  $(M_{P'}, \pi')$  soient équivalentes.

Pour tout sous-groupe de Levi standard  $M$  de  $G$ , on note  $W_M^G$  le groupe fini

$$W_M^G = \{\gamma \in G(F) \mid \gamma^{-1} \cdot M \cdot \gamma = M\} / M(F)$$

et, si  $\pi \in \{\pi\}_{\text{int}}^M$ , on note

$$\text{Fixe}(M, \pi) \subset \Lambda^M \rtimes W_M^G$$

le sous-groupe fini des  $(\lambda, w)$  tels que

$$w(\pi_\lambda) \cong \pi.$$

Pour tout sous-groupe parabolique standard  $P$  de  $G$ , toute  $\pi \in \{\pi\}_{\text{int}}^{M_P}$ , tout sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $K_\emptyset$ , toute fonction

$$\varphi \in L_\pi^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)$$

et tout élément  $g \in G(\mathbb{A})$ , la série d'Eisenstein

$$\sum_{\gamma \in P(F) \backslash G(F)} (\varphi \cdot \lambda)(\gamma \cdot g)$$

converge absolument en tout élément  $\lambda$  d'un ouvert non vide du tore complexe  $\Lambda^{M_P}$  qui ne dépend pas de  $g$ . De plus, sa limite

$$E(\varphi \cdot \lambda)(g)$$

est une fraction rationnelle en  $\lambda \in \Lambda^{M_P}$  que l'on peut aussi noter

$$E_{\pi_\lambda}(\varphi)(g).$$

Ces séries d'Eisenstein  $E_{\pi_\lambda}(\varphi)(g)$  peuvent s'écrire comme le quotient de deux polynômes dont le second, le dénominateur, ne dépend pas de  $g \in G(\mathbb{A})$  ni de  $\varphi$  et ne s'annule pas sur la sous-variété réelle compacte  $\text{Im}[\pi]$  des représentations unitaires de  $[\pi]$ .

Nous avons maintenant rappelé tous les ingrédients nécessaires à l'énoncé du théorème suivant qui résulte de la décomposition spectrale de Langlands :

**THÉORÈME 2.3.** — *Soit un sous-groupe ouvert compact  $K = \prod_{x \in |F|} K_x$  de  $K_\emptyset = \prod_{x \in |F|} K_{x, \emptyset}$ .*

*Alors les paires de carré intégrable  $(M_P, \pi)$  telles que l'espace*

$$L_\pi^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)$$

*ne soit pas nul forment un ensemble fini de classes d'équivalence faible, si bien que l'on peut choisir un ensemble fini de paires de carré intégrable unitaires  $(M_P, \pi_0)$  qui représentent ces classes.*

*Pour toute fonction à support compact*

$$h : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

bi-invariante par  $K$ , et pour tous éléments  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ , on a

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \frac{1}{|\text{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot (h * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\bar{\varphi})(g_1)$$

où  $d\pi$  désigne la mesure de volume 1 sur chaque  $\text{Im}[\pi_0]$  qui est invariante par le tore réel compact  $\text{Im} \Lambda^{M_P}$ .

### 3. Transformation de Fourier linéaire locale : rappels

Dans cette section, on considère le groupe linéaire  $\text{GL}_r$  de rang  $r \geq 1$  sur le corps local ultramétrique  $F_x$  de la section 1. Il s'identifie à l'ouvert de Zariski des éléments inversibles de l'algèbre matricielle  $M_r$ , image réciproque de  $\text{GL}_1 = \mathbb{G}_m$  par l'homomorphisme multiplicatif  $\det : M_r \rightarrow M_1 = \mathbb{A}_1$ .

Une fonction

$$\text{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

sera appelée "fonction de Schwartz" si et seulement si elle se prolonge, de manière nécessairement unique, en une fonction localement constante à support compact

$$M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Comme l'espace des fonctions de Schwartz est stable par translation à gauche ou à droite par les éléments de  $\text{GL}_r(F_x)$ , on s'attend à pouvoir le caractériser en termes spectraux. Pour cela, on a besoin des facteurs  $L_x(\bullet, \bullet)$  locaux définis de la manière suivante par Tate dans le cas  $r = 1$ , et par Godement et Jacquet dans les cas  $r \geq 2$  :

**THÉORÈME 3.1.** — *Pour toute représentation lisse admissible irréductible  $\pi \in \{\pi\}_x^r = \{\pi\}_x^{\text{GL}_r}$ , on a :*

(i) *Les intégrales*

$$\int_{\text{GL}_r(F_x)} dg_x \cdot h_x(g_x) \cdot \varphi_x(g_x) \cdot |\det(g_x)|_x^{s + \frac{r-1}{2}}$$

*associées aux fonctions de Schwartz*

$$h_x : \text{GL}_r(F_x) \hookrightarrow M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

*et aux "coefficients matriciels" de  $\pi$*

$$\varphi_x : \text{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$



convergent absolument, pour tout  $s \in \mathbb{C}$  dont la partie réelle est assez grande, vers une fraction rationnelle en  $Z = q_x^{-s}$ .

- (ii) Ces fractions rationnelles en  $Z = q_x^{-s}$  engendrent un idéal fractionnaire qui admet un unique générateur

$$L_x(\pi, Z)$$

dont l'inverse  $L_x(\pi, Z)^{-1}$  est un polynôme en  $Z$  dont le coefficient constant est égal à 1.

Remarque. — Il résulte de la définition que

$$L_x(\pi \otimes |\det(\bullet)|_x^s, Z) = L_x(\pi, q_x^{-s} \cdot Z), \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Pour le calcul des facteurs  $L_x$  locaux, Godement et Jacquet ont prouvé :

PROPOSITION 3.2.

- (i) Pour toute représentation  $\pi \in \{\pi\}_x^r$  qui est supercuspidale, on a

$$L_x(\pi, Z) = 1$$

sauf si  $r = 1$  et  $\pi$  est un caractère non ramifié, nécessairement de la forme

$$F_x^\times \ni a_x \mapsto |a_x|_x^s,$$

auquel cas

$$L_x(\pi, Z) = \frac{1}{1 - q_x^{-s} \cdot Z}.$$

- (ii) Si  $\pi \in \{\pi\}_x^r$  est un sous-quotient de l'induite normalisée  $\text{Ind}^{\text{GL}_r}(\pi_0)$  d'une représentation lisse admissible irréductible

$$\pi_0 = \pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k$$

d'un sous-groupe de Levi standard  $\text{GL}_{\underline{r}} = \text{GL}_{r_1} \times \dots \times \text{GL}_{r_k}$  de  $\text{GL}_r$ , le polynôme

$$L_x(\pi, Z)^{-1}$$

divise le polynôme produit

$$L_x(\pi_0, Z)^{-1} = \prod_{1 \leq i \leq k} L_x(\pi_i, Z)^{-1}.$$

Il y a même égalité si  $\pi \cong \text{Ind}^{\text{GL}_r}(\pi_0)$ .

On déduit aussitôt de cette proposition :

COROLLAIRE 3.3. — Pour tout sous-groupe ouvert compact  $K \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$ , les coefficients du polynôme en  $Z$

$$L_x(\pi, Z)^{-1}$$

sont des fonctions polynomiales de  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r = \{\pi\}_{x,K}^{\mathrm{GL}_r}$  au sens de la section 1.

On montre à partir du théorème 3.1 la caractérisation spectrale suivante de l'espace des fonctions de Schwartz :

THÉORÈME 3.4. — Pour tout  $K \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$ , une fonction

$$f_x : K \backslash \mathrm{GL}_r(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}$$

est une fonction de Schwartz sur  $M_r(F_x)$  si et seulement si ses restrictions aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det(\bullet)|_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, et qu'elle se décompose spectralement sous la forme

$$f_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où

- $d\pi$  désigne comme dans la section 1 la mesure de Plancherel supportée par les représentations tempérées,
- pour tout  $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$ ,  $\pi \mapsto f_{x,\pi}(g)$  est une fonction polynomiale sur  $\{\pi\}_{x,K}^r$ ,
- pour toute  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r$ , la fonction  $g \mapsto f_{x,\pi}(g)$  sur  $\mathrm{GL}_r(F_x)$  est élément de l'espace  $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$  des coefficients matriciels de  $\pi$  bi-invariants par  $K$ ,
- $\pi^\vee = \varinjlim \pi_K^\vee$  désigne la représentation contragrédiente de toute  $\pi \in \{\pi\}_x^r$ .

Passons maintenant à la transformation de Fourier des fonctions de Schwartz sur  $M_r(F_x)$  associée au choix d'un caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi_x : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

et d'une mesure additive  $dm_x$  de  $M_r(F_x)$  :

PROPOSITION 3.5.

(i) La  $\psi_x$ -transformation de Fourier

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[ m'_x \mapsto \int_{M_r(F_x)} dm_x \cdot f_x(m_x) \cdot \psi_x(\text{Tr}(m_x m'_x)) \right]$$

définit un automorphisme de l'espace des fonctions de Schwartz.

(ii) Il existe une unique mesure invariante  $dm_x$  (dite autoduale) pour laquelle l'automorphisme réciproque est la  $\overline{\psi}_x$ -transformation de Fourier.

(iii) Pour toute fonction de Schwartz  $f_x : M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$  et tout élément  $g \in \text{GL}_r(F_x)$ , on a

$$\begin{aligned} \widehat{f}_x^g &= |\det(g)|_x^{-r} \cdot g^{-1} \widehat{f}_x ; \\ {}^g \widehat{f}_x &= |\det(g)|_x^{-r} \cdot \widehat{f}_x^{g^{-1}} . \end{aligned}$$

La compatibilité ci-dessus de la  $\psi_x$ -transformation de Fourier avec les translations à gauche et à droite entraîne qu'elle admet une décomposition spectrale qui, d'après le théorème 3.4 ci-dessus combiné avec le théorème 1.8, a nécessairement la forme suivante :

THÉORÈME 3.6. — Il existe une unique façon d'associer à toute représentation lisse admissible irréductible  $\pi \in \{\pi\}_x^r$  un monôme en  $Z$  (c'est-à-dire le produit d'une constante et d'une puissance positive ou négative de  $Z$ )

$$\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$$

de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(1) Pour toute  $\pi \in \{\pi\}_x^r$  et tout  $s \in \mathbb{C}$ , on a

$$\varepsilon_x(\pi \otimes |\det(\bullet)|_x^s, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\pi, \psi_x, q_x^{-s} \cdot Z) .$$

(2) Pour tout sous-groupe ouvert compact  $K \subset \text{GL}_r(F_x)$ , l'unique coefficient du monôme

$$\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$$

et son inverse sont des fonctions polynomiales de  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r$ .

(3) Le facteur

$$\gamma_x(\pi, \psi_x, Z) = \frac{L_x(\pi, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right)}$$

ne dépend que du support supercuspidal de  $\pi$ .

Plus précisément, si celui-ci consiste en une représentation supercuspidale  $\pi_0 = \pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k$  d'un sous-groupe de Levi  $\text{GL}_{\underline{r}} = \text{GL}_{r_1} \times \dots \times \text{GL}_{r_k}$  de  $\text{GL}_r$ , le facteur

$$\gamma_x(\pi, \psi_x, Z)$$

est égal au produit

$$\gamma_x(\pi_0, \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq k} \gamma_x(\pi_i, \psi_x, Z).$$

(4) Pour tout  $K \subset \text{GL}_r(F_x)$  et toute fonction de Schwartz sur  $M_r(F_x)$

$$f_x : K \backslash \text{GL}_r(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}$$

décomposée spectralement sous la forme du théorème 3.4

$$f_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(g) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall g \in \text{GL}_r(F_x),$$

sa  $\psi_x$ -transformée de Fourier  $\widehat{f}_x$  est donnée par la décomposition spectrale

$$\begin{aligned} \widehat{f}_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(g^{-1}) \\ \cdot L_x\left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall g. \end{aligned}$$

Remarques.

- (i) On rappelle que si  $f_{x,\pi} : K \backslash \text{GL}_r(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}$  est élément de l'espace  $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$  des coefficients matriciels de  $\pi$ , alors  $g \mapsto f_{x,\pi}(g^{-1})$  est élément de l'espace  $\pi_K \boxtimes \pi_K^\vee$  des coefficients matriciels de  $\pi^\vee$ .
- (ii) Les facteurs  $\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$  et  $\gamma_x(\pi, \psi_x, Z)$  sont définis ici comme les inverses de ceux habituellement désignés dans la littérature par ces notations. De cette façon, les  $\gamma_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$  sont les valeurs propres de l'opérateur de transformation de Fourier agissant sur les espaces des coefficients matriciels des représentations  $\pi$ , et les  $\varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$  sont des facteurs de ces valeurs propres.

La propriété (3) du théorème 3.6 ci-dessus ramène le calcul des facteurs

$$\gamma_x(\pi, \psi_x, Z) = \frac{L_x(\pi, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right)}$$

des représentations lisses admissibles irréductibles  $\pi \in \{\pi\}_x^r$  des groupes linéaires  $\text{GL}_r(F_x)$  au cas des représentations supercuspidales. Dans ce cas, les facteurs  $L_x(\pi, Z)$  sont donnés par la proposition 3.2(i). Le calcul des

facteurs  $\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$  est plus subtil en général. On a cependant une formule simple dans le cas des caractères non ramifiés de  $F_x^\times$  :

LEMME 3.7. — *Pour tout caractère non ramifié  $\chi : F_x^\times / O_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , nécessairement de la forme*

$$F_x^\times \ni a_x \mapsto |a_x|_x^s,$$

on a

$$\varepsilon_x(\chi, \psi_x, Z) = (q_x^{-s} Z)^{N_{\psi_x}}$$

où

$$N_{\psi_x} = \min \{ N \in \mathbb{Z} \mid \psi_x \text{ trivial sur } \{ a_x \in F_x \mid |a_x|_x \leq q_x^{-N} \} \}$$

désigne le “conducteur” du caractère non trivial  $\psi_x : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$ .

Nous allons enfin donner deux classes de cas où le calcul des facteurs  $\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$  et  $L_x(\pi, Z)$  des représentations  $\pi \in \{\pi\}_x^r$  se ramène simplement au cas du rang  $r = 1$  : le cas des représentations non ramifiées  $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^r$ , et celui des représentations “très ramifiées”  $\pi \cdot \omega = \pi \otimes (\omega \circ \det)$  produits d’une représentation de ramification bornée et d’un caractère  $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  assez ramifié en fonction de cette borne.

Le groupe déployé  $GL_r$  admet pour tore maximal le tore diagonal  $T_r = \mathbb{G}_m^r$ , et son groupe de Weyl  $W^G = W_x^G$  est le groupe  $\mathfrak{S}_r$  des permutations de  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Il résulte du théorème I.6(ii) que se donner une représentation non ramifiée  $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^r$  équivaut à se donner une famille de  $r$  caractères non ramifiés

$$\chi_\pi^i : F_x^\times / O_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad 1 \leq i \leq r,$$

bien définis à l’ordre près.

On peut maintenant énoncer :

THÉORÈME 3.8.

- (i) (Godement, Jacquet) *Pour toute représentation non ramifiée  $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^r$ , on a*

$$L_x(\pi, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} L_x(\chi_\pi^i, Z)$$

et

$$\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_x(\chi_\pi^i, \psi_x, Z).$$

(ii) (Jacquet, Shalika) Si  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r$  pour un certain  $K \subset \text{GL}_r(F_x)$  et  $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  est un caractère continu assez ramifié en fonction de  $K$ , on a

$$L_x(\pi \cdot \omega, Z) = 1$$

et

$$\varepsilon_x(\pi \cdot \omega, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_\pi \cdot \omega, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega, \psi_x, Z)^{r-1}$$

où  $\chi_\pi : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  désigne le caractère central de  $\pi$ .

#### 4. Transformation de Fourier linéaire globale et formule de Poisson associée : derniers rappels

Dans cette section, on considère le groupe linéaire  $\text{GL}_r$  de rang  $r \geq 1$ , ainsi que l'espace matriciel  $M_r$  qui le contient, sur le corps de fonctions  $F$  de corps des constantes  $\mathbb{F}_q$  de la section 2.

Notant toujours  $\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$  l'anneau topologique des adèles de  $F$ , une fonction globale

$$\text{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

sera appelée "fonction de Schwartz" si et seulement si elle se prolonge, de manière nécessairement unique, en une fonction localement constante à support compact

$$M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Les fonctions de Schwartz globales sont exactement les combinaisons linéaires de produits

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$$

de fonctions de Schwartz locales

$$f_x : \text{GL}_r(F_x) \hookrightarrow M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

presque toutes égales aux fonctions caractéristiques  $\mathbb{1}_{M_r(O_x)}$  des parties ouvertes compactes  $M_r(O_x) \subset M_r(F_x)$ , qu'on peut appeler les fonctions de Schwartz locales standard.

On rappelle que le plongement diagonal  $F \hookrightarrow \mathbb{A}$  fait de  $F$  un sous-groupe discret de  $\mathbb{A}$  et que le quotient  $\mathbb{A}/F$  est compact.

Choisissons une fois pour toutes un caractère additif continu non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui est trivial sur le sous-groupe discret cocompact  $F$ . Ce caractère est nécessairement unitaire, ainsi que ses composantes

$$\psi_x : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times .$$

En toute place  $x \in |F|$ , munissons  $M_r(F_x)$  de la mesure “autoduale”  $dm_x$  de la proposition 3.5(ii), pour laquelle l’automorphisme réciproque de la  $\psi_x$ -transformation de Fourier des fonctions de Schwartz sur  $M_r(F_x)$  est la  $\bar{\psi}_x$ -transformation de Fourier. Puis munissons  $M_r(\mathbb{A})$  de la mesure additive produit

$$dm = \bigotimes_{x \in |F|} dm_x .$$

La  $\psi$ -transformation de Fourier des fonctions de Schwartz globales

$$f \mapsto \hat{f} = \left[ m' \mapsto \int_{M_r(\mathbb{A})} dm \cdot f(m) \cdot \psi(\text{Tr}(mm')) \right]$$

envoie chaque  $\bigotimes_{x \in |F|} f_x$  sur  $\bigotimes_{x \in |F|} \hat{f}_x$ . Elle définit donc un automorphisme de l’espace des fonctions de Schwartz globales, et son automorphisme réciproque est la  $\bar{\psi}$ -transformation de Fourier.

On montre que les caractères

$$\mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

sont exactement les

$$\mathbb{A} \ni a \mapsto \psi(\gamma \cdot a), \quad \gamma \in F,$$

et que le volume du quotient compact  $\mathbb{A}/F$  pour la mesure “autoduale”  $dm$  est 1.

On en déduit la formule de Poisson adélique de Tate :

**THÉORÈME 4.1.** — *Pour toute fonction de Schwartz globale*

$$f : M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on a

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in M_r(F)} \hat{f}(\gamma).$$

Pour toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de  $\text{GL}_r(\mathbb{A})$ , on pose

$$L(\pi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\pi_x, Z^{\text{deg}(x)})$$

qui est bien définie a priori en tant que série formelle en  $Z$ . En presque toute place  $x \in |F|$ , le facteur local  $\pi_x$  de  $\pi$  est une représentation non ramifiée et le conducteur  $N_{\psi_x}$  de la composante locale  $\psi_x$  de  $\psi$  vaut 0 si bien que, d'après le théorème 3.8(i) et le lemme 3.7, on a  $\varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z) = 1$ . Il en résulte que le produit

$$\varepsilon(\pi, \psi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z^{\deg(x)})$$

est bien défini en tant que monôme en  $Z$ .

Tate en rang  $r = 1$ , puis Godement et Jacquet en rang  $r \geq 2$ , ont montré que la formule de Poisson du théorème 4.1 ci-dessus implique :

**THÉORÈME 4.2.** — *Pour toute représentation automorphe cuspidale  $\pi = \otimes_{x \in |F|} \pi_x$  de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , on a :*

(i) *Le produit*

$$L(\pi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\pi_x, q_x^{-s})$$

*est absolument convergent dès que la partie réelle  $\mathrm{Re}(s)$  de  $s \in \mathbb{C}$  est assez grande.*

(ii) *La fonction holomorphe que ce produit définit dans sa zone de convergence se prolonge analytiquement à  $\mathbb{C}$  tout entier. C'est même une fraction rationnelle en  $q^{-s}$ .*

(iii) *Cette fraction rationnelle satisfait l'équation fonctionnelle*

$$L(\pi^\vee, q^{-(1-s)}) = L(\pi, q^{-s}) \cdot \varepsilon(\pi, \psi, q^{-s}).$$

(iv) *Elle n'admet de pôles que si  $r = 1$  et  $\pi$  est un caractère automorphe  $\mathbb{A}^\times/F^\times \rightarrow \mathbb{C}$  de la forme*

$$a \mapsto |a|^{s_0}, \quad \text{avec } s_0 \in \mathbb{C},$$

*et, dans ce cas, elle a exactement deux pôles simples en les points  $q^{s_0}$  et  $q^{s_0-1}$ .*

*Remarque.* — Dans l'équation fonctionnelle globale de (iii), le facteur  $\varepsilon(\pi, \psi, q^{-s})$  est de l'autre côté du côté habituel puisque, comme expliqué dans la remarque (ii) qui suit le théorème 3.6, les facteurs  $\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$  sont les inverses de ceux désignés habituellement par cette notation.

Pour toute représentation automorphe irréductible  $\pi = \otimes_{x \in |F|} \pi_x$  de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , il existe d'après le théorème 2.2(ii) de Langlands une partition  $r = r_1 + \dots + r_k$  du rang  $r$  et des représentations automorphes cuspidales  $\pi_1 = \otimes_{x \in |F|} \pi_{1,x}, \dots, \pi_k = \otimes_{x \in |F|} \pi_{k,x}$  de  $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}), \dots, \mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$



telles que  $\pi$  se réalise comme un sous-quotient de l'induite normalisée  $\text{Ind}^{\text{GL}_r}(\pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k)$ . De plus, la ramification de  $\pi_{1,x}, \dots, \pi_{k,x}$  en n'importe quelle place  $x \in |F|$  est bornée en fonction de celle de  $\pi_x$  et, en particulier,  $\pi_{1,x}, \dots, \pi_{k,x}$  sont non ramifiées si  $\pi_x$  est non ramifiée.

D'après la proposition 3.2(ii) et le théorème 3.8(i), la fraction rationnelle en n'importe quelle place  $x \in |F|$

$$L_x(\pi_x, Z)$$

est le produit de la fraction rationnelle

$$\prod_{1 \leq i \leq k} L_x(\pi_{i,x}, Z)$$

et d'un polynôme en  $Z$  qui vaut 1 lorsque  $\pi_x$  et donc aussi les  $\pi_{i,x}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , sont non ramifiées.

De plus, d'après la propriété (3) du théorème 3.6, on a en toute place  $x \in |F|$

$$L_x(\pi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z) = L_x\left(\pi_x^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right) \cdot \prod_{1 \leq i \leq k} \gamma_x(\pi_{i,x}, \psi_x, Z)$$

où, pour  $1 \leq i \leq k$ ,

$$L_x(\pi_{i,x}, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi_{i,x}, \psi_x, Z) = \gamma_x(\pi_{i,x}, \psi_x, Z) \cdot L_x\left(\pi_{i,x}^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right).$$

Si enfin le facteur  $\pi_x$  de  $\pi$  en au moins une place  $x$  est le produit

$$\pi_x = \pi'_x \cdot \omega_x = \pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det)$$

d'une représentation  $\pi'_x \in \{\pi\}_{x, K_x}^r$  de ramification bornée par un  $K_x \subset \text{GL}_r(F_x)$  et d'un caractère  $\omega_x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  assez ramifié en fonction de la borne  $K_x$ , alors les  $\pi_{i,x}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , sont elles-mêmes les produits

$$\pi_{i,x} = \pi'_{i,x} \cdot \omega_x$$

d'une représentation  $\pi'_{i,x} \in \{\pi\}_x^r$  de ramification bornée en fonction de  $K_x$  et du caractère  $\omega_x$ . Cela exclut qu'aucune des représentations automorphes  $\pi_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , soit un caractère de  $\mathbb{A}^\times/F^\times$  de la forme  $a \mapsto |a|^{s_0}$  avec  $s_0 \in \mathbb{C}$ .

On déduit de ces considérations le corollaire suivant du théorème 4.2 :

**COROLLAIRE 4.3.** — *Toute représentation automorphe irréductible  $\pi = \otimes_{x \in |F|} \pi_x$  de  $\text{GL}_r(\mathbb{A})$  vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème 4.2. Si de plus le facteur  $\pi_x$  de  $\pi$  en au moins une place  $x$  est le produit*

$$\pi_x = \pi'_x \cdot \omega_x$$

d'une représentation  $\pi'_x \in \{\pi\}_x^r$  de ramification bornée et d'un caractère  $\omega_x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  assez ramifié en fonction de cette borne, la fonction  $L$  globale de  $\pi$

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\pi, q^{-s})$$

n'a pas de pôle.

### 5. Expression multiplicative de la fonctionnelle de Poisson linéaire

Dans cette section comme dans la précédente, on considère le groupe linéaire  $GL_r$  de rang  $r \geq 1$  sur le corps de fonctions  $F$  muni d'un caractère additif continu non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^\times .$$

Les théorèmes 3.4 et 3.6 ont donné en toute place  $x \in |F|$  une expression purement multiplicative – c'est-à-dire qui ne fait apparaître que  $GL_r(F_x)$  et sa loi de groupe, en oubliant le plongement de  $GL_r(F_x)$  dans l'espace linéaire  $M_r(F_x)$  – de l'espace des fonctions de Schwartz

$$GL_r(F_x) \hookrightarrow M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et de la  $\psi_x$ -transformation de Fourier dans cet espace.

On en déduit aussitôt une expression purement multiplicative de l'espace des fonctions de Schwartz globales

$$GL_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et de la  $\psi$ -transformation de Fourier dans cet espace.

Le but de cette section est de donner une expression purement multiplicative de la fonctionnelle de Poisson de l'espace des fonctions de Schwartz globales  $f : GL_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$  introduite dans le théorème 4.1

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) .$$

Autrement dit, nous voudrions exprimer cette fonctionnelle sous une forme qui fasse intervenir seulement  $GL_r(\mathbb{A})$ , sa loi de groupe et son sous-groupe discret  $GL_r(F)$ .

Commençons par remarquer qu'il n'y a rien à faire lorsque  $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$  est un produit dont l'un au moins des facteurs  $f_x : GL_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$  est très ramifié comme dans le lemme ci-dessous :

LEMME 5.1. — En une place  $x \in |F|$ , considérons une fonction de Schwartz

$$f_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \hookrightarrow M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la décomposition spectrale

$$f_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_x^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

ne fait intervenir non trivialement que des représentations de la forme

$$\pi = \pi' \cdot \omega = \pi' \otimes (\omega \circ \det)$$

où  $\pi' \in \{\pi\}_{x,K}^r$  pour un certain sous-groupe ouvert compact  $K \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$  et  $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  est un caractère assez ramifié en fonction de  $K$ .

Alors la fonction  $f_x$  est supportée par une partie compacte de  $\mathrm{GL}_r(F_x)$  et il en est de même de sa transformée de Fourier  $\widehat{f}_x$ .

Remarque. — L'hypothèse est vérifiée en particulier si  $f_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$  est le produit

$$f_x = f'_x \cdot \omega = f'_x \cdot (\omega \circ \det)$$

d'une fonction  $f'_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$  invariante à gauche ou à droite par  $K$  et d'un caractère  $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  assez ramifié en fonction de  $K$ .

Démonstration. — Cela résulte du théorème 3.8(ii) de Jacquet et Shalika qui assure que toute les représentations  $\pi \in \mathrm{Im}\{\pi\}_x^r$  qui apparaissent non trivialement dans la décomposition spectrale de  $f_x$ , et donc aussi de  $\widehat{f}_x$ , vérifient

$$L_x(\pi, Z) = 1 \quad \text{et} \quad L_x(\pi^\vee, Z) = 1. \quad \square$$

On déduit de ce lemme :

COROLLAIRE 5.2. — Pour toute fonction de Schwartz produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont un facteur  $f_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$  au moins vérifie l'hypothèse du lemme 5.1 ci-dessus, la formule de Poisson du théorème 4.1 se réduit à

$$\sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma).$$

Dans le cas général d'une fonction de Schwartz arbitraire

$$f : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on a besoin de la définition suivante :

DÉFINITION 5.3. — Soit  $x_0$  une place de  $F$ . Soit  $f_{x_0} : \mathrm{GL}_r(F_{x_0}) \hookrightarrow M_r(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de Schwartz sphérique, c'est-à-dire bi-invariante par  $\mathrm{GL}_r(O_{x_0})$ , et dont la décomposition spectrale s'écrit

$$f_{x_0}(\bullet) = |\det(\bullet)|_{x_0}^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x,\emptyset}^r} d\pi \cdot f_{x_0,\pi}(\bullet) \cdot L_{x_0}\left(\pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Alors, pour tous  $N, N' \in \mathbb{N}$ , on note

$$f_{x_0}^{N,N'} : \mathrm{GL}_r(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

la fonction de Schwartz définie par l'expression spectrale

$$f_{x_0}^{N,N'}(\bullet) = |\det(\bullet)|_{x_0}^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x,\emptyset}^r} d\pi \cdot f_{x_0,\pi}(\bullet) \cdot L_{x_0}\left(\pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où  $I_{x_0}^N(\pi, Z)$  désigne le polynôme en  $Z$  et  $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^r$  produit de

$$L_{x_0}(\pi, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré  $N$  qui apparaît dans le développement en série formelle en  $Z$  de l'inverse

$$L_{x_0}(\pi, Z).$$

Remarques.

- (i) Comme le polynôme  $L_{x_0}(\pi, Z)^{-1}$  divise les  $I_{x_0}^N(\pi, Z)$  par construction, les fonctions  $f_{x_0}^{N,N'}$ ,  $N, N' \in \mathbb{N}$ , et leurs transformées de Fourier  $\widehat{f_{x_0}^{N,N'}}$  sont éléments de l'algèbre  $\mathcal{H}_{x_0,\emptyset}^r$ . Autrement dit, elles sont supportées par des parties compactes de  $\mathrm{GL}_r(F_{x_0})$ .
- (ii) On a pour toute  $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^r$  l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_{x_0}^N(\pi, Z) = 1$$

dans l'anneau des séries formelles en  $Z$ . De plus, les sommes

$$\sum_{N \geq N_0} \left| I_{x_0}^N\left(\pi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \right|$$

convergent uniformément vers 0 si  $\pi \in \mathrm{Im}\{\pi\}_{x,\emptyset}^r$  et  $N_0$  devient arbitrairement grand. On en déduit que, pour tout  $g \in \mathrm{GL}_r(F_{x_0})$ , on a

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} f_{x_0}^{N,N'}(g) = f_{x_0}(g).$$

Pour tout élément  $z_0 \in \mathbb{C}$ , toute fraction rationnelle  $R \in \mathbb{C}(Z)$  à coefficients complexes s'écrit de manière unique comme une somme

$$R = R_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{a_i}{(Z - z_0)^i}$$

où les  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , sont des constantes et  $R_0$  est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas en  $z_0$ . On peut appeler  $R_0(z_0)$  la "valeur régularisée" de  $R$  au point  $z_0$ .

Cela permet d'énoncer le théorème suivant qui est le résultat principal de cette section :

THÉORÈME 5.4. — *Soit une fonction de Schwartz produit*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

et soit  $x_0$  une place de  $F$  en laquelle le facteur local  $f_{x_0}$  de  $f$  est sphérique. Alors :

(i) *La série formelle*

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

*est une fraction rationnelle en  $Z$ .*

(ii) *La "valeur régularisée"  $S(f)$  de cette fraction rationnelle au point  $Z = 1$  ne dépend pas du choix de la place  $x_0$ .*

(iii) *On a*

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \left( \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} f(\gamma) \right) + \left( \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \hat{f}(\gamma) \right) - S(f)$$

*si bien que la formule de Poisson du théorème 4.1 s'écrit encore*

$$S(f) = S(\hat{f}).$$

*Démonstration.* — Elle va occuper toute la suite de cette section.

Elle est fondée sur le théorème de décomposition spectrale de Langlands pour le groupe linéaire  $\mathrm{GL}_r$ . Celui-ci est muni du sous-groupe de Borel  $B_r$  des matrices triangulaires supérieures et du tore maximal  $T_r = \mathbb{G}_m^r$  des matrices diagonales. Les sous-groupes paraboliques standard  $P = P_{\underline{r}} = \mathrm{GL}_{\underline{r}} \cdot N_{\underline{r}}$  et les sous-groupes de Levi standard  $M_P = \mathrm{GL}_{\underline{r}}$  de  $\mathrm{GL}_r$  correspondent aux partitions  $\underline{r} = (r = r_1 + \dots + r_k)$  du rang  $r$ . Le tore complexe  $\Lambda^{M_P}$  associé à un tel sous-groupe de Levi standard  $M_P = \mathrm{GL}_{\underline{r}} = \mathrm{GL}_{r_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{r_k}$  est canoniquement isomorphe à  $(\mathbb{C}^\times)^k$ .

Considéran t un sous-groupe ouvert compact

$$K = \prod_{x \in |F|} K_x \subset \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{\mathbb{A}}),$$

on choisit un ensemble fini de représentants  $(M_P, \pi_0)$  des classes d'équivalence faible de paires de carré intégrable unitaires  $(\mathrm{GL}_r, \pi)$  telles que l'espace  $L^2_{\pi}(\mathrm{GL}_r(F) \cdot N_r(\mathbb{A}) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/K)$  ne soit pas réduit à 0.

Pour toute fonction à support compact

$$h : K \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/K \rightarrow \mathbb{C},$$

tout représentant  $(M_P, \pi_0)$  et tous éléments  $\pi \in [\pi_0]$ ,  $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , on note

$$h_{\pi}(g_1, g_2) = \frac{1}{|\mathrm{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)} (h * E_{\pi}(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^{\vee}}(\bar{\varphi})(g_1).$$

Cette expression ne dépend pas du choix de la base orthonormée finie  $\mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)$  de l'espace  $L^2_{\pi_0}(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/K)$ , et elle est invariante par l'action du groupe fini  $\mathrm{Fixe}(M_P, \pi_0)$  sur  $[\pi_0]$ .

Le théorème 2.3 de décomposition spectrale appliqué à une telle fonction  $h$  dit que, pour tous  $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , on a

$$\sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi}(g_1, g_2).$$

On commence la démonstration du théorème 5.4 par le lemme suivant :

LEMME 5.5. — *Supposons que la fonction de Schwartz globale produit*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

est bi-invariante par  $K = \prod_{x \in |F|} K_x$  avec  $K_{x_0} = \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{x_0})$ .

En chaque place  $x \in |F|$ , considérons la décomposition spectrale de  $f_x$  donnée par le théorème 3.4

$$f_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x, K_x}^r} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^{\vee}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et définissons une fonction

$$h_x : K_x \backslash \mathrm{GL}_r(F_x)/K_x \rightarrow \mathbb{C}$$

par la décomposition spectrale

$$h_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x, K_x}^r} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet).$$

Alors :

(i) La fonction  $h_x$  est la fonction caractéristique  $\mathbb{1}_{\mathrm{GL}_r(O_x)}$  en toute place  $x$  où  $f_x$  est la fonction de Schwartz standard  $\mathbb{1}_{M_r(O_x)}$ .

En les autres places,  $h_x$  n'est pas nécessairement à support compact mais elle agit sur chaque classe de  $\{\pi\}_{x,K_x}^r$  comme un élément de  $\mathcal{H}_{x,K}^r$ .

Par conséquent,  $h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x$  agit sur chaque classe  $[\pi_0]$  de représentations automorphes comme un élément de  $\mathcal{H}_K^r$ .

(ii) Pour tout réel  $s$  assez grand, tous entiers  $N, N' \in \mathbb{N}$  et tous éléments  $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \left( f_{x_0}^{N,N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2) \\ &= \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L \left( (\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s})^\vee, q^{-\frac{1}{2}} \right) \\ & \quad \cdot I_{x_0}^N \left( \pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot I_{x_0}^{N'} \left( (\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s})^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

où, pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$  et tout  $\pi \in [\pi_0]$ , on note encore

$$h_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\mathrm{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)} (h * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\bar{\varphi})(g_1).$$

*Démonstration.*

(i) résulte de ce que les  $f_{x,\pi}(\bullet)$  sont des fonctions polynomiales de  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r$ .

(ii) résulte du théorème 2.3 et de ce que la restriction de  $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$  et donc  $f_{x_0}^{N,N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right)$  à chaque fibre de l'homomorphisme

$$|\det(\bullet)| : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow q^{\mathbb{Z}}$$

est supportée par une partie compacte. □

Pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$ , les fractions rationnelles

$$[\pi_0] \ni \pi \mapsto E_\pi(\varphi)(g_1), \quad \varphi \in L_{\pi_0}^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/K),$$

ou

$$\pi \mapsto h * E_\pi(\varphi)(g_2)$$

admettent un dénominateur indépendant de  $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , invariant par l'action de  $\Lambda^{\mathrm{GL}_r}$  et qui ne s'annule pas sur  $\mathrm{Im}[\pi_0]$  ni donc sur  $\Lambda^{\mathrm{GL}_r}$ .  $\mathrm{Im}[\pi_0] = \{\pi \otimes |\det(\bullet)|^s, \pi \in \mathrm{Im}[\pi_0], s \in \mathbb{C}\}$ .

Prouvons maintenant :

LEMME 5.6. — Pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$  et tous entiers  $N, N' \in \mathbb{N}$ , les produits

$$L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

sont des polynômes en  $\pi \in [\pi_0]$ .

A fortiori, et pour tous  $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , les pôles des fractions rationnelles

$$\begin{aligned} h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left((\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s})^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \cdot I_{x_0}^{N'}\left((\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s})^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

ne rencontrent pas le fermé  $\Lambda^{\mathrm{GL}_r} \cdot \mathrm{Im} [\pi_0]$  de  $[\pi_0]$ .

Démonstration. — Par construction, les polynômes  $I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$  et  $I_{x_0}^{N'}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$  sont des multiples des polynômes  $L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$  et  $L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ . Il suffit donc de vérifier que la multiplication par le produit

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

fait disparaître les pôles de la fraction rationnelle

$$L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Or, si  $\pi$  est un sous-quotient de l'induite normalisée de représentations automorphes cuspidales  $\pi_1, \dots, \pi_k$  de  $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}), \dots, \mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$  avec  $r = r_1 + \dots + r_k$ , on a

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) = \prod_{1 \leq i \leq k} L_{x_0}\left((\pi_i)_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) = \prod_{1 \leq i \leq k} L_{x_0}\left((\pi_i)_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right),$$

et  $L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right)$  est le produit de  $\prod_{1 \leq i \leq k} L\left(\pi_i^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right)$  et d'un polynôme en  $\pi$ .

On est donc ramené au cas où  $\pi_0$  et les  $\pi \in [\pi_0]$  sont des représentations automorphes cuspidales.

Alors  $L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right)$  est un polynôme en  $\pi$ , sauf si  $r = 1$  et  $\pi_0$  est un caractère automorphe  $\mathbb{A}^\times/F^\times \rightarrow \mathbb{C}$  de la forme  $a \mapsto |a|^{s_0}$  avec  $s_0 \in \mathbb{C}$ . Dans ce dernier cas, il y a deux pôles simples, et ils sont éliminés par le produit  $L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ . □



On déduit aussitôt de ce corollaire :

COROLLAIRE 5.7. — *Pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$ , tout réel  $s$ , tous entiers  $N, N' \in \mathbb{N}$  et tous éléments  $g_1, g_2 \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$ , l'intégrale*

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\left(\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}\right)^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\left(\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s}\right)^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

est bien définie et indépendante de  $s$ , donc égale à

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Par combinaison avec le lemme 5.5(ii), on obtient :

COROLLAIRE 5.8. — *Pour tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  de module  $|z|$  assez petit, et pour tous éléments  $g_1, g_2 \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$ , la série*

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2)$$

est convergente.

Elle est égale à la somme sur les représentants  $(M_P, \pi_0)$  des intégrales

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

La partie (i) du théorème 5.4 résulte alors du lemme suivant :

LEMME 5.9. — *Pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$  et pour tous éléments  $g_1, g_2 \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$ , l'intégrale bien définie si  $|z|$  est assez petit*

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

est une fraction rationnelle en  $z$ .

Démonstration. — Si  $M_P = \text{GL}_{r_1} \times \dots \times \text{GL}_{r_k}$ , la variété algébrique complexe  $[\pi_0]$  s'identifie à un ouvert de Zariski de  $(\mathbb{C}^\times)^k$  et sa sous-variété algébrique réelle  $\text{Im}[\pi_0]$  s'identifie au sous-tore unitaire  $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{C}^\times)^k \mid |\lambda_1| = \dots = |\lambda_k| = 1\}$ .

Le produit

$$L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

est un polynôme en  $\pi$ , c'est-à-dire en  $\lambda_1^{\pm 1}, \dots, \lambda_k^{\pm 1}$ .

Il existe des nombres complexes  $z_{i,j} \in \mathbb{C}^\times$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq r'_i \leq r_i$ , tels que, pour toute  $\pi \in [\pi_0]$  paramétrée par  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{C}^\times)^k$ , on ait

$$L_{x_0}(\pi_{x_0}, Z) = \prod_{1 \leq i \leq k} \prod_{1 \leq j \leq r'_i} \frac{1}{1 - \lambda_i^{\deg(x_0)} \cdot Z \cdot z_{i,j}},$$

$$L_{x_0}(\pi_{x_0}^\vee, Z) = \prod_{1 \leq i \leq k} \prod_{1 \leq j \leq r'_i} \frac{1}{1 - \lambda_i^{-\deg(x_0)} \cdot Z \cdot \bar{z}_{i,j}}.$$

L'expression

$$h_\pi(g_1, g_2)$$

est une fraction rationnelle en  $\pi$ , c'est-à-dire en  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , dont le dénominateur est un produit de facteurs de la forme

$$1 - \lambda_i \cdot \lambda_{i'}^{-1} \cdot z_0$$

pour des  $z_0 \in \mathbb{C}^\times$  tels que  $|z_0| \neq 1$ .

Enfin, la mesure  $d\pi$  sur  $\text{Im}[\pi_0]$  n'est autre que la mesure invariante de volume 1

$$d\lambda_1 \dots d\lambda_k$$

sur le produit des  $k$  cercles unités dans  $(\mathbb{C}^\times)^k$ .

Le lemme s'en déduit par déplacement des contours d'intégration, par exemple dans la direction

$$|\lambda_1| \mapsto 0, \dots, |\lambda_k| \mapsto 0,$$

et calcul des résidus. □

On remarque au passage :

PROPOSITION 5.10. — Soit  $(M_P, \pi_0)$  un représentant tel que  $\pi_0$  soit une représentation automorphe cuspidale de  $M_P(\mathbb{A}) = \text{GL}_{r_1}(\mathbb{A}) \times \dots \times \text{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$ .

Alors les intégrales

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

sont partout bien définies dans le demi-tore  $|z| \leq 1$ .

Les fractions rationnelles en  $z$  associées n'ont pas de pôle qui rencontre la zone  $|z| \leq 1$ , et leur valeur en  $z = 1$  est

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

*Démonstration.* — Avec les notations de la preuve du lemme 5.9 ci-dessus, la fraction rationnelle en  $z$  et  $\pi \in [\pi_0]$  paramétré par  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{C}^\times)^k$

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

s'écrit

$$\prod_{1 \leq i \leq k} \prod_{1 \leq j \leq r'_i} \frac{1}{\left(1 - \lambda_i^{\deg(x_0)} \cdot z \cdot z_{ij} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \left(1 - \lambda_i^{-\deg(x_0)} \cdot z \cdot \bar{z}_{i,j} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)}.$$

Or, comme  $\pi_0$  est une représentation automorphe cuspidale unitaire, on sait d'après Jacquet et Shalika (et sans qu'il soit nécessaire d'invoquer la conjecture de Ramanujan-Petersson) que, pour tous indices  $i, j$ ,

$$q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} < |z_{ij}| < q_{x_0}^{\frac{1}{2}}.$$

D'où les conclusions de la proposition. □

Considérons maintenant la  $\psi$ -transformée de Fourier  $\widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x$  de  $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$ . En toute place  $x \in |F|$ , les décompositions spectrales de  $f_x$  et  $\widehat{f}_x$

$$f_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im} \widehat{A}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\widehat{f}_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im} \widehat{A}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot \widehat{f}_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

sont reliées par les formules

$$\widehat{f}_{x,\pi^\vee}(g) = f_{x,\pi}(g^{-1}) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \pi.$$

On définit en toute place  $x \in |F|$  une fonction

$$\widehat{h}_x : K_x \backslash \text{GL}_r(F_x) / K_x \rightarrow \mathbb{C}$$

par la décomposition spectrale

$$\widehat{h}_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot \widehat{f}_{x,\pi}(\bullet),$$

puis on forme le produit global

$$\widehat{h} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{h}_x$$

et on pose pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$ , tout  $\pi \in [\pi_0^\vee]$  et tous éléments  $g_1, g_2 \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$

$$\widehat{h}_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0^\vee)} (\widehat{h} * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\overline{\varphi})(g_1).$$

D'après le corollaire 5.8 appliqué à  $\widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x$ , la série

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \left( \widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2)$$

est convergente si le module  $|z|$  de  $z \in \mathbb{C}$  est assez petit, et elle est égale à la somme sur les représentants  $(M_P, \pi_0)$  des intégrales

$$\int_{\text{Im}[\pi_0^\vee]} d\pi \cdot \widehat{h}_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Or, d'après les équations fonctionnelles

$$\widehat{f}_{x, \pi^\vee}(g) = f_{x, \pi}(g^{-1}) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \pi \in \{\pi\}_{x, K}^r, \quad \forall x \in |F|,$$

on a :

LEMME 5.11. — *Pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$ , tout élément  $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$  de  $[\pi_0]$  et tous  $g_1, g_2 \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$ , on a*

$$|\det(g_2^{-1} g_1)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1) = |\det(g_1^{-1} g_2)|^{-\frac{r}{2}} \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot \varepsilon\left(\pi, \psi, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Puis on déduit de ce lemme :

COROLLAIRE 5.12.

(i) *Pour tous éléments  $g_1, g_2 \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$ , tout représentant  $(M_P, \pi_0)$  et tout  $z \in \mathbb{C}$ , les intégrales*

$$|\det(g_1^{-1} g_2)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et

$$\begin{aligned}
 & |\det(g_2^{-1}g_1)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im}[\pi_0^\vee]} d\pi \cdot \widehat{h}_\pi(g_2, g_1) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\
 & \quad \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\
 & \quad \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)
 \end{aligned}$$

sont égales.

(ii) Les fractions rationnelles développées en séries formelles

$$\begin{aligned}
 & |\det(g_1^{-1}g_2)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \\
 & \quad \cdot \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & |\det(g_2^{-1}g_1)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \\
 & \quad \cdot \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \left( \widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g_2^{-1} \gamma g_1)
 \end{aligned}$$

sont égales.

En particulier, elles ont la même valeur régularisée en  $Z = 1$ .

*Démonstration.* — (i) résulte du lemme 5.11 et des équations fonctionnelles globales

$$L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) = L\left(\pi, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon\left(\pi, \psi, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

(ii) résulte de (i). □

Lorsque  $g_1 = g_2 = 1$ , on note  $S(f)$  et  $S(\widehat{f})$  les “valeurs régularisées” en  $Z = 1$  des fractions rationnelles du corollaire 5.12(ii) ci-dessus. On a donc montré que

$$S(f) = S(\widehat{f}).$$

Prouvons d’autre part :

LEMME 5.13. — Supposons que la transformée de Fourier  $\widehat{f}_x$  de  $f_x$  est à support compact en au moins une place  $x \in |F|$ .

Alors :

- (i) Pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$ , la “valeur régularisée” en  $Z = 1$  de la fraction rationnelle développée en série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

est égale à l'intégrale

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left((\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s})^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

pour n'importe quel réel  $s$  assez grand.

- (ii) On a

$$S(f) = \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} f(\gamma).$$

Démonstration. — (ii) résulte de (i) puisque

$$\sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} f(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left((\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s})^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

pour n'importe quel réel  $s$  assez grand.

Prouvons maintenant (i). Choisissons un réel  $s$  assez grand.

D'après le lemme 5.5 et le corollaire 5.7, la fraction rationnelle en  $z$  considérée  $R(z)$  est égale, si  $|z|$  est assez petit, à l'intégrale

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-s-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right).$$

Cette même intégrale, considérée non plus au voisinage de  $z = 0$  mais au voisinage de  $z = 1$ , définit une autre fraction rationnelle en  $z$  que nous noterons  $R'(z)$ .

Comme  $R'$  est bien définie en 1 et y vaut

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left((\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s})^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right),$$

il s'agit de prouver que la "valeur régularisée" en  $z = 1$  de la fraction rationnelle

$$R'(z) - R(z)$$

et égale à 0.

Or la différence  $R'(z) - R(z)$  s'écrit comme une somme de résidus calculés le long des pôles qu'il faut traverser en allant de la zone  $|z| \ll 1$  à la zone  $|z| = 1$ .

Comme  $s$  a été choisi très grand, les pôles de

$$L_{x_0} \left( \pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}} \right)$$

n'apparaissent pas au cours de cette traversée.

D'autre part, comme la transformée de Fourier  $\widehat{f}_x$  est à support compact en au moins une place  $x \in |F|$ , les pôles de la fonction  $L$  globale

$$L \left( \pi^\vee, q^{-s-\frac{1}{2}} \right)$$

disparaissent par multiplication avec le facteur

$$h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L_{x_0} \left( \pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}} \right)^{-1}.$$

Finalement, les seuls pôles qui apparaissent dans le calcul de la différence  $R'(z) - R(z)$  sont ceux de

$$L_{x_0} \left( \pi_{x_0}, zq_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} \right) = \prod_{1 \leq i \leq k} \prod_{1 \leq j \leq r'_i} \frac{1}{1 - zq_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} z_{i,j} \lambda_i^{\deg(x_0)}}.$$

Ces pôles sont définis par des équations de la forme

$$q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} z_{i_0, j_0} \lambda_{i_0}^{\deg(x_0)} = z^{-1}.$$

Si un tel pôle apparaît avec la multiplicité  $m_{i_0}$ , alors le polynôme

$$L_{x_0} \left( \pi_{x_0}, q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \prod_{1 \leq i \leq k} \prod_{1 \leq j \leq r'_i} \left( 1 - q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} z_{i,j} \lambda_i^{\deg(x_0)} \right)$$

contient en facteur

$$\left( 1 - q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} z_{i_0, j_0} \lambda_{i_0}^{\deg(x_0)} \right)^{m_{i_0}}$$

qui se spécialise sur le pôle considéré en

$$(1 - z^{-1})^{m_{i_0}},$$

et ses dérivées de degrés  $\leq m_{i_0} - 1$  conservent au moins un facteur

$$1 - q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} z_{i_0, j_0} \lambda_{i_0}^{\deg(x_0)}$$

qui se spécialise en

$$1 - z^{-1}.$$

On conclut que la fraction rationnelle  $R'(z) - R(z)$  est bien définie au voisinage de  $z = 1$  et qu'elle s'annule au point 1.

Cela termine la preuve du lemme. □

On peut maintenant montrer le corollaire suivant qui achève la démonstration du théorème 5.4.

COROLLAIRE 5.14.

(i) *La différence des deux fonctionnelles*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto S(f)$$

et

$$f \mapsto \left( \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} f(\gamma) \right) + \left( \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma)$$

ne dépend que de la restriction de chaque  $\widehat{f}_x$ ,  $x \in |F|$ , à un voisinage arbitrairement petit du bord  $M_r(F_x) - \text{GL}_r(F_x)$  de  $M_r(F_x)$ .

(ii) *Par conséquent, cette différence est identiquement nulle.*

*Démonstration.*

(i) Soit  $f' = \bigotimes_{x \in |F|} f'_x$  une autre fonction de Schwartz telle que  $\widehat{f}_x$  et  $\widehat{f}'_x$  coïncident sur un voisinage de  $M_r(F_x) - \text{GL}_r(F_x)$  en une certaine place et qu'ils sont égaux en les autres places.

Alors on a

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} (\widehat{f - f'}) (\gamma) = \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} (\widehat{f - f'}) (\gamma)$$

et, d'après le lemme 5.13,

$$S(f - f') = \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} (f - f')(\gamma).$$

D'où la conclusion.

(ii) Montrons d'abord que la définition de la fonctionnelle

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto S(f)$$

ne dépend pas du choix de la place  $x_0$  en laquelle le facteur  $f_{x_0}$  est sphérique.



Considérant une autre telle place  $x_1$ , introduisons la série formelle en  $Z_0$  et  $Z_1$

$$\sum_{\substack{N_0, N'_0 \in \mathbb{N} \\ N_1, N'_1 \in \mathbb{N}}} Z_0^{N_0+N'_0} \cdot Z_1^{N_1+N'_1} \cdot \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \left( f_{x_0}^{N_0+N'_0} \otimes f_{x_1}^{N_1+N'_1} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0, x_1} f_x \right) \right) (\gamma).$$

En procédant comme dans la démonstration de la partie (i) du théorème 5.4, on montre que cette série formelle est une fraction rationnelle

$$R(Z_0, Z_1)$$

qui s'écrit comme le quotient d'un polynôme en  $Z_0$  et  $Z_1$  par le produit d'un polynôme en  $Z_0$ , d'un polynôme en  $Z_1$  et d'un polynôme en  $Z_0/Z_1$ .

Par conséquent, on peut parler de la valeur régularisée en  $Z_0 = 1$  de la valeur régularisée en  $Z_1 = 1$  de  $R(Z_0, Z_1)$ , ainsi que de la valeur régularisée en  $Z_1 = 1$  de sa valeur régularisée en  $Z_0 = 1$ , et elles sont égales.

Or, d'après le lemme 5.13(ii), la première est égale à la valeur régularisée en  $Z_0 = 1$  de

$$\sum_{N_0, N'_0 \in \mathbb{N}} Z_0^{N_0+N'_0} \cdot \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \left( f_{x_0}^{N_0, N'_0} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

et la seconde est égale à la valeur régularisée en  $Z_1 = 1$  de

$$\sum_{N_1, N'_1 \in \mathbb{N}} Z_1^{N_1+N'_1} \cdot \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \left( f_{x_1}^{N_1, N'_1} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_1} f_x \right) \right) (\gamma).$$

Ainsi, cette valeur régularisée ne dépend pas du choix de la place. C'est la partie (ii) du théorème 5.4.

Les deux fonctionnelles

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma)$$

et

$$f \mapsto \left( \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) \right) - \left( \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f)$$

sont invariantes par la transformation de Fourier et coïncident sur les  $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$  dont au moins un facteur  $f_x$  est supporté par une partie compacte de  $\text{GL}_r(F_x)$ .

Pour montrer qu'elles sont égales, il suffit de vérifier que la fonctionnelle

$$f \mapsto \left\langle \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) \right\rangle$$

est invariante par translation par les éléments  $\gamma \in M_r(F)$ . Comme elle est invariante par la transformation de Fourier, il revient au même de vérifier qu'elle est invariante par multiplication par les fonctions

$$M_r(\mathbb{A}) \ni m \mapsto \psi(\text{Tr}(\gamma \cdot m)), \quad \gamma \in M_r(F).$$

Il suffit pour cela de montrer que

$$\left( \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f) = 0$$

pour toute fonction localement constante à support compact

$$f : M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui s'annule au voisinage de tout point  $\gamma \in M_r(F)$ .

Cela résulte du lemme suivant :

LEMME 5.15. — *Pour tout  $r', 0 \leq r' \leq r$ , notons  $M_{r,r'}$  le sous-schéma localement fermé de  $M_r$  des matrices de rang  $r'$ .*

*Alors, pour toute fonction localement constante à support compact*

$$f : M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on a

$$\left( \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f) = \sum_{0 \leq r' < r} \sum_{\gamma \in M_{r,r'}(F)} f_{r'}(\gamma)$$

où chaque  $f_{r'}$  est une fonction localement constante

$$f_{r'} : M_{r,r'}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la valeur en chaque point de  $M_{r,r'}(\mathbb{A})$  ne dépend que de la restriction de  $f$  à un voisinage de ce point dans  $M_r(\mathbb{A})$ .

Démonstration. — Avec les notations des lemmes 5.5 et des corollaires 5.7 et 5.14,  $S(f)$  est la “valeur régularisée” en  $z = 1$  de la fraction rationnelle

$$R(z) = \sum_{N,N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(1, 1) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et si  $|z|$  est assez petit,  $R(z)$  est égal à

$$R'(z) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(1, 1) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-s-\frac{1}{2}}\right) \\ \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, z q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, z q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right).$$

Supposons que le réel  $s$  a été choisi suffisamment négatif. Alors on a

$$R'(1) = \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma).$$

La différence entre la “valeur régularisée” de  $R(z)$  en  $z = 1$  et  $R'(1)$  est la somme des résidus calculés le long des pôles qu’il faut traverser en allant de la zone  $|z| \ll 1$  à la zone  $|z| = 1$ .

Comme  $s$  a été choisi très négatif, les pôles des  $L_0\left(\pi_{x_0}, z q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right)$  n’apparaissent pas au cours de cette traversée, mais seulement ceux des  $L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, z q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right)$ .

La conclusion du lemme et donc aussi du corollaire 5.14(ii) s’en déduit. □

### 6. Transformations de Fourier locales non linéaires

Comme dans la section 1, on considère un groupe réductif  $G$ , pas nécessairement quasi-déployé, sur un corps local ultramétrique  $F_x$ .

On suppose que  $G$  est muni d’un caractère non trivial

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Les théorèmes 3.4 et 3.6 d’expression spectrale des fonctions de Schwartz sur  $\text{GL}_r(F_x) \subset M_r(F_x)$  et de leur  $\psi_x$ -transformation de Fourier amènent à proposer la définition très générale suivante :

DÉFINITION 6.1. — Soit  $\rho$  la donnée d’un caractère

$$\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

d’une réunion  $\{\pi\}_x^{G,\rho}$  de classes  $[\pi]$  de  $\{\pi\}_x^G$ , et d’une manière d’associer à toute  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$  une fraction rationnelle en  $Z$

$$L_x(\rho, \pi, Z)$$

et un monôme en  $Z^{\pm 1}$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

tels que

- pour toute  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$ , sa contragrédiente  $\pi^\vee$  est dans  $\{\pi\}_x^{G,\rho}$  et toute représentation  $\pi' \in \{\pi\}_x^G$  qui a le même support supercuspidal que  $\pi$  est dans  $\{\pi\}_x^{G,\rho}$ ,
- pour toute  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$  et tout  $s \in \mathbb{C}$ , on a

$$L_x(\rho, \pi \otimes |\det_G(\bullet)|^s, Z) = L_x(\rho, \pi, q_x^{-s} \cdot Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi \otimes |\det_G(\bullet)|^s, Z) = \varepsilon_x(\rho, \pi, q_x^{-s} \cdot Z),$$

- la fraction rationnelle quotient

$$\gamma_x(\rho, \pi, Z) = \frac{L_x(\rho, \pi, Z) \cdot \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)}{L_x\left(\rho, \pi^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right)}$$

ne dépend que du support supercuspidal de  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$ ,

- pour tout sous-groupe ouvert compact  $K \subset G(F_x)$ , l'inverse

$$L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

est un polynôme en  $Z$  et  $\pi$  sur  $\{\pi\}_{x,K}^{G,\rho} = \{\pi\}_x^{G,\rho} \cap \{\pi\}_{x,K}^G$  qui vaut 1 pour  $Z = 0$ , et le monôme

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

est un polynôme inversible en  $Z^{\pm 1}$  et  $\pi$ .

Alors :

- (i) On appellera  $\rho$ -fonctions sur  $G(F_x)$  les fonctions

$$f_x : K \backslash G(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}$$

dont les restrictions aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, et qui se décomposent spectralement sous la forme

$$f_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^{G,\rho}} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où

- pour tout  $g \in G(F_x)$ ,

$$\pi \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

est une fonction polynomiale sur  $\{\pi\}_{x,K}^{G,\rho}$ ,

- pour toute  $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^{G,\rho}$ , la fonction sur  $G(F_x)$

$$g \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

est élément de l'espace  $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$  des coefficients matriciels de  $\pi$  bi-invariants par  $K$ .

- (ii) On appellera  $\rho$ -transformation de Fourier l'opérateur qui associe à toute  $\rho$ -fonction  $f_x$  décomposée spectralement comme ci-dessus la fonction

$$\widehat{f}_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^{G,\rho}} d\pi \cdot f_{x,\pi}((\bullet)^{-1}) \cdot L_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Remarques.

- (i) Il résulte du corollaire 1.9 que pour toute  $\rho$ -fonction  $f_x$ , les restrictions de sa  $\rho$ -transformée de Fourier  $\widehat{f}_x$  aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, si bien que  $\widehat{f}_x$  est aussi une  $\rho$ -fonction.

- (ii) Il résulte de la définition que l'espace des  $\rho$ -fonctions  $f_x$  est invariant par translation à droite ou à gauche par les éléments  $g \in G(F_x)$  et que

$$\begin{aligned} \widehat{f}_x^g &= |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot g^{-1} \widehat{f}_x, \\ {}^g \widehat{f}_x &= |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{g^{-1}}. \end{aligned}$$

- (iii) Pour toute  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$ , le produit du polynôme

$$L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

et de la fraction rationnelle

$$\gamma_x(\rho, \pi, Z)$$

est un polynôme. Autrement dit,  $L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$  est un multiple du dénominateur réduit de la fraction rationnelle  $\gamma_x(\rho, \pi, Z)$ .

- (iv) Habituellement, les facteurs  $\varepsilon_x$  et  $\gamma_x$  dépendent aussi d'un caractère additif  $\psi_x$  de  $F_x$ . Ici cette dépendance n'apparaît pas car elle est intégrée à la notion de transformation de Fourier locale.

On déduit aussitôt de la définition :

LEMME 6.2. — Soit  $\rho$  une donnée comme ci-dessus.

Alors on a pour toute représentation  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$  :

(i) Les intégrales

$$\int_{G(F_x)} dg \cdot f_x(g) \cdot \varphi_x(g) \cdot |\det_G(g)|_x^{s-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{\frac{1}{2}}$$

associées aux  $\rho$ -fonctions

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et aux “coefficients matriciels” de  $\pi$

$$\varphi_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

convergent absolument, pour tout  $s \in \mathbb{C}$  de partie réelle  $\text{Re}(s)$  assez grande, vers une fraction rationnelle en  $Z = q_x^{-s}$ .

(ii) Ces fractions rationnelles en  $Z = q_x^{-s}$  engendrent un idéal fractionnaire qui admet un unique générateur  $L'_x(\rho, \pi, Z)$  dont l'inverse  $L'_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$  est un polynôme en  $Z$  dont le coefficient constant est égal à 1.

(iii) Le polynôme  $L'_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$  divise le polynôme  $L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$ .

Rappelons que si  $\pi_2 \in \{\pi\}_x^G$ ,  $(M, \pi_0)$  désigne le support supercuspidal de  $\pi_2$  et  $[\pi_1] \subset \{\pi\}_x^G$  désigne l'unique classe des représentations dont le support discret est contenu dans  $[\pi_0]$ , alors  $[\pi_1]$  s'identifie à un ouvert de Zariski de  $[\pi_0]/\text{Fixe}(M, \pi_0)$  et  $[\pi_2]$  se plonge comme sous-schéma localement fermé dans  $[\pi_0]/\text{Fixe}(M, \pi_0)$ . De plus, toute fonction “polynomiale” sur  $[\pi_1]$  se prolonge à  $[\pi_0]/\text{Fixe}(M, \pi_0)$  et se spécialise donc en une fonction polynomiale sur  $[\pi_2]$ .

On déduit du théorème 1.8 :

PROPOSITION 6.3. — Soit  $\rho$  une donnée comme ci-dessus.

Soient  $\pi_2 \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$ ,  $(M, \pi_0)$  son support supercuspidal et  $[\pi_1] \subset \{\pi\}_x^{G,\rho}$  la classe qui s'identifie à un ouvert de Zariski de  $[\pi_0]/\text{Fixe}(M, \pi_0)$ .

Alors :

(i) La fraction rationnelle

$$[\pi_2] \ni \pi \mapsto \gamma_x(\rho, \pi, Z) = \frac{L_x(\rho, \pi, Z) \cdot \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)}{L_x\left(\rho, \pi, \frac{1}{q_x Z}\right)}$$

n'est autre que la spécialisation de la fraction rationnelle

$$[\pi_1] \ni \pi \mapsto \gamma_x(\rho, \pi, Z).$$

(ii) Pour tout  $\pi \in [\pi_1]$ , on a

$$L'_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho, \pi, Z).$$

(iii) Pour tout  $\pi' \in [\pi_2]$ , le polynôme

$$L'_x(\rho, \pi', Z)^{-1}$$

divise le polynôme obtenu par spécialisation en  $\pi'$  de la fonction polynomiale

$$[\pi_1] \ni \pi \mapsto L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}.$$

Cette proposition implique :

COROLLAIRE 6.4. — Soit  $\rho'$  une “donnée incomplète” consistant en un caractère

$$\det_{\rho'} : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

une réunion  $\{\pi\}_x^{G, \rho'}$  de classe  $[\pi]$  de  $\{\pi\}_x^G$ , une manière d'associer à toute  $\pi \in \{\pi\}_x^{G, \rho'}$  une fraction rationnelle en  $Z$

$$L_x(\rho', \pi, Z)$$

et un monôme en  $Z^{\pm 1}$

$$\varepsilon_x(\rho', \pi, Z)$$

tels que

- $\{\pi\}_x^{G, \rho'}$  est stable par  $\pi \mapsto \pi^\vee$ ,
- le support discret de tout élément  $\pi \in \{\pi\}_x^{G, \rho'}$  est supercuspidal,
- pour toute  $\pi \in \{\pi\}_x^{G, \rho'}$  et tout  $s \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{aligned} L_x(\rho', \pi \otimes |\det_G(\bullet)|_x^{-s}, Z) &= L_x(\rho', \pi, q_x^{-s} \cdot Z), \\ \varepsilon_x(\rho', \pi \otimes |\det_G(\bullet)|_x^{-s}, Z) &= \varepsilon_x(\rho', \pi, q_x^{-s} \cdot Z), \end{aligned}$$

- sur chaque  $\{\pi\}_{x, K}^{G, \rho'} = \{\pi\}_x^{G, \rho'} \cap \{\pi\}_{x, K}^G$ , l'inverse

$$L_x(\rho', \pi, Z)^{-1}$$

est un polynôme en  $Z$  et  $\pi$  qui vaut 1 pour  $Z = 0$ , et le monôme

$$\varepsilon_x(\rho', \pi, Z)$$

est un polynôme inversible en  $Z^{\pm 1}$  et  $\pi$ .

Alors il existe une unique donnée  $\rho$  au sens de la définition 6.1 telle que

- $\det_\rho = \det_{\rho'}$ ,
- $\{\pi\}_x^{G, \rho}$  est l'ensemble des représentations  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  dont le support supercuspidal est égal au support discret d'un élément de  $\{\pi\}_x^{G, \rho'}$ ,

- pour toute  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho'} \subset \{\pi\}_x^{G,\rho}$ , on a
 
$$L_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho', \pi, Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_x(\rho', \pi, Z),$$
- pour toute  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$ , on a avec les notations du lemme 6.2
 
$$L'_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho, \pi, Z).$$

On pose donc :

DÉFINITION 6.5. — Une donnée  $\rho = (\det_\rho, \{\pi\}_x^{G,\rho}, L_x(\rho, \bullet, Z), \varepsilon_x(\rho, \bullet, Z))$  comme dans le définition 6.1 sera dite “normalisée” si, avec les notations du lemme 6.2, on a pour toute  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$

$$L'_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho, \pi, Z).$$

Ainsi, le corollaire 6.4 dit qu’une donnée normalisée  $\rho$  est entièrement déterminée par sa restriction aux représentations  $\pi \in \{\pi\}_\rho^{G,x}$  dont le support discret est supercuspidal.

Dans la suite, on ne considèrera plus que des données normalisées.

### 7. Transformations de Fourier globales et formules de Poisson non linéaires

Comme dans la section 2, on considère un groupe réductif  $G$ , pas nécessairement quasi-déployé, sur un corps de fonctions  $F$  de corps des constantes  $\mathbb{F}_q$ .

On suppose que  $G$  est muni d’un caractère non trivial

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

L’expression spectrale de l’espace des fonctions de Schwartz globales sur  $GL_r(\mathbb{A}) \subset M_r(\mathbb{A})$  et de la  $\psi$ -transformation de Fourier dans cet espace amène à proposer la définition très générale suivante :

DÉFINITION 7.1. — Soit  $\rho$  la donnée d’un caractère

$$\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

complétée, en chaque place  $x \in |F|$ , en une donnée locale normalisée

$$(\det_\rho, \{\pi\}_x^{G,\rho}, L_x(\rho, \bullet, Z), \varepsilon_x(\rho, \bullet, Z))$$

au sens des définitions 6.1 et 6.5.



On suppose que, en toute place  $x \in |F| - S_G$  où le groupe réductif  $G$  est non ramifié, les représentations non ramifiées  $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$  sont éléments de  $\{\pi\}_x^{G,\rho}$ .

En une telle place non ramifiée  $x$ , on appelle “ $\rho$ -fonction standard” la fonction sphérique

$$G(O_x) \backslash G(F_x) / G(O_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$|\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \cdot \varphi_{x,\pi}(g) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où, pour toute  $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ ,  $\varphi_{x,\pi}$  est l'unique coefficient matriciel de  $\pi$  qui est sphérique et vérifie  $\varphi_{x,\pi}(1) = 1$ .

On suppose enfin que, en presque toute place  $x \in |F| - S_G$ , on a  $\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = 1, \forall \pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ , si bien que la  $\rho$ -fonction standard en une telle place est sa propre  $\rho$ -transformée de Fourier.

Alors :

- (i) On appellera  $\rho$ -fonctions sur  $G(\mathbb{A})$  les combinaisons linéaires de produits

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

de  $\rho$ -fonctions locales

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

égales aux “ $\rho$ -fonctions standard” en presque toute place  $x \in |F| - S_G$ .

- (ii) On appellera  $\rho$ -transformation de Fourier des  $\rho$ -fonctions globales sur  $G(\mathbb{A})$  l'opérateur linéaire qui associe à toute  $\rho$ -fonction produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$$

le produit des  $\rho$ -transformées de Fourier locales

$$\widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x.$$

Remarque. — Il résulte de l'hypothèse faite sur les

$$\{\pi\}_{x,\emptyset}^G \ni \pi \mapsto \varepsilon_x(\rho, \pi, Z), \quad x \in |F| - S_G,$$

que la  $\rho$ -transformée de Fourier d'une  $\rho$ -fonction globale est encore une  $\rho$ -fonction globale.

Par analogie avec la définition 5.3, posons :

DÉFINITION 7.2. — Soit  $x_0 \in |F| - S_G$  une place de  $F$  en laquelle le groupe réductif  $G$  est non ramifié.

Soit

$$f_{x_0} : G(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

une  $\rho$ -fonction sphérique, c'est-à-dire invariante à gauche et à droite par  $G(O_x)$ , et dont la décomposition spectrale s'écrit

$$f_{x_0}(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x_0, \emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x_0, \pi}(\bullet) \cdot L_{x_0} \left( \rho, \pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Alors, pour tous  $N, N' \in \mathbb{N}$ , on note

$$f_{x_0}^{N, N'} : G(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

la  $\rho$ -fonction définie par l'expression spectrale

$$\begin{aligned} f_{x_0}^{N, N'}(\bullet) &= |\det_\rho(\bullet)|_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x_0, \emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x_0, \pi}(\bullet) \cdot L_{x_0} \left( \rho, \pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &\quad \cdot I_{x_0}^N \left( \rho, \pi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot I_{x_0}^{N'} \left( \rho, \pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

où  $I_{x_0}^N(\rho, \pi, Z)$  désigne le polynôme en  $Z$  et  $\pi$  produit de

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré  $N$  en  $Z$  qui apparaît dans le développement en série formelle en  $Z$  de l'inverse

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z).$$

Remarques.

- (i) On observe comme dans le cas linéaire que les fonctions  $f_{x_0}^{N, N'}$  et leurs  $\rho$ -transformées de Fourier  $\widehat{f_{x_0}^{N, N'}}$  sont à support compact dans  $G(F_{x_0})$ .
- (ii) Ici encore, on a pour toute  $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^G$  l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_{x_0}^N(\rho, \pi, Z) = 1$$

dans l'anneau des séries formelles en  $Z$ . De plus, les sommes  $\sum_{N \geq N_0} \left| I_{x_0}^N \left( \rho, \pi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right) \right|$  convergent uniformément vers 0 si  $\pi \in \text{Im}\{\pi\}_{x, \emptyset}^r$  et  $N_0$  devient arbitrairement grand.

Il en résulte que, pour tout  $g \in G(F_{x_0})$ ,

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} f_{x_0}^{N, N'}(g) = f_{x_0}(g).$$

Le cas de  $GL_r$  et de la transformation de Fourier linéaire sur  $M_r(\mathbb{A})$ , avec le théorème 5.4 et le corollaire 5.2, amène à envisager la forme générale suivante pour d'éventuelles autres formules de Poisson :

DÉFINITION 7.3. — Soit  $\rho$  une donnée globale comme dans la définition 8.1 pour le groupe réductif  $G$  sur  $F$  muni du caractère non trivial  $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ .

- (i) On dira que  $\rho$  satisfait la formule de Poisson si, pour toute  $\rho$ -fonction produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et pour toute place  $x_0 \in |F| - S_G$  en laquelle  $G$  est non ramifié et le facteur  $f_{x_0}$  est sphérique, la série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

est une fraction rationnelle en  $Z$  dont la "valeur régularisée" en  $Z = 1$ , notée  $S(f)$ , ne dépend pas du choix de  $x_0$  et vérifie

$$S(f) = S(\hat{f}).$$

- (ii) Supposons que pour toute place  $x \in |F|$ , tout sous-groupe ouvert compact  $K_x \subset G(F_x)$ , tout caractère  $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  assez ramifié en fonction de  $K_x$  et toute représentation  $\pi' \in \{\pi\}_{x, K_x}^{G, \rho}$ , la représentation

$$\pi = \pi' \cdot \omega = \pi' \otimes (\omega \circ \det_G)$$

soit élément de  $\{\pi\}_x^{G, \rho}$  et vérifie

$$L_x(\rho, \pi, Z) = 1.$$

Et appelons "très ramifiées" les  $\rho$ -fonctions locales

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la décomposition spectrale

$$f_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_x^{G, \rho}} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}})$$

ne fait apparaître que des représentations  $\pi$  de cette forme  $\pi' \cdot \omega$ .

Alors on dira que  $\rho$  satisfait la formule de Poisson très ramifiée si, pour toute  $\rho$ -fonction produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont au moins un facteur  $f_x$  est très ramifié, on a

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma).$$

Remarques.

- (i) La formule de Poisson et la formule de Poisson non ramifiée ne dépendent pas du choix du caractère  $\det_\rho$  dans la donnée globale  $\rho$ .

En effet, si  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux données globales qui ne diffèrent que par les caractères  $\det_\rho$  et  $\det_{\rho'}$ , l'opérateur

$$f(\bullet) \mapsto |\det_\rho(\bullet)|^{1/2} \cdot |\det_{\rho'}(\bullet)|^{-1/2} \cdot f$$

définit un isomorphisme de l'espace des  $\rho$ -fonctions sur celui des  $\rho'$ -fonctions qui échange les transformations de Fourier et les fonctionnelles linéaires considérées dans l'énoncé.

- (ii) Dans la situation de (ii), si une  $\rho$ -fonction locale

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

est très ramifiée, il en est de même de  $\widehat{f}_x$ . De plus, toutes deux sont à support compact.

- (iii) Il n'est pas sûr a priori qu'une donnée  $\rho$  qui satisfait la formule de Poisson satisfait nécessairement aussi la formule de Poisson très ramifiée.

Il est clair qu'une donnée  $\rho$  comme dans la définition 7.1 ne peut satisfaire la formule de Poisson ou la formule de Poisson très ramifiée que si elle vérifie des conditions très restrictives.

Les sections suivantes montrent, d'abord dans le cas des tores puis dans le cas général d'un groupe réductif  $G$  sur  $F$ , que le principe de functorialité de Langlands permet de construire des données  $\rho$  qui satisfont les deux formules.

### 8. Le cas des tores

Dans cette section, on considère un tore  $T$ , pas nécessairement déployé, sur un corps de fonctions  $F$  de corps des constantes  $\mathbb{F}_q$ .

On note  $X_T$  le réseau des caractères  $T \rightarrow \mathbb{G}_m$  définis sur une clôture séparable  $\overline{F}$  de  $F$ , et  $X_T^\vee$  le réseau dual des cocaractères  $\mathbb{G}_m \rightarrow T$ . Le réseau  $X_T$  et son dual  $X_T^\vee$  sont munis d'une action naturelle du groupe de Galois  $\Gamma_F = \text{Aut}_F(\overline{F})$  de  $F$ .

Rappelons la définition du tore dual de  $T$  :

DÉFINITION 8.1. — On appelle *tore dual* de  $T$ , et on note  $\widehat{T}$ , le *tore algébrique* sur  $\mathbb{C}$  dont le réseau des caractères est

$$X_{\widehat{T}} = X_T^{\vee}$$

et le réseau des cocaractères est

$$X_{\widehat{T}}^{\vee} = X_T.$$

Il est muni d'une action naturelle de  $\Gamma_F$ .

On a le lemme suivant qui résulte de l'équivalence entre la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de  $\Gamma_F$  et celle des extensions finies séparables du corps  $F$  :

LEMME 8.2. — *Considérons une famille de  $r$  caractères de  $\widehat{T}$*

$$\rho_T^i : \widehat{T} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}, \quad 1 \leq i \leq r,$$

sur laquelle le groupe de Galois  $\Gamma_F$  agit via une action sur l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$  des indices.

Soit  $E$  l'extension séparable de degré  $r$  de  $F$  qui est associée à l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$  muni de l'action de  $\Gamma_F$ , et soit

$$T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$$

le tore de rang  $r$  sur  $F$  déduit de  $\mathbb{G}_m$  par restriction des scalaires à la Weil de  $E$  à  $F$ .

Alors le dual  $\widehat{T}_E$  de  $T_E$  s'identifie au produit

$$(\mathbb{C}^{\times})^r$$

muni de l'action par permutation de  $\Gamma_F$ , et l'homomorphisme de tores complexes  $\Gamma_F$ -équivariant

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^{\times})^r = \widehat{T}_E$$

est dual d'un homomorphisme de tores

$$\rho_T^{\vee} : T_E \rightarrow T$$

bien défini sur  $F$ .

Dans la situation de ce lemme, l'extension  $E$  est un produit fini

$$E = \prod_{1 \leq j \leq k} E_j$$

de corps  $E_j$  qui sont des extensions finies séparables de  $F$ .

Pour  $1 \leq j \leq k$ , chaque place  $y \in |E_j|$  est au-dessus d'une place  $x \in |F|$ . Alors le corps local  $E_{j,y}$  est une extension finie séparable de  $F_x$  et son corps

résiduel  $\kappa_y$  est une extension finie de  $\kappa_x$  si bien que son cardinal  $q_y = q^{\deg(y)}$  est une puissance de  $q_x = q^{\deg(x)}$ .

Pour toute place  $x \in |F|$ , l'algèbre locale

$$E_x = E \otimes_F F_x = \prod_{1 \leq j \leq k} (E_j \otimes_F F_x) = \prod_{1 \leq j \leq k} E_{j,x}$$

s'identifie au produit

$$\prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \mapsto x}} E_{j,y}.$$

En tant qu'algèbre de dimension finie sur  $F_x$ , elle est munie d'un homomorphisme de trace

$$\text{Tr}_{E_x/F_x} : E_x \rightarrow F_x$$

qui est la somme des homomorphismes de traces

$$\text{Tr}_{E_{j,y}/F_x} : E_{j,y} \rightarrow F_x.$$

De même l'anneau adélique  $\mathbb{A}_E = E \otimes_F \mathbb{A} = \prod_{1 \leq j \leq k} (E_j \otimes_F \mathbb{A})$  s'identifie au produit

$$\prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{A}_{E_j}$$

des anneaux adéliques  $\mathbb{A}_{E_j}$  des  $E_j$ . Il est muni d'un homomorphisme de trace global

$$\text{Tr}_{\mathbb{A}_E/\mathbb{A}} = \sum_{1 \leq j \leq k} \text{Tr}_{\mathbb{A}_{E_j}/\mathbb{A}} : \mathbb{A}_E = \prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{A}_{E_j} \rightarrow \mathbb{A}$$

qui est la somme des homomorphismes de traces locaux

$$\text{Tr}_{E_x/F_x} = \sum_{1 \leq j \leq k} \text{Tr}_{E_{j,x}/F_x} : E_x = \prod_{1 \leq j \leq k} E_{j,x} \rightarrow F_x.$$

La restriction de  $\text{Tr}_{\mathbb{A}_E/\mathbb{A}}$  au sous-groupe discret  $E = \prod_{1 \leq j \leq k} E_j$  de  $\mathbb{A}_E = \prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{A}_{E_j}$  est la somme

$$\text{Tr}_{E/F} = \sum_{1 \leq j \leq k} \text{Tr}_{E_j/F}$$

des homomorphismes de traces

$$\text{Tr}_{E_j/F} : E_j \rightarrow F.$$

En particulier, elle envoie  $E$  dans  $F$ .

Supposons maintenant que l'anneau  $\mathbb{A}$  des adèles de  $F$  est muni d'un caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Alors, pour toute place  $x \in |F|$ ,

$$E_x = \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \mapsto x}} E_{j,y}$$

se trouve muni du caractère composé

$$\psi_{E_x} = \psi_x \circ \text{Tr}_{E_x/F_x} = \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \mapsto x}} (\psi_x \circ \text{Tr}_{E_{j,y}/F_x}).$$

Et  $\mathbb{A}_E = \prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{A}_{E_j}$  se trouve muni du caractère produit

$$\prod_{x \in |F|} \psi_{E_x}$$

qui n'est autre que le composé

$$\psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{A}_E/\mathbb{A}} = \prod_{1 \leq j \leq k} (\psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{A}_{E_j}/\mathbb{A}})$$

et donc est trivial sur  $E = \prod_{1 \leq j \leq k} E_j$ .

On munit les  $E_{j,y}$ ,  $y \in |E_j|$ , et  $\mathbb{A}_{E_j}$ ,  $1 \leq j \leq k$ , des mesures additives autoduales pour ces caractères. Puis on munit les  $E_x$ ,  $x \in |F|$ , et  $\mathbb{A}_E$  des mesures produits.

En toute place  $x \in |F|$ , les caractères

$$\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$$

sont les produits

$$\chi = \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \mapsto x}} \chi_{j,y}$$

de caractères

$$\chi_{j,y} \in \{\pi\}_y^{\mathbb{G}_m}$$

des groupes multiplicatifs  $E_{j,y}^\times$ .

Alors on peut poser

$$L_x(\chi, Z) = \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \mapsto x}} L_y \left( \chi_{j,y}, Z^{\frac{\text{deg}(y)}{\text{deg}(x)}} \right)$$

et

$$\varepsilon_x(\chi, \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \mapsto x}} \varepsilon_y \left( \chi_{j,y}, \psi_x \circ \text{Tr}_{E_{j,y}/F_x}, Z^{\frac{\text{deg}(y)}{\text{deg}(x)}} \right).$$

On déduit des résultats de la section 3 appliqués aux  $E_{j,y}$ ,  $y \in |E_j|$ , et  $\mathbb{A}_{E_j}$ ,  $1 \leq j \leq k$  :

LEMME 8.3. — Dans la situation et avec les notations ci-dessus, considérons le tore  $T_E$  muni du caractère de norme

$$\det_{T_E} = \text{Nm} : T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$$

dual du cocaractère de plongement diagonal

$$\widehat{\mathbb{G}}_m = \mathbb{C}^\times \hookrightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E.$$

Alors :

(i) Les familles de fractions rationnelles

$$L_x(\chi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\chi, \psi_x, Z), \quad \chi \in \{\pi\}_x^{T_E},$$

en chaque place  $x \in |F|$ , définissent une donnée globale  $\rho_E$  sur  $T_E$  au sens de la définition 7.1.

(ii) En toute place  $x \in |F|$ , les  $\rho_E$ -fonctions sur  $T_E(F_x) = E_x^\times$  sont les fonctions

$$E_x^\times \rightarrow \mathbb{C}$$

qui se prolongent en une fonction localement constante à support compact

$$f_x : E_x \rightarrow \mathbb{C}.$$

De plus, la  $\rho_E$ -transformation de Fourier de ces fonctions  $f_x$  est donnée par la formule

$$\widehat{f}_x(a') = \int_{E_x} da \cdot f_x(a) \cdot \psi_x \circ \text{Tr}_{E_x/F_x}(aa').$$

(iii) Les  $\rho_E$ -fonctions globales sur  $T_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$  sont les fonctions

$$\mathbb{A}_E^\times \rightarrow \mathbb{C}$$

qui se prolongent en une fonction localement constante à support compact

$$f : \mathbb{A}_E \rightarrow \mathbb{C}.$$

De plus, la  $\rho_E$ -transformation de Fourier globale de ces fonctions  $f$  est donnée par la formule

$$\widehat{f}(a') = \int_{\mathbb{A}_E} da \cdot f(a) \cdot \psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{A}_E/\mathbb{A}}(aa').$$

Plaçons-nous dans la situation du lemme 8.2 où l'on dispose de l'homomorphisme de tores sur  $F$

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

dual de l'homomorphisme  $\Gamma_F$ -équivariant de tores complexes

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E.$$



En toute place  $x \in |F|$ , les caractères éléments de  $\{\pi\}_x^T$

$$\chi : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

induisent par composition avec  $\rho_T^\vee$  des caractères éléments de  $\{\pi\}_x^{T_E}$

$$\chi \circ \rho_T^\vee : T_E(F_x) = E_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Cela permet de poser la définition suivante :

DÉFINITION 8.4. — *Dans la situation du lemme 8.2, supposons le tore  $T$  muni d'un caractère défini sur  $F$*

$$\det_T : T \rightarrow \mathbb{G}_m$$

dont le composé avec l'homomorphisme

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

est le caractère de norme

$$\det_{T_E} = \text{Nm} : T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Alors on appellera “donnée induite par  $\rho_T$ ” la donnée globale sur  $T$  muni de  $\det_T$  qui consiste, en toute place  $x \in |F|$ , à associer aux caractères  $\chi \in \{\pi\}_x^T$  les fractions rationnelles

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) = L_x(\chi \circ \rho_T^\vee, Z)$$

et

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z) = \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T^\vee, \psi_x, Z).$$

Remarque. — Le cocaractère

$$\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{T}$$

qui correspond à  $\det_T : T \rightarrow \mathbb{G}_m$ , composé avec

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r,$$

devient le plongement diagonal  $\mathbb{C}^\times \hookrightarrow (\mathbb{C}^\times)^r$ .

On déduit du lemme 8.3 :

COROLLAIRE 8.5. — *Dans la situation de la définition 8.4, notons  $T_\rho$  le noyau de l'homomorphisme de tores sur  $F$*

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T.$$

(i) *Supposons que, en une place  $x \in |F|$ , l'homomorphisme*

$$\rho_T^\vee : T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$$

*est surjectif. Alors :*

- la suite

$$1 \rightarrow T_\rho(F_x) \rightarrow T_E(F_x) \rightarrow T(F_x) \rightarrow 1$$

est exacte,

- les  $\rho_T$ -fonctions sur  $T(F_x)$  sont exactement les fonctions déduites des fonctions localement constantes à support compact

$$E_x = E \otimes_F F_x \rightarrow \mathbb{C}$$

par intégration le long des fibres de l'homomorphisme surjectif

$$E_x^\times = T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$$

pour une mesure invariante de  $T_\rho(F_x)$ ,

- la  $\rho_T$ -transformation de Fourier locale sur  $T(F_x)$  est induite par la  $(\psi_x \circ \text{Tr}_{E_x/F_x})$ -transformation de Fourier sur  $E_x$ .
- (ii) Supposons que, en toute place  $x \in |F|$ , l'homomorphisme

$$\rho_T^\vee : T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$$

est surjectif. Alors :

- la suite

$$1 \rightarrow T_\rho(\mathbb{A}) \rightarrow T_E(\mathbb{A}) \rightarrow T(\mathbb{A}) \rightarrow 1$$

est exacte,

- les  $\rho_T$ -fonctions globales sur  $T(\mathbb{A})$  sont exactement les fonctions déduites des fonctions localement constantes à support compact

$$\mathbb{A}_E = E \otimes_F \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$$

par intégration le long des fibres de l'homomorphisme surjectif

$$\mathbb{A}_E^\times = T_E(\mathbb{A}) \rightarrow T(\mathbb{A})$$

pour une mesure invariante de  $T_\rho(\mathbb{A})$ ,

- la  $\rho_T$ -transformation de Fourier globale sur  $T(\mathbb{A})$  est induite par la  $(\psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{A}_E/\mathbb{A}})$ -transformation de Fourier sur  $\mathbb{A}_E$ .

Remarques.

(i) Si l'homomorphisme

$$\rho_T : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

est injectif,  $T_\rho$  est nécessairement le tore algébrique sur  $F$  dual du tore complexe  $\widehat{T}_\rho = \text{Coker}(\rho_T)$  et on a une suite exacte de groupes algébriques sur  $F$

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E \rightarrow T \rightarrow 1.$$

(ii) Dans ce cas, l'homomorphisme

$$T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$$

est surjectif si le groupe de cohomologie galoisienne

$$H^1(F_x, T_\rho) = H^1(\Gamma_{F_x}, T_\rho(\overline{F}_x))$$

est trivial. D'après le théorème 90 de Hilbert, cette hypothèse est automatiquement vérifiée si  $T_\rho$  est de la forme

$$T_\rho \cong \text{Res}_{E'/F} \mathbb{G}_m$$

pour une certaine extension finie séparable  $E'$  de  $F$ .

Prouvons maintenant en général :

THÉORÈME 8.6. — *Considérons comme dans la définition 8.4 un homomorphisme  $\Gamma_F$ -équivariant*

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E,$$

son dual

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

et un caractère  $\det_T : T \rightarrow \mathbb{G}_m$  tel que

$$\det_T \circ \rho_T^\vee = \det_{T_E} = \text{Nm}.$$

Alors :

(i) *La donnée globale sur  $T(\mathbb{A})$  induite par  $\rho_T$  satisfait la formule de Poisson au sens de la définition 7.3(i).*

*De plus, pour toute  $\rho_T$ -fonction globale produit*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et toute place  $x_0 \in |F| - S_T$  en laquelle  $f_{x_0}$  est sphérique, la fraction rationnelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

est invariante par la substitution  $f \mapsto \widehat{f}$ , et elle n'a pas de pôle dans le demi-tore  $|Z| \leq 1$ . Elle est donc bien définie en  $Z = 1$  et sa valeur  $S(f) = S(\widehat{f})$  en ce point est égale aux sommes absolument convergentes

$$\begin{aligned} \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in T(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma) \\ = \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in T(F)} \left( \widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (\gamma). \end{aligned}$$

(ii) La donnée globale sur  $T(\mathbb{A})$  induite par  $\rho_T$  satisfait la formule de Poisson très ramifiée au sens de la définition 7.3(ii).

Démonstration. — Pour tout caractère

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

invariant par un sous-groupe ouvert compact  $K = \prod_{x \in |F|} K_x$ , on peut poser

$$L(\rho_T, \chi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x \left( \rho_T, \chi_x, Z^{\deg(x)} \right)$$

qui est bien défini a priori en tant que série formelle en  $Z$ , et

$$\varepsilon(\rho_T, \chi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x \left( \rho_T, \chi_x, Z^{\deg(x)} \right)$$

qui est bien défini en tant que monôme en  $Z$  puisque presque tous les facteurs  $\varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, Z^{\deg(x)})$  valent 1.

Le théorème va résulter de la proposition suivante :

PROPOSITION 8.7. — Soit  $\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x$  un caractère automorphe

$$T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

invariant par un sous-groupe ouvert compact  $K = \prod_{x \in |F|} K_x$  de  $T(\mathbb{A})$ .

Alors :

(i) Le produit

$$L(\rho_T, \chi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho_T, \chi_x, q_x^{-s})$$

converge absolument, si  $\operatorname{Re}(s)$  est assez grand [resp. si  $\chi$  est unitaire et  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ], vers une fraction rationnelle en  $q^{-s}$  qui satisfait l'équation fonctionnelle

$$L(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-(1-s)}) = L(\rho_T, \chi, q^{-s}) \cdot \varepsilon(\rho_T, \chi, q^{-s}).$$

(ii) Si, en une place  $x_0 \in |F|$ ,  $I_{x_0}^N(\rho_T, \chi_{x_0}, Z)$  désigne le produit du polynôme

$$L_{x_0}(\rho_T, \chi_{x_0}, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré  $N$  du développement en série formelle en  $Z$  de l'inverse

$$L_{x_0}(\rho_T, \chi_{x_0}, Z),$$

le produit

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right)$$

n'a pas de pôle dans la zone

$$\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{2}$$

lorsque  $\chi$  est unitaire.

De plus, la série

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

converge uniformément vers

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

dans l'espace compact des caractères automorphes unitaires  $\chi : T(\mathbb{A})/T(F)$  invariants par  $K$ .

(iii) Si, en une place  $x_0 \in |F|$ , le caractère  $\chi_{x_0} : T(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  est le produit

$$\chi_{x_0} = \chi'_{x_0} \cdot (\omega \circ \det_T)$$

d'un caractère  $\chi'_{x_0} : T(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  de ramification bornée, c'est-à-dire invariant par un sous-groupe ouvert compact  $K'_{x_0}$  fixé, et d'un caractère  $\omega : F_{x_0}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  assez ramifié en fonction de  $K'_{x_0}$  composé avec  $\det_T$ , la fraction rationnelle

$$L(\rho_T, \chi, Z)$$

est un polynôme : elle n'a pas de pôle.

*Démonstration.* — On a par définition

$$L(\rho_T, \chi, Z) = L(\chi \circ \rho_T, Z)$$

et

$$\varepsilon(\rho_T, \chi, Z) = \varepsilon(\chi \circ \rho_T, \psi, Z)$$

si bien que l'on se retrouve ramené à l'étude des fonctions  $L$  et  $\varepsilon$  des caractères automorphes de  $T_E(\mathbb{A}) = \prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{A}_{E_j}^\times$ .

Toutes les assertions résultent alors du cas particulier  $r = 1$  du théorème 4.2 appliqué aux corps de fonctions  $E_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , et à leurs anneaux d'adèles  $\mathbb{A}_{E_j}$ . □

*Suite de la démonstration du théorème 8.6.* — Considérons une  $\rho_T$ -fonction globale produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

invariante par un sous-groupe ouvert compact  $K = \prod_{x \in |F|} K_x$ .

En chaque place  $x \in |F|$ , la fonction

$$f_x : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

se décompose spectralement sous la forme

$$f_x(\bullet) = |\det_T(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x, K_x}^T} d\chi \cdot p_x(\chi) \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x(\rho_T, \chi^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}})$$

où  $p_x$  désigne une fonction polynomiale sur  $\{\pi\}_{x, K_x}^T$ .

De plus, en presque toute place  $x \in |F|$ , le tore  $T$  est non ramifié, on a  $K_x = T(O_x)$  et le polynôme  $p_x$  est uniformément égal à 1 sur  $\{\pi\}_{x, K_x}^T = \{\pi\}_{x, \emptyset}^T = \Lambda_x^T$ .

Notons  $\{\chi_0\}$  une famille finie de représentants unitaires des classes  $[\chi_0]$  de caractères automorphes  $T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  invariants par  $K$ .

Si  $p : \chi \mapsto p(\chi)$  désigne la restriction aux classes  $[\chi_0]$  des polynômes produits  $\prod_{x \in |F|} p_x$ , on peut écrire pour tout réel  $s > \frac{1}{2}$  la formule

$$\sum_{\gamma \in T(F)} f(\gamma) = \sum_{\chi_0 \in \{\chi_0\}} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot p(\chi \otimes |\det_T(\bullet)|^{-s}) \cdot L(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}).$$

Si le facteur  $f_{x_0}$  de  $f$  en au moins une place  $x_0 \in |F|$  est très ramifié au sens de la définition 7.3(ii), les fonctions

$$L(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s})$$

qui apparaissent dans cette formule n'ont pas de pôle d'après la proposition 8.7(iii) ci-dessus, et on obtient par déplacement de contours

$$\sum_{\gamma \in T(F)} f(\gamma) = \sum_{\chi_0 \in \{\chi_0\}} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot p(\chi) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Alors l'équation fonctionnelle de la proposition 8.7(i) implique

$$\sum_{\gamma \in T(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{f}(\gamma).$$

C'est la partie (ii) du théorème.

Considérons maintenant une place  $x_0 \in |F|$  en laquelle  $T$  est non ramifié et  $K_{x_0} = T(O_{x_0})$ .

Pour tous entiers  $N, N' \in \mathbb{N}$ , on a si  $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in T(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma) \\ &= \sum_{\chi_0 \in \{\chi_0\}} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot p(\chi \otimes |\det_T(\bullet)|^{-s}) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \\ & \quad \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}-s}\right). \end{aligned}$$

D'après la proposition 8.7(ii), cette expression est encore égale à

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi_0 \in \{\chi_0\}} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot p(\chi) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

et, d'après l'équation fonctionnelle de la proposition 8.7(i), elle est invariante par la substitution  $f \mapsto \widehat{f}$ .

La série

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

est une fraction rationnelle en  $z \in \mathbb{C}$ . Elle converge absolument si  $|z| < q_{x_0}^{\frac{1}{2}}$  et sa valeur en  $z = 1$  est

$$\sum_{\chi_0 \in \{\chi_0\}} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot p(\chi) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Cette expression ne dépend pas du choix de la place  $x_0$ , et elle est invariante par la  $\rho_T$ -transformation de Fourier

$$f \mapsto \widehat{f}$$

d'après l'équation fonctionnelle de la proposition 8.7(i).

Cela prouve la partie (i) du théorème. □

En résumé :

- la formule de Poisson sur  $\mathbb{A}_E$  implique les propriétés habituelles des fonctions  $L$  des caractères automorphes de  $\mathbb{A}_E^\times = T_E(\mathbb{A})$ ,
- ces propriétés des fonctions  $L$  se transportent des caractères automorphes de  $T_E(\mathbb{A})$  à ceux de  $T(\mathbb{A})$ ,
- ces propriétés des fonctions  $L$  globales des caractères automorphes de  $T(\mathbb{A})$  impliquent la formule de Poisson et la formule de Poisson très ramifiée pour la donnée globale  $\rho_T$  sur  $T(\mathbb{A})$ .

### 9. Conséquences du cas des tores pour les groupes réductifs quasi-déployés

Dans cette section, on considère un groupe réductif  $G$  quasi-déployé sur le corps de fonctions  $F$  de corps des constantes  $\mathbb{F}_q$ . Ainsi,  $G$  possède une paire de Borel  $(T, B)$  définie sur  $F$ . Le groupe de Weyl

$$W^G = W_T^G = \{g \in G \mid g^{-1} T g = T\} / T$$

de  $G$  est muni d'une action du groupe de Galois  $\Gamma_F$  de  $F$ , et le produit semi-direct

$$W^G \rtimes \Gamma_F$$

agit sur le réseau  $X_T$  des caractères  $T \rightarrow \mathbb{G}_m$  de  $T$ , sur le réseau dual  $X_T^\vee$  des cocaractères  $\mathbb{G}_m \rightarrow T$  de  $T$  et sur le tore complexe  $\widehat{T}$  dual de  $T$ .

On suppose que  $G$  est muni d'un caractère non trivial

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m .$$

Il peut être vu comme un caractère non trivial

$$\det_G = \det_T : T \rightarrow \mathbb{G}_m$$

ou, de manière équivalente, comme un cocaractère non trivial

$$\widehat{\det}_G = \widehat{\det}_T : \widehat{\mathbb{G}}_m = \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{T}$$

fixé par la double action de  $W^G$  et de  $\Gamma_F$ .



Considérons maintenant une famille de  $r$  caractères

$$\rho_T^i : \widehat{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad 1 \leq i \leq r,$$

telle que les composés  $\rho_T^i \circ \widehat{\det}_G$ ,  $1 \leq i \leq r$ , soient tous égaux à l'identité de  $\mathbb{C}^\times$  et sur laquelle le produit semi-direct  $W^G \rtimes \Gamma_F$  agit via une action sur l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$  des indices.

Comme dans la section précédente, on note  $E$  l'extension séparable de degré  $r$  de  $F$  qui correspond à l'action de  $\Gamma_F$  sur l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$ ,  $T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$  le tore algébrique sur  $F$  dont le dual  $\widehat{T}_E$  s'identifie à  $(\mathbb{C}^\times)^r$  muni de l'action par permutation de  $\Gamma_F$ , et

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

l'homomorphisme dual de l'homomorphisme  $\Gamma_F$ -équivariant

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E.$$

En toute place  $x \in |F|$ , le choix d'une clôture séparable  $\overline{F}_x$  de  $F_x$  qui contient la clôture séparable  $\overline{F}$  de  $F$  définit le groupe de Galois  $\Gamma_{F_x}$  de  $F_x$  comme un sous-groupe du groupe de Galois  $\Gamma_F$  de  $F$ . Alors le groupe de Weyl  $F_x$ -rationnel

$$W_x^G = \{w \in W^G \mid \sigma(w) = w, \quad \forall \sigma \in \Gamma_{F_x}\}$$

agit sur l'ensemble d'indices  $\{1, \dots, r\}$  muni de l'action de  $\Gamma_{F_x}$ , ce qui signifie qu'il agit sur l'extension séparable  $E_x = E \otimes_F F_x$  de  $F_x$ .

Alors les fractions rationnelles

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) = L_x(\chi \circ \rho_T, Z),$$

et

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z) = \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T, \psi_x, Z),$$

associées dans la section précédente à tout caractère  $\chi \in \{\pi\}_x^T$  sont invariantes par l'action de  $W_x^G$  sur  $T(F_x)$  et  $\{\pi\}_x^T$ .

Or, pour toute représentation  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  qui est "de type torique" au sens de la section 1, c'est-à-dire dont le support supercuspidal a la forme  $(T, \chi)$  avec  $\chi \in \{\pi\}_x^T$ , ce support est bien défini modulo l'action de  $W_x^G$ .

Cela permet de poser la définition suivante :

DÉFINITION 9.1. — *Considérons comme ci-dessus une famille de  $r$  caractères*

$$\rho_T^i : \widehat{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad 1 \leq i \leq r,$$

telle que

$$\rho_T^i \circ \widehat{\det}_G = \text{id}_{\mathbb{C}^\times}, \quad 1 \leq i \leq r,$$

et sur laquelle le produit semi-direct  $W^G \rtimes \Gamma_F$  agit via une action sur l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$  des indices.

Notons toujours  $\rho_T$  l'homomorphisme  $\Gamma_F$ -équivariant

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

qui induit un homomorphisme dual de tores algébriques sur  $F$

$$\rho_T^\vee : T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m \rightarrow T.$$

Ayant choisi un caractère bien défini sur  $F$

$$\det_{\rho_T} : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

on notera aussi  $\rho_T$  l'unique "donnée globale" (au sens de la définition 7.1) qui consiste, en chaque place  $x \in |F|$ , à compléter  $\det_{\rho_T}$  en une "donnée locale normalisée" (au sens de la définition 6.5)

$$(\det_{\rho_T}, \{\pi\}_x^{G, \rho_T}, L_x(\rho_T, \bullet, Z), \varepsilon_x(\rho_T, \bullet, Z))$$

telle que :

- $\{\pi\}_x^{G, \rho_T}$  est la réunion des classes de représentations  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  qui sont "de type torique", c'est-à-dire ont un support supercuspidal de la forme  $(T, \chi)$  avec  $\chi \in \{\pi\}_x^T$ ,
- pour toute représentation  $\pi \in \{\pi\}_x^{G, \rho_T}$  dont le support discret est supercuspidal, donc de la forme  $(T, \chi)$ , on a

$$L_x(\rho_T, \pi, Z) = L_x(\rho_T, \chi, Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \pi, Z) = \varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z).$$

Remarque. — Il résulte du théorème 1.6 que, en toute place  $x \in |F| - S_G$  où  $G$  et donc aussi  $T$  sont non ramifiés, toutes les représentations non ramifiées  $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^G$  ont un support supercuspidal de la forme  $(T, \chi)$ , avec  $\chi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^T$ , et vérifient

$$L_x(\rho_T, \pi, Z) = L_x(\rho_T, \chi, Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \pi, Z) = \varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z)$$

même si leur support discret n'est pas supercuspidal.

Notant  $N_B$  le radical unipotent du sous-groupe de Borel  $B$  de  $G$ , munissons le quotient compact  $N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})$  de la mesure invariante  $du$  de volume 1.

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 9.2. — *Considérons une donnée globale  $\rho$  sur  $G(\mathbb{A})$  qui prolonge la donnée globale  $\rho_T$  de la définition 9.1 ci-dessus. Cela signifie que  $\det_\rho = \det_{\rho_T}$  et que, en toute place  $x \in |F|$ ,  $\{\pi\}_x^{G,\rho}$  contient  $\{\pi\}_x^{G,\rho_T}$  avec, pour toute  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho_T}$ ,*

$$L_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho_T, \pi, Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_x(\rho_T, \pi, Z).$$

Alors, pour toute  $\rho$ -fonction globale produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on a :

- (i) *Pour toute place  $x_0 \in |F| - S_G$  en laquelle  $G$  est non ramifié et le facteur  $f_{x_0}$  est sphérique, les séries formelles*

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma u)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( \widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (u^{-1} \gamma)$$

sont des fractions rationnelles égales entre elles. De plus, leurs “valeurs régularisées” en  $Z = 1$ , notées  $S_B(f)$  et  $S'_B(\widehat{f})$ , ne dépendent pas du choix de  $x_0$  et vérifient

$$S_B(f) = S'_B(\widehat{f}).$$

- (ii) *Si un facteur  $f_x$  de  $f$  est “très ramifié” (au sens de la définition 7.3) en au moins une place  $x \in |F|$ , on a nécessairement la formule*

$$\int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma u) = \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(u^{-1} \gamma).$$

*Démonstration.* — Les assertions ne dépendant pas du choix du caractère

$$\det_\rho = \det_{\rho_T} : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

on pourra supposer que

$$\det_\rho = \det_{\rho_T} = \det_G = \det_T.$$

Pour toute place  $x \in |F|$  et toute fonction localement constante

$$h_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont les restrictions aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, on notera

$$h_{x,B} : B(F_x)/N_B(F_x) = T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

la fonction

$$\begin{aligned} t_x \mapsto & |\delta_B(t_x)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du_x \cdot h_x(t_x u_x) \\ & = |\delta_B(t_x)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du_x \cdot h_x(u_x t_x) \end{aligned}$$

où  $du_x$  désigne la mesure invariante de  $N_B(F_x)$  associée à la mesure autoduale de  $F_x$ .

De même, pour toute fonction globale localement constante

$$h : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont les restrictions aux fibres de

$$|\det_G(\bullet)| : G(\mathbb{A}) \rightarrow q^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, on notera

$$h_B : B(\mathbb{A})/N_B(\mathbb{A}) = T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

la fonction

$$t \mapsto |\delta_B(t)|^{1/2} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot h(tu) = |\delta_B(t)|^{-1/2} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot h(ut).$$

Comme  $du = \bigotimes_{x \in |F|} du_x$ , on a dans le cas d'une fonction produit  $h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x$  l'égalité

$$h_B = \bigotimes_{x \in |F|} h_{x,B}.$$

On a :

LEMME 9.3. — *Sous les hypothèses du théorème 9.2 avec de plus*

$$\det_\rho = \det_{\rho_T} = \det_G = \det_T,$$

et pour toute  $\rho$ -fonction globale

$$f : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

les fonctions  $f_B$  et  $\widehat{f}_B$  sont des  $\rho_T$ -fonctions globales sur  $T(\mathbb{A})$ .

De plus, la fonction  $\widehat{f}_B$  est la  $\rho_T$ -transformation de Fourier de la fonction  $f_B$  sur  $T(\mathbb{A})$ .

*Démonstration.* — Il suffit de traiter le cas où  $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$  est une  $\rho$ -fonction globale produit de  $\rho$ -fonctions locales  $f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ .

La conclusion résulte de ce que, en toute place  $x \in |F|$ , l'opérateur linéaire

$$h_x \mapsto h_{x,B}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- si  $h_x$  est à support compact dans  $G(F_x)$ ,  $h_{x,B}$  est à support compact dans  $T(F_x)$ , et l'opérateur transforme  $g \mapsto h_x(g^{-1})$  en  $t \mapsto h_{x,B}(t^{-1})$ ,
- si de plus  $x \in |F| - S_G$  et  $h_x = \mathbf{1}_{G(O_x)}$ , alors  $h_{x,B} = \text{vol}(N_B(O_x)) \cdot \mathbf{1}_{T(O_x)}$ ,
- si  $h_x$  et  $h_{x,B}$  sont décomposées spectralement en

$$h_x(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\pi\}_x^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(\bullet)$$

et

$$h_{x,B}(\bullet) = |\det_G(\bullet)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\pi\}_x^T} d\chi \cdot h_{x,B,\chi}(\bullet),$$

chaque  $h_{x,B,\chi}$  ne dépend que des  $h_{x,\pi}$  indexées par les  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  qui admettent  $(T, \chi)$  pour support supercuspidal ; en particulier,  $h_{x,B}$  ne dépend que de la partie de la décomposition spectrale de  $h_x$  qui est indexée par les  $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho_T}$ . □

On a d'autre part :

LEMME 9.4. — *Sous les hypothèses du lemme 9.3 ci-dessus, considérons une  $\rho$ -fonction locale en une place  $x \in |F|$*

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Alors :

- (i) *Si  $G$  est non ramifié en  $x$  et la fonction  $f_x$  est sphérique, la fonction  $f_{x,B}$  sur  $T(F_x)$  est sphérique et, avec les notations de la définition 7.2, on a pour tous entiers  $N, N' \in \mathbb{N}$*

$$(f_x^{N,N'})_B = (f_{x,B})^{N,N'}$$

*si bien que l'on pourra noter sans ambiguïté  $f_{x,B}^{N,N'}$ .*

- (ii) *Si la fonction  $f_x$  sur  $G(F_x)$  est “très ramifiée” au sens de la définition 7.3(ii), la fonction  $f_{x,B}$  sur  $T(F_x)$  est aussi très ramifiée.*

On déduit de ces deux lemmes et du théorème 8.6 :

COROLLAIRE 9.5. — *Sous les hypothèses du théorème 9.2, et pour toute  $\rho$ -fonction globale produit  $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ , on a :*

- (i) *Pour toute place  $x_0 \in |F| - S_G$  en laquelle  $G$  est non ramifié et le facteur  $f_{x_0}$  est sphérique, les séries formelles*

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left( f_{x_0,B}^{N,N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_{x,B} \right) \right) (\gamma)$$

et

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left( \widehat{f}_{x_0,B}^{N,N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_{x,B} \right) \right) (\gamma)$$

*sont des fractions rationnelles égales entre elles. Elles n'ont pas de pôle dans le demi-tore  $|Z| \leq 1$ . Leurs valeurs en  $Z = 1$  ne dépendent pas du choix de  $x_0$  et sont égales.*

- (ii) *Si un facteur  $f_x$  de  $f$  en au moins une place  $x \in |F|$  est “très ramifié”, on a nécessairement*

$$\sum_{\gamma \in T(F)} f_B(\gamma) = \sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{f}_B(\gamma).$$

*Suite de la démonstration du théorème 9.2. — Dans l'énoncé du corollaire 9.5 ci-dessus, on peut remplacer  $f$  par sa translatée à gauche  $\delta f$  par n'importe quel élément  $\delta \in G(F)$ , ce qui revient à remplacer  $\widehat{f}$  par sa*

translatée à droite  $\widehat{f}^{\delta^{-1}}$ . Il est naturel de vouloir alors faire la somme sur les éléments  $\delta \in G(F)/B(F)$ .

Dans le cas (ii), seuls des  $\delta \in G(F)/B(F)$  en nombre fini apportent des contributions non nulles et on obtient que

$$\sum_{\delta \in B(F) \backslash G(F)} \sum_{\gamma \in T(F)} \delta f_B(\gamma) = \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma u)$$

est égal à

$$\sum_{\delta \in B(F) \backslash G(F)} \sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{f}_B^{\delta^{-1}}(\gamma) = \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(u^{-1} \gamma),$$

ce qui est l'assertion (ii) du théorème 9.2.

En revanche, pour la partie (i) du théorème 9.2, une difficulté apparaît du fait que la sommation  $\sum_{\delta \in G(F)/B(F)}$  appliquée aux séries formelles

$$\begin{aligned} & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left( (\delta f_{x_0, B})^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \delta f_{x, B} \right) \right) (\gamma) \\ &= \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left( (\widehat{f}_{x_0, B}^{\delta^{-1}})^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_{x, B}^{\delta^{-1}} \right) \right) (\gamma) \end{aligned}$$

est infinie.

On observe toutefois que, pour tous entiers  $N, N' \in \mathbb{N}$ , seuls un nombre fini de  $\delta \in G(F)/B(F)$  apportent des contributions

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in T(F)} \left( (\delta f_{x_0, B})^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \delta f_{x, B} \right) \right) (\gamma) \\ &= \sum_{\gamma \in T(F)} \left( (\widehat{f}_{x_0, B}^{\delta^{-1}})^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_{x, B}^{\delta^{-1}} \right) \right) (\gamma) \end{aligned}$$

qui ne soient pas nulles. On en déduit que les deux séries formelles

$$\begin{aligned} & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma u), \\ & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( \widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (u^{-1} \gamma), \end{aligned}$$

sont égales.

Il reste à prouver que ce sont des fractions rationnelles et que leurs “valeurs régularisées”  $S_B(f) = S'_B(\widehat{f})$  en  $Z = 1$  ne dépendent pas du choix de la place  $x_0$ .

Rappelant la décomposition de Bruhat

$$G(F) = \coprod_{w \in W_F^G} B(F) \cdot w \cdot N_B(F)$$

indexée par le groupe de Weyl  $F$ -rationnel

$$W_F^G = \{w \in W^G \mid \sigma(w) = w, \quad \forall \sigma \in \Gamma_F\},$$

on doit passer par la proposition suivante :

PROPOSITION 9.6. — *Sous les hypothèses du théorème 9.2, considérons une  $\rho$ -fonction globale produit*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et un élément  $w \in W_F^G$ .

Alors, pour toute place  $x_0 \in |F| - S_G$  en laquelle le facteur  $f_{x_0}$  est sphérique, la série formelle

$$\begin{aligned} & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \\ & \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (u^{-1} \gamma w u') \\ = & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \\ & \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \left( \widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (u'^{-1} w^{-1} \gamma u) \end{aligned}$$

est une fraction rationnelle, et sa “valeur régularisée” en  $Z = 1$ , notée

$$S_{B, x_0}^w(f) = S_{B, x_0}'(\widehat{f}),$$

ne dépend pas du choix de la place  $x_0$ .



*Démonstration.* — En notant  $f^{wu'}(\bullet)$  les fonctions translatées à droite  $f(\bullet w u')$ , les deux séries de l'énoncé s'écrivent encore

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A})/N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left( \left( f_{x_0, B}^{wu'} \right)^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_{x, B}^{wu'} \right) \right) (\gamma)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A})/N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left( \left( \widehat{f_{x_0, B}^{wu'}} \right)^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f_{x, B}^{wu'}} \right) \right) (\gamma).$$

Choisissons une famille finie  $\{\chi_0\}$  de représentants unitaires  $\chi_0$  des classes  $[\chi]$  des caractères automorphes  $\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  de  $T$  dont chaque facteur local  $\chi_x$ ,  $x \in |F|$ , est le support supercuspidal d'une représentation  $\pi_x \in \{\pi\}_x^G$  qui apparaît dans la décomposition spectrale du facteur local  $f_x$  de  $f$ .

Alors, pour tous entiers  $N, N' \in \mathbb{N}$  et tout  $u' \in N_B(\mathbb{A})$ , les fonctions

$$T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto |\det_T(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left( \left( f_{x_0, B}^{wu'} \right)^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_{x, B}^{wu'} \right) \right) (\gamma t)$$

et

$$T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto |\det_T(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left( \left( \widehat{f_{x_0, B}^{wu'}} \right)^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f_{x, B}^{wu'}} \right) \right) (\gamma t)$$

se décomposent spectralement sous la forme

$$\begin{aligned} \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right) \\ \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}-s}\right) \\ \cdot p_{f_B^{wu'}}\left(\chi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}\right) \cdot \chi(t) \cdot |\det_G(t)|^{-s} \end{aligned}$$

et

$$\sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0^{-1}]} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot p_{\widehat{f_B^{wu'}}}(\chi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}) \cdot \chi(t) \cdot |\det_G(t)|^{-s}$$

où

- les  $p_{f_B^{wu'}}(\bullet)$  sont des polynômes en les  $\chi \in [\chi_0]$ ,
- les  $p_{\widehat{f_B^{wu'}}}(\bullet)$  sont des polynômes en les  $\chi \in [\chi_0^{-1}]$  reliés aux précédents par les équations fonctionnelles

$$p_{\widehat{f_B^{wu'}}}(\chi^{-1}) = p_{f_B^{wu'}}(\chi) \cdot \varepsilon\left(\rho_T, \chi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \chi \in [\chi_0],$$

- $s$  est n'importe quel réel assez grand.

Nous devons maintenant intégrer au moyen de l'opérateur d'entrelacement

$$\int_{(N_B \cap w^{-1}N_B w)(\mathbb{A}) \backslash N_B(\mathbb{A})} du'.$$

Rappelons que chaque classe  $[\chi_0]$  est constituée des caractères de la forme

$$\chi = \chi_0 \otimes \lambda = \chi_{0,\lambda}, \quad \lambda \in \Lambda^T,$$

où  $\Lambda^T$  désigne le tore complexe des caractères automorphes  $\lambda : T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  qui sont triviaux sur tout sous-groupe compact de  $T(\mathbb{A})/T(F)$ . Pour tout cocaractère

$$\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \rightarrow T,$$

nécessairement défini sur une extension finie  $F'$  de  $F$ , le composé

$$\lambda \circ \alpha^\vee : \mathbb{A}_{F'}^\times / F'^{\times} \rightarrow T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

est nécessairement de la forme

$$|\text{Nm}_{F'/F}(\bullet)|_{\overline{[F':F]}}^s$$

et on peut noter

$$q^{-s} = \alpha^\vee(\lambda).$$

D'après les propriétés connues des opérateurs d'entrelacement et les équations fonctionnelles

$$p_{\widehat{f_B^{wu'}}}(\chi^{-1}) = p_{f_B^{wu'}}(\chi) \cdot \varepsilon\left(\rho_T, \chi, q^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \chi,$$

on a :

LEMME 9.7.

(i) Avec les notations ci-dessus, les intégrales

$$[\chi_0] \ni \chi \mapsto \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot p_{f_B w u'}(\chi) = R_{f_B}^w(\chi)$$

[resp.  $[\chi_0^{-1}] \ni \chi \mapsto \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot p_{\widehat{f_B w u'}}(\chi) = \widehat{R}_{f_B}^w(\chi)$  ]

convergent absolument en les éléments  $\chi$  de la forme

$$\chi = \chi_0 \otimes \lambda \quad [\text{resp. } \chi = \chi_0^{-1} \otimes \lambda]$$

avec

$$|\alpha^\vee(\lambda)| < q^{-1} \quad [\text{resp. } |\alpha^\vee(\lambda)| > q]$$

pour toute racine positive  $\alpha \in \Phi_G^+$  telle que  $w(\alpha)$  soit une racine négative.

(ii) Ces intégrales convergentes définissent des fractions rationnelles  $R_{f_B}^w$  et  $\widehat{R}_{f_B}^w$  sur les variétés complexes  $[\chi_0]$  et  $[\chi_0^{-1}]$ , reliées par l'équation fonctionnelle

$$\widehat{R}_{f_B}^w(\chi^{-1}) = R_{f_B}^w(\chi) \cdot \varepsilon\left(\rho_T, \chi, q^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \chi.$$

(iii) Dans chaque variété  $[\chi_0] = \{\chi_0 \otimes \lambda \mid \lambda \in \Lambda^T\}$  [resp.  $[\chi_0^{-1}] = \{\chi_0^{-1} \otimes \lambda \mid \lambda \in \Lambda^T\}$ ], la fraction rationnelle  $R_{f_B}^w$  [resp.  $\widehat{R}_{f_B}^w$ ] est le quotient d'un numérateur qui est un polynôme en  $\lambda^{\pm 1}$  et d'un dénominateur qui est un produit de facteurs de la forme

$$1 - \frac{\alpha^\vee(\lambda)}{z_{\chi_0, \alpha}} \quad [\text{resp. } 1 - \alpha^\vee(\lambda) \cdot z_{\chi_0, \alpha}]$$

où  $\alpha \in \Phi_G^+ \cap -w^{-1}(\Phi_G^+)$  et les  $z_{\chi_0, \alpha}$  sont, quand ils existent, des nombres complexes de module  $q^{-1}$  dépendant de  $\chi_0$  et de  $\alpha$ .

En particulier, les dénominateurs de ces fractions rationnelles sont invariants par l'action  $\chi \mapsto \chi \otimes |\det_G(\bullet)|^s$ ,  $s \in \mathbb{C}$ , et ils ne s'annulent pas en les caractères  $\chi$  unitaires.

On sait aussi d'après la proposition 8.7 que les produits

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}-s}\right)$$

sont des polynômes en  $\chi$  et  $q^{\pm s}$ . Avec le lemme 9.7 ci-dessus, cela implique :

COROLLAIRE 9.8. — La série formelle de la proposition 9.6 s'écrit comme la somme sur les représentants  $\chi_0$  des séries formelles

$$\begin{aligned} & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot R_{f_B}^w(\chi_{\lambda_0}) \\ = & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\chi_0^{-1}]} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \widehat{R}_{f_B}^w(\chi_{\lambda_0^{-1}}) \end{aligned}$$

pour n'importe quel élément  $\lambda_0 \in \Lambda^T$  tel que

$$|\alpha^\vee(\lambda_0)| < q^{-1}, \quad \forall \alpha \in \Phi_G^+ \cap -w^{-1}(\Phi_G^+).$$

Suite de la démonstration de la proposition 9.6. — Fixons un élément  $\lambda_0 \in \Lambda^T$  tel que, comme dans le corollaire 9.8 ci-dessus,

$$|\alpha^\vee(\lambda_0)| < q^{-1}, \quad \forall \alpha \in \Phi_G^+ \cap -w^{-1}(\Phi_G^+).$$

Alors il résulte de ce corollaire que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  de module  $|z|$  assez petit, la série

$$\begin{aligned} & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1}N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \\ & \quad \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (u^{-1} \gamma w u') \end{aligned}$$

converge absolument vers

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot R_{f_B}^w(\chi_{\lambda_0}) \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ & \quad \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \\ = & \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0^{-1}]} d\chi \cdot \widehat{R}_{f_B}^w(\chi_{\lambda_0^{-1}}) \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}^{-1}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Ces intégrales de contours se calculent comme des sommes de résidus qui sont nécessairement des fractions rationnelles en  $z$ .

Il en résulte que la série formelle de la proposition 9.6 est une fraction rationnelle en  $Z$ .

Il reste à prouver que sa “valeur régularisée” en  $Z = 1$  ne dépend pas du choix de la place  $x_0$ .

Commençons par l’analogie suivant du lemme 5.13 :

LEMME 9.9.

(i) Si la  $\rho$ -transformée de Fourier  $\widehat{f}_x$  de  $f_x$  est à support compact en au moins une place  $x \in |F|$ , on a

$$S_{B,x_0}^w(f) = \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u^{-1} \gamma w u').$$

(ii) De même, si  $f_x$  est à support compact en au moins une place  $x \in |F|$ , on a

$$S_{B,x_0}^{tw}(\widehat{f}) = \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \widehat{f}(u'^{-1} w^{-1} \gamma u).$$

Démonstration. — Choisissons un élément  $\lambda_0 \in \Lambda_T$  tel que

$$|\alpha^\vee(\lambda_0)| < q^{-1}, \quad \forall \alpha \in \Phi_G^+ \cap -w^{-1}(\Phi_G^+).$$

Quitte à remplacer  $\lambda_0$  par  $\lambda_0 \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}$  pour un réel  $s$  assez grand, on peut supposer que

$$\begin{aligned} & \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u^{-1} \gamma w u') \\ &= \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot R_{f_B}^w(\chi \lambda_0) \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Or si  $z \in \mathbb{C}$  est assez petit, la fraction rationnelle

$$\begin{aligned} R(z) &= \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A})} du' \\ &\quad \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (u^{-1} \gamma w u') \end{aligned}$$

est égale à la somme finie d’intégrales

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot R_{f_B}^w(\chi \lambda_0) \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ & \quad \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Cette même somme d'intégrales, considérée non plus au voisinage de  $z = 0$  mais au voisinage de  $z = 1$ , définit une autre fraction rationnelle en  $z$  que nous noterons  $R'(z)$ .

Comme  $R'$  est bien définie en 1 et y vaut

$$\sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot R_{f_B}^w(\chi_{\lambda_0}) \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right),$$

il s'agit de prouver que la "valeur régularisée" en  $z = 1$  de la fraction rationnelle

$$R'(z) - R(z)$$

est égale à 0.

La différence  $R'(z) - R(z)$  s'écrit comme une somme de résidus calculés le long des pôles qu'il faut traverser en allant de la zone  $|z| \ll 1$  à la zone  $|z| = 1$ .

D'après le choix de  $\lambda_0$ , les pôles de

$$L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

n'apparaissent pas au cours de cette traversée.

D'autre part, comme la transformée de Fourier  $\widehat{f}_x$  est à support compact en au moins une place  $x \in |F|$ , les pôles de la fonction  $L$  globale

$$L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

disparaissent par multiplication avec le facteur

$$R_{f_B}^w(\chi_{\lambda_0}) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Finalement, les seuls pôles qui apparaissent dans le calcul de la différence sont ceux de

$$L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Comme les fonctions à intégrer comportent en facteur supplémentaire le polynôme

$$L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1},$$

les résidus le long des pôles à traverser sont des fractions rationnelles en  $z$  bien définies en  $z = 1$  et qui y prennent la valeur 0.

Cela termine la preuve de la partie (i). La partie (ii) se démontre de la même façon. □

On déduit de ce lemme :

COROLLAIRE 9.10. — Soit  $x_1 \in |F| - S_G$  une autre place en laquelle le facteur  $f_{x_1}$  de  $f$  est sphérique. Alors :

(i) La différence des deux fonctionnelles

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto S_{B,x_0}^w(f)$$

et

$$f \mapsto S_{B,x_1}^w(f)$$

ne dépend que de la restriction de chaque  $\widehat{f}_x$ ,  $x \in |F|$ , au complémentaire d'une partie compacte arbitrairement grande de  $G(F_x)$ .

(ii) De même, la différence des deux fonctionnelles

$$f \mapsto S_{B,x_0}'^w(\widehat{f})$$

et

$$f \mapsto S_{B,x_1}'^w(\widehat{f})$$

ne dépend que de la restriction de chaque facteur  $f_x$ ,  $x \in |F|$ , de  $f$  au complémentaire d'une partie compacte arbitrairement grande de  $G(F_x)$ .

Démonstration.

(i) Soit  $f' = \bigotimes_{x \in |F|} f'_x$  une autre  $\rho$ -fonction globale produit telle que  $\widehat{f}_x$  et  $\widehat{f}'_x$  coïncident en dehors d'une partie compacte de  $G(F_x)$  en une certaine place et qu'ils sont égaux en les autres places.

Alors on a d'après le lemme 9.9(i)

$$S_{B,x_0}^w(f - f') = S_{B,x_1}^w(f - f')$$

soit

$$(S_{B,x_0}^w - S_{B,x_1}^w)(f) = (S_{B,x_0}^w - S_{B,x_1}^w)(f').$$

(ii) se déduit du lemme 9.9(ii) de la même façon. □

Fin de la démonstration de la proposition 9.6. — Comme dans le corollaire 9.10 ci-dessus, on considère une autre place  $x_1 \in |F| - S_G$  en laquelle le facteur  $f_{x_1}$  de  $f$  est sphérique.

Introduisons alors la série formelle en  $Z_0$  et  $Z_1$

$$\sum_{\substack{N_0, N'_0 \in \mathbb{N} \\ N_1, N'_1 \in \mathbb{N}}} Z_0^{N_0+N'_0} \cdot Z_1^{N_1+N'_1} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1}N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du$$

$$\cdot \left( f_{x_0}^{N_0, N'_0} \otimes f_{x_1}^{N_1, N'_1} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0, x_1} f_x \right) \right) (u^{-1} \gamma w u').$$

En procédant comme dans la démonstration de la première partie de la proposition 9.6, on montre que cette série formelle est une fraction rationnelle

$$R(Z_0, Z_1)$$

qui s'écrit comme le quotient d'un polynôme en  $Z_0$  et  $Z_1$  par le produit d'un polynôme en  $Z_0$ , d'un polynôme en  $Z_1$  et d'un polynôme en  $Z_0/Z_1$ .

Par conséquent, on peut parler de la valeur régularisée en  $Z_0 = 1$  de la valeur régularisée en  $Z_1 = 1$  de  $R(Z_0, Z_1)$ , ainsi que de la valeur régularisée en  $Z_1 = 1$  de sa valeur régularisée en  $Z_0 = 1$ , et elles sont égales.

Or, d'après le corollaire 9.10(i), la première est égale à

$$S_{B,x_0}^w(f)$$

et la seconde est égale à

$$S_{B,x_1}^w(f).$$

Ainsi, les deux fonctionnelles  $S_{B,x_0}^w$  et  $S_{B,x_1}^w$  coïncident sur les  $\rho$ -fonctions globales produit  $f = \otimes_{x \in |F|} f_x$  qui sont sphériques en les deux places  $x_0$  et  $x_1$ .

Il en est de même des deux fonctionnelles  $S_{B,x_0}'^w$  et  $S_{B,x_1}'^w$  puisque l'on a pour toute telle fonction  $f$

$$S_{B,x_0}^w(f) = S_{B,x_0}'^w(\widehat{f}),$$

$$S_{B,x_1}^w(f) = S_{B,x_1}'^w(\widehat{f}). \quad \square$$

*Fin de la démonstration du théorème 9.2(i).* — Il suffit de démontrer que pour toute fonction test localement constante à support compact

$$\varphi = \prod_{x \in |F|} \varphi_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

la  $\rho_T$ -fonction globale sur  $G(\mathbb{A})$

$$g' \mapsto \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot \varphi(g) \cdot |\det_G(g)|^{\frac{1}{2}} \cdot f(g'g)$$

et sa  $\rho_T$ -transformée de Fourier

$$g' \mapsto \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot \varphi(g) \cdot |\det_G(g)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \widehat{f}(g^{-1}g')$$

vérifient les propriétés du théorème 9.2.

Or, pour toute place  $x_0 \in |F|$  et tous entiers  $N, N' \in \mathbb{N}$ , les fonctions automorphes

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \ni g \mapsto \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N,N'} \otimes \left( \otimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (u \gamma g)$$



et

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \ni g \mapsto \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( \widehat{f}_{x_0}^{N,N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g^{-1} \gamma u^{-1})$$

ne laissent apparaître dans leur décomposition spectrale que des représentations automorphes dont le support cuspidal est constitué de caractères automorphes de  $T(\mathbb{A})$ , c'est-à-dire que des séries d'Eisenstein induites de  $B$  et leurs résidus.

On est donc réduit à prouver que pour toute fonction test localement constante à support compact

$$\varphi = \prod_{x \in |F|} \varphi_x : N_B(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

les séries formelles

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)/N_B(F)} \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot \varphi(g) \cdot |\det_G(g)|^{\frac{1}{2}} \cdot \left( f_{x_0}^{N,N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (u \gamma g)$$

et

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in N_B(F)\backslash G(F)} \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot \varphi(g) \cdot |\det_G(g)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( \widehat{f}_{x_0}^{N,N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g^{-1} \gamma u^{-1})$$

sont des fractions rationnelles égales entre elles, et que leurs "valeurs régularisées" en  $Z = 1$  ne dépendent pas du choix de la place  $x_0$ .

Cela résulte de la proposition 9.6. □

### 10. Transfert automorphe et formules de Poisson non linéaires

Dans cette section, on considère un groupe réductif  $G$ , pas nécessairement quasi-déployé, sur le corps de fonctions  $F$  de corps des constantes  $\mathbb{F}_q$ .

Le groupe réductif complexe  $\widehat{G}$  dual de  $G$  est naturellement muni d'une paire de Borel comprenant un tore maximal  $\widehat{T}$  et d'une action du groupe de Galois  $\Gamma_F$  de  $F$ .

On suppose que  $G$  est muni d'un caractère non trivial défini sur  $F$

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m .$$

Il lui correspond un cocaractère central de  $\widehat{G}$  fixé par  $\Gamma_F$

$$\widehat{\det}_G : \widehat{\mathbb{G}}_m = \mathbb{C}^\times \rightarrow Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G} .$$

Suivant Langlands, on appelle représentation de transfert de  $G$  tout homomorphisme algébrique continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) .$$

On dira qu'une telle représentation de transfert  $\rho$  est compatible avec le caractère  $\det_G$  de  $G$  si le cocaractère central correspondant

$$\widehat{\det}_G : \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \widehat{G}$$

agit sur l'espace  $\mathbb{C}^r$  de  $\rho$  par

$$z \mapsto z .$$

On a :

LEMME 10.1. — *On dit que la représentation de transfert*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

*est non ramifiée en une place  $x \in |F|$  si le groupe réductif  $G$  est non ramifié en cette place et l'action induite*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

*se factorise à travers le quotient non ramifié  $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$  de  $\Gamma_{F_x}$  en*

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) .$$

*Avec cette définition, on a :*

- (i) *Le sous-ensemble  $S_\rho \supset S_G$  de  $|F|$  constitué des places en lesquelles  $G$  ou  $\rho$  est ramifié est fini.*
- (ii) *En toute place  $x \in |F| - S_\rho$ ,  $\rho$  induit naturellement un homomorphisme entre algèbres de Hecke sphériques*

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \rightarrow \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

*et donc une application*

$$(\rho_x)_* : \{\pi\}_{x,\emptyset}^G \rightarrow \{\pi\}_{x,\emptyset}^r$$

de l'ensemble des représentations lisses admissibles irréductibles non ramifiées de  $G(F_x)$  vers celui de  $\mathrm{GL}_r(F_x)$ .

*Démonstration.* — (i) résulte de ce que l'homomorphisme algébrique continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

contient nécessairement dans son noyau un sous-groupe ouvert de  $\Gamma_F$ .

Prouvons maintenant (ii). En toute place  $x \in |F| - S_\rho$ ,  $\rho$  induit un homomorphisme

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

Or, d'après le théorème 1.6(iii), on a un isomorphisme canonique

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$$

de l'algèbre de Hecke sphérique de  $G(F_x)$  vers l'algèbre des fonctions algébriques sur  $\widehat{G}_x$ , la fibre de  $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$  au-dessus de l'élément de Frobenius  $\sigma_x \in \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$ , qui sont invariantes par conjugaison par  $\widehat{G}$ .

De même, on a un isomorphisme

$$S_x^r : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\widehat{\mathrm{GL}}_r]^{\widehat{\mathrm{GL}}_r}$$

de l'algèbre de Hecke sphérique de  $\mathrm{GL}_r(F_x)$  vers l'algèbre des fonctions algébriques invariantes par conjugaison sur  $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ .

La restriction à  $\widehat{G}_x$  via  $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  des fonctions invariantes par conjugaison sur  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  définit l'homomorphisme recherché

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \rightarrow \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G.$$

Cet homomorphisme induit une application

$$(\rho_x)_* : \{\pi\}_{x,\emptyset}^G \rightarrow \{\pi\}_{x,\emptyset}^r$$

puisque, d'après le théorème 1.6,  $\{\pi\}_{x,\emptyset}^G$  [resp.  $\{\pi\}_{x,\emptyset}^r$ ] est en bijection avec l'ensemble des caractères de l'algèbre commutative  $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$  [resp.  $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$ ].  $\square$

Langlands a proposé la définition suivante :

DÉFINITION 10.2. — *Étant donnée une représentation de transfert*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}),$$

on pose :

- (i) Une représentation automorphe  $\pi' = \bigotimes_{x \in |F|} \pi'_x$  de  $\mathrm{GL}_r$  est appelée un  $\rho$ -transfert global d'une représentation automorphe  $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$  de  $G$  si, en toute place  $x \in |F| - S_\rho$  où  $\pi_x$  est non ramifiée,  $\pi'_x$  est nécessairement non ramifiée et

$$\pi'_x = (\rho_x)_*(\pi_x).$$

- (ii) En n'importe quelle place  $x_0 \in |F|$ , une représentation lisse admissible irréductible  $\pi'_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^r$  de  $\mathrm{GL}_r(F_{x_0})$  est appelée un  $\rho$ -transfert local d'une représentation lisse admissible irréductible  $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^G$  de  $G(F_{x_0})$  s'il existe une représentation automorphe  $\pi$  de  $G$  admettant  $\pi_{x_0}$  pour composante en  $x_0$  et un  $\rho$ -transfert global  $\pi'$  de  $\pi$  admettant  $\pi'_{x_0}$  pour composante en  $x_0$ .

Remarques.

- (i) Les notions de  $\rho$ -transfert global ou local sont invariantes par conjugaison de  $\rho$  par les éléments de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ . On peut donc supposer toujours que  $\rho$  envoie le tore maximal  $\widehat{T}$  de  $\widehat{G}$  dans celui  $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$  de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ .
- (ii) On peut démontrer en utilisant la formule des traces d'Arthur-Selberg que toute représentation lisse admissible irréductible supercuspidale  $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^G$  de  $G$  en une place  $x_0 \in |F|$  est la composante locale en  $x_0$  d'au moins une représentation automorphe  $\pi$  de  $G(\mathbb{A})$  et en fait de beaucoup.
- (iii) Il résulte de la définition que, en toute place  $x \in |F| - S_\rho$ , les représentations non ramifiées  $\pi_x \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$  ne peuvent avoir d'autre  $\rho$ -transfert local que  $(\rho_x)_*(\pi_x)$ . En revanche, les représentations ramifiées peuvent avoir plusieurs transferts locaux différents.

Langlands avait conjecturé l'énoncé suivant, appelé principe de fonctorialité, qui est maintenant un théorème dans le cas des corps de fonctions où nous sommes :

THÉORÈME 10.3. — *Étant donnée une représentation de transfert*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}),$$

on a :

- (i) Toute représentation automorphe  $\pi$  de  $G$  admet au moins un  $\rho$ -transfert global  $\pi'$  dans  $\mathrm{GL}_r$ .
- (ii) En toute place  $x_0 \in |F|$  et pour toute représentation lisse admissible irréductible  $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^G$  de  $G(F_{x_0})$ , tous les  $\rho$ -transferts locaux  $\pi'_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^r$  de  $\pi_{x_0}$  dans  $\mathrm{GL}_r$  ont le même support supercuspidal. Il ne dépend que du support supercuspidal de  $\pi_0$  et de la restriction de  $\rho$  à  $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}}$ .

Démonstration. — Notons  $W_F \subset \Gamma_F$  le "groupe de Weil" de  $\Gamma_F$ , constitué des éléments dont l'image dans le groupe de Galois  $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$  du corps des constantes  $\mathbb{F}_q$  de  $F$  est une puissance de l'élément de Frobenius. Autrement

dit,  $W_F$  est défini par le carré cartésien :

$$\begin{CD} W_F @>\subset>> \Gamma_F \\ @VVV @VVV \\ \mathbb{Z} @>\subset>> \widehat{\mathbb{Z}} = \Gamma_{\mathbb{F}_q} \end{CD}$$

En toute place  $x \in |F|$ , le “groupe de Weil local”  $W_{F_x} = \Gamma_{F_x} \cap W_F$  est constitué des éléments de  $\Gamma_{F_x}$  dont l’image dans  $\Gamma_{F_x}^{\text{nr}} = \Gamma_{\kappa_x} = \Gamma_{\mathbb{F}_{q_x}}$  est une puissance de l’élément de Frobenius  $\sigma_x$ .

Choisissons un nombre premier  $\ell$  qui ne divise pas  $q$ , une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  de  $\mathbb{Q}_\ell$  et un isomorphisme  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ .

On dit qu’une représentation continue

$$\begin{aligned} \sigma : W_F &\rightarrow \text{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \widehat{\text{GL}}_r \\ \text{[resp. } \sigma : W_F &\rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \end{aligned}$$

est non ramifiée en une place  $x \in |F|$  si sa restriction au groupe de Weil local  $W_{F_x}$  se factorise à travers son quotient  $\sigma_x^{\mathbb{Z}}$ .

On dit qu’une représentation automorphe  $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$  de  $\text{GL}_r(\mathbb{A})$  [resp.  $G(\mathbb{A})$ ] et une représentation continue  $\sigma : W_F \rightarrow \text{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  [resp.  $\sigma : W_F \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ ] se correspondent au sens de Langlands si, en toute place  $x \in |F|$  [resp.  $x \in |F| - S_G$ ] où  $\pi$  est non ramifiée,  $\sigma$  est également non ramifiée et

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\pi_x}(h_x) &= h_x(\sigma(\sigma_x)), & \forall h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r &= \overline{\mathbb{Q}}_\ell [\widehat{\text{GL}}_r]^{\widehat{\text{GL}}_r}, \\ \text{[resp. } \text{Tr}_{\pi_x}(h_x) &= h_x(\sigma(\sigma_x), \sigma_x), & \forall h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G &= \overline{\mathbb{Q}}_\ell [\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}. \end{aligned}$$

On remarque que si  $\pi$  et  $\sigma$  se correspondent, alors  $\pi$  et la semi-simplifiée  $\sigma^{\text{ss}}$  de  $\sigma$  se correspondent également.

De plus, si  $M$  est un sous-groupe de Levi standard de  $\text{GL}_r$  [resp.  $G$ ] et  $(M, \pi_0)$  est le support cuspidal d’une représentation automorphe  $\pi$  de  $\text{GL}_r(\mathbb{A})$  [resp.  $G(\mathbb{A})$ ], alors  $\widehat{M}$  s’identifie à un sous-groupe de Levi standard de  $\widehat{\text{GL}}_r$  [resp.  $\widehat{G}$ ] et une représentation continue

$$\sigma_0 : W_F \rightarrow \widehat{M}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

correspond à  $\pi_0$  au sens de Langlands si et seulement si la représentation composée

$$W_F \rightarrow \widehat{M}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \hookrightarrow \text{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad \text{[resp. } W_F \rightarrow \widehat{M}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \hookrightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

correspond à  $\pi$ .

Ces remarques étant faites, on voit que la partie (i) du théorème 10.3 résulte du théorème ci-dessous combiné avec le théorème 2.2 :

THÉORÈME 10.4.

- (i) [5] *La correspondance de Langlands définit une bijection de l'ensemble des représentations automorphes cuspidales  $\pi$  de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$  sur l'ensemble des représentations continues, presque partout non ramifiées et irréductibles*

$$\sigma : W_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

- (ii) [9] *Quel que soit le groupe réductif  $G$  sur  $F$ , la correspondance de Langlands définit une application*

$$\pi \mapsto \sigma_\pi$$

*de l'ensemble des représentations automorphes cuspidales  $\pi$  de  $G(\mathbb{A})$  vers l'ensemble des représentations continues, presque partout non ramifiées et semi-simples*

$$\sigma : W_F \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

*Suite de la démonstration du théorème 10.3.* — En n'importe quelle place  $x \in |F|$ , on dit qu'une représentation lisse admissible irréductible  $\pi_x \in \{\pi\}_x^r$  [resp.  $\pi_x \in \{\pi\}_x^G$ ] de  $\mathrm{GL}_r(F_x)$  [resp.  $G(F_x)$ ] et une représentation continue

$$W_{F_x} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad [\text{resp. } W_{F_x} \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

se correspondent au sens de Langlands s'il est possible de les relever en un couple  $(\pi, \sigma)$  constitué d'une représentation automorphe  $\pi$  de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$  [resp.  $G(\mathbb{A})$ ] et d'une représentation continue

$$\sigma : W_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad [\text{resp. } W_F \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

qui se correspondent globalement au sens de Langlands.

La partie (ii) du théorème 10.3 résulte du théorème suivant qui complète le théorème 10.4 :

THÉORÈME 10.5. — *En toute place  $x \in |F|$ , on a :*

- (i) [5] *Pour tout rang  $r \geq 1$ , la correspondance de Langlands locale définit une bijection de l'ensemble des représentations lisses admissibles irréductibles supercuspidales de  $\mathrm{GL}_r(F_x)$  sur l'ensemble des représentations continues irréductibles*

$$W_{F_x} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

*De plus, si  $\pi_x \in \{\pi\}_x^r$  et une représentation continue  $\sigma : W_{F_x} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  se correspondent localement au sens de Langlands, alors*

le support supercuspidal de  $\pi_x$  et la semi-simplifiée  $\sigma^{\text{ss}}$  de  $\sigma$  se correspondent par la bijection ci-dessus.

- (ii) [2] Quel que soit le groupe réductif  $G$  sur  $F$  et pour toute paire  $(\pi_x, \sigma)$  constituée d'une représentation lisse admissible irréductible  $\pi_x \in \{\pi\}_x^G$  de  $G(F_x)$  et d'une représentation continue

$$\sigma : W_{F_x} \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

se correspondant au sens de Langlands, la semi-simplifiée  $\sigma^{\text{ss}}$  de  $\sigma$  est entièrement déterminée par le support supercuspidal de  $\pi_x$  et par l'action de  $\Gamma_{F_x}$  sur  $\widehat{G}$ .

Considérons maintenant une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

compatible avec le caractère  $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ .

Étant donnée une représentation lisse admissible irréductible supercuspidale  $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^G$  de  $G$  en une place  $x_0$ , considérons les triplets  $(G', \rho', \pi'_{x_0})$  constitués de

- un groupe réductif  $G'$  sur  $F$  muni d'un isomorphisme

$$G'_{F_{x_0}} \cong G_{F_{x_0}}$$

(si bien que le dual  $\widehat{G}'$  de  $G'$  muni de l'action de  $\Gamma_{F_{x_0}}$  s'identifie à  $\widehat{G}$  muni de l'action de  $\Gamma_{F_{x_0}}$ ),

- une représentation de transfert

$$\rho' : \widehat{G}' \rtimes \Gamma_F \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

dont la restriction à  $\widehat{G}' \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} = \widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}}$  coïncide avec celle de  $\rho$ ,

- un  $\rho'$ -transfert local  $\pi'_{x_0} \in \{\pi\}'_{x_0}$  de  $\pi_{x_0}$ .

Alors, d'après le théorème 10.3(ii) combiné avec le théorème 3.6, les facteurs

$$\gamma_{x_0}(\pi'_{x_0}, \psi_{x_0}, Z) = \frac{L_{x_0}(\pi'_{x_0}, Z) \cdot \varepsilon_{x_0}(\pi'_{x_0}, \psi_{x_0}, Z)}{L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^{\vee}, \frac{1}{q_{x_0} Z}\right)}$$

ne dépendent que de  $\pi_{x_0}$  et de la restriction  $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \xrightarrow{\rho} \text{GL}_r(\mathbb{C})$ . On peut donc les noter

$$\gamma_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z).$$

De plus, tous les polynômes

$$L_{x_0}(\pi'_{x_0}, Z)^{-1}$$

sont des multiples du dénominateur réduit de la fraction rationnelle en  $Z$

$$\gamma_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z).$$

Il en est de même de leur plus grand commun diviseur que l'on notera

$$L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z)^{-1}.$$

Enfin, on notera

$$\varepsilon_x(\rho, \pi_{x_0}, Z) = \frac{L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, \frac{1}{q_{x_0}Z}\right) \cdot \gamma_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z)}{L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z)}.$$

C'est automatiquement un monôme en  $Z$ .

Plus généralement, étant donnée une représentation lisse admissible irréductible  $\pi \in \{\pi\}_{x_0}^G$  de  $G$  en  $x_0$  dont le support discret  $(M_{x_0}, \pi_0)$  est supercuspidal, considérons les triplets  $(M, \rho_M, \pi'_0)$  constitués de

- un groupe réductif  $M$  sur  $F$  muni d'un isomorphisme

$$M_{F_{x_0}} \cong M_{x_0}$$

(si bien que le dual  $\widehat{M}$  de  $M$  muni de l'action de  $\Gamma_{F_{x_0}}$  s'identifie à celui  $\widehat{M}_{x_0}$  de  $M_{x_0}$  plongé dans  $\widehat{G}$ ),

- une représentation de transfert

$$\rho_M : \widehat{M} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

dont la restriction à  $\widehat{M} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}}$  coïncide avec

$$\widehat{M}_{x_0} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \hookrightarrow \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}),$$

- un  $\rho_M$ -transfert local  $\pi'_0 \in \{\pi\}_{x_0}^r$  de  $\pi_0$ .

Alors le facteur

$$\gamma_{x_0}(\pi'_0, \psi_{x_0}, Z)$$

ne dépend que de  $\pi_0$  et de la restriction  $\widehat{M}_{x_0} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ , et on peut le noter

$$\gamma_{x_0}(\rho, \pi, Z) = \gamma_{x_0}(\rho, \pi_0, Z).$$

Puis on note

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z)^{-1} = L_{x_0}(\rho, \pi_0, Z)^{-1}$$

le plus grand commun diviseur des

$$L_{x_0}(\pi'_0, Z)^{-1}$$

et enfin

$$\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi_0, Z) = \frac{L_{x_0}\left(\rho, \pi_0^\vee, \frac{1}{q_{x_0}Z}\right) \cdot \gamma_{x_0}(\rho, \pi_0, Z)}{L_{x_0}(\rho, \pi_0, Z)}.$$



Le corollaire 6.4 permet de compléter les applications

$$\pi \mapsto L_{x_0}(\rho, \pi, Z)$$

et

$$\pi \mapsto \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z)$$

pour obtenir le corollaire suivant du théorème 10.3 :

**COROLLAIRE 10.6.** — *Considérons une représentation de transfert*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

*compatible avec le caractère  $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ , et un caractère*

$$\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

*Alors il existe une unique façon de définir en chaque place  $x_0 \in |F|$  une “donnée normalisée” au sens de la définition 6.5*

$$\{\pi\}_{x_0}^G \ni \pi \mapsto \begin{cases} L_{x_0}(\rho, \pi, Z) \\ \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z) \end{cases}$$

*qui coïncide avec les  $L_{x_0}(\rho, \pi, Z)$  et  $\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z)$  définis ci-dessus lorsque le support discret de  $\pi$  est supercuspidal.*

*Elle est telle que pour toute paire  $(\pi, \pi')$  constituée d’une représentation  $\pi \in \{\pi\}_{x_0}^G$  et d’un  $\rho$ -transfert local  $\pi' \in \{\pi\}_{x_0}^r$  de  $\pi$ , le facteur*

$$\gamma_{x_0}(\rho, \pi, Z) = \frac{L_{x_0}(\rho, \pi, Z) \cdot \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z)}{L_{x_0}\left(\rho, \pi^\vee, \frac{1}{q_{x_0} Z}\right)}$$

*est égal à*

$$\gamma_{x_0}(\pi', \psi_{x_0}, Z)$$

*et le polynôme*

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

*divise le polynôme*

$$L_{x_0}(\pi', Z)^{-1}.$$

Jusqu’à présent, on ne sait pas donner d’expression directe générale des fractions rationnelles

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z)$$

et

$$\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z)$$

en fonction de  $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  et de  $\pi \in \{\pi\}_{x_0}^G$ .

Il résulte cependant de la définition du  $\rho$ -transfert global ou local que, en toute place non ramifiée  $x_0 \in |F| - S_\rho$ , la famille des

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_{x_0, \emptyset}^G$$

[resp.  $\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_{x_0, \emptyset}^G$ ],

vue comme un élément de

$$\mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^G[[Z]] \quad [\text{resp.} \quad \mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^G[Z^{\pm 1}]],$$

est la transformée par l'homomorphisme  $\rho_{x_0}^* : \mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^r \rightarrow \mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^G$  de la famille des

$$L_{x_0}(\pi', Z), \quad \pi' \in \{\pi\}_{x_0, \emptyset}^r$$

[resp.  $\varepsilon_{x_0}(\pi', \psi_{x_0}, Z), \quad \pi' \in \{\pi\}_{x_0, \emptyset}^r$ ],

vue comme un élément de

$$\mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^r[[Z]] \quad [\text{resp.} \quad \mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^r[Z^{\pm 1}]].$$

On a aussi :

PROPOSITION 10.7. — *Considérons toujours une représentation de transfert*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

*compatible avec le caractère  $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ .*

*Et supposons que*

- *$G$  est quasi-déployé sur  $F$ , avec un tore maximal  $T$ ,*
- *$\rho$  induit un homomorphisme de tores*

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r,$$

- *le groupe de Galois  $\Gamma_F$  agit sur l'espace  $\mathbb{C}^r$  de  $\rho$  par des permutations de ses  $r$  vecteurs de base, si bien que  $W^G \rtimes \Gamma_F$  agit sur les caractères  $\rho_T^i, 1 \leq i \leq r$ , via une action sur l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$  de leurs indices.*

*Alors, pour toute place  $x_0 \in |F|$  et toute représentation  $\pi \in \{\pi\}_x^G$  dont le support discret est de la forme  $(T, \chi)$ , on a avec les notations de la définition 8.4*

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z) = L_{x_0}(\rho_T, \chi, Z),$$

$$\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_{x_0}(\rho_T, \chi, Z).$$

En une place arbitraire  $x_0 \in |F|$ , considérons les représentations  $\pi \in \{\pi\}_{x_0}^G$  de la forme

$$\pi = \pi_0 \otimes (\omega \circ \det_G) = \pi_0 \cdot \omega$$

où  $\pi_0 \in \{\pi\}_{x_0, K_{x_0}}^G$  est de ramification bornée par un sous-groupe ouvert compact  $K_{x_0} \subset G(F_{x_0})$  et  $\omega : F_{x_0} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  est un caractère très ramifié.

Alors tout  $\rho$ -transfert local  $\pi'$  de  $\pi$  par une représentation  $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  compatible avec  $\det_G$  est nécessairement de la forme

$$\pi' = \pi'_0 \otimes (\omega \circ \det) = \pi'_0 \cdot \omega$$

où  $\pi'_0$  est un  $\rho$ -transfert local de  $\pi_0$  donc est de ramification bornée par un sous-groupe ouvert compact  $K'_{x_0} \subset \mathrm{GL}_r(F_{x_0})$  qui ne dépend que de  $K_{x_0}$  et de la restriction  $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ .

Or on a d'après le théorème 3.8(ii) que

$$L_{x_0}(\pi'_0 \cdot \omega, Z) = 1$$

et

$$\varepsilon_{x_0}(\pi'_0 \cdot \omega, \psi_{x_0}, Z) = \varepsilon_{x_0}(\chi_{\pi'_0} \cdot \omega, \psi_{x_0}, Z) \cdot \varepsilon_{x_0}(\omega, \psi_{x_0}, Z)^{r-1}$$

si  $\omega$  est assez ramifié en fonction de  $K'_{x_0}$  et  $\chi_{\pi'_0}$  désigne le caractère central de  $\pi'_0$ .

De plus, le caractère central  $\chi_{\pi'_0}$  de  $\pi'_0$  s'exprime en fonction de  $\pi_0$  de la manière suivante :

LEMME 10.8. — Soit  $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  une représentation de transfert de  $G$  compatible avec le caractère  $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ .

Soit

$$\mu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow G$$

le cocaractère central dual du caractère composé fixé par  $\Gamma_F$

$$\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times,$$

et soit

$$\omega_\rho : \mathbb{A}^\times / F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

le caractère continu d'ordre fini qui correspond par la théorie du corps de classes au caractère composé continu

$$\Gamma_F \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times.$$

Alors :

- (i) Pour toute représentation automorphe  $\pi$  de  $G(\mathbb{A})$  et tout  $\rho$ -transfert global  $\pi'$  de  $\pi$  dans  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ , on a

$$\chi_{\pi'} = \chi_\pi \cdot \omega_\rho$$

si  $\chi_\pi$  désigne le caractère par lequel  $\mathbb{A}^\times$  agit sur  $\pi$  via  $\mu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ .

(ii) Pour toute représentation  $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^G$  de  $G(F_{x_0})$  en une place  $x_0$  et pour tout  $\rho$ -transfert local  $\pi'_{x_0}$  de  $\pi_{x_0}$ , on a

$$\chi_{\pi'_{x_0}} = \chi_{\pi_{x_0}} \cdot \omega_\rho$$

si  $\chi_{\pi_{x_0}}$  désigne le caractère par lequel  $F_{x_0}^\times$  agit sur  $\pi_{x_0}$  via  $\mu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow G$ .

*Démonstration.*

(ii) résulte de (i).

(i) résulte de (ii) dans le cas où  $x_0 \in |F| - S_\rho$ ,  $\pi_{x_0}$  est non ramifiée et  $\pi'_{x_0} = (\rho_{x_0})_*(\pi_{x_0})$ .

Or, en une telle place  $x_0$ , l'homomorphisme

$$\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r = \mathbb{C}[\widehat{\mathrm{GL}}_r]^{\widehat{\mathrm{GL}}_r} \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}} = \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

est induit par le morphisme

$$\widehat{G}_{x_0} \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

La restriction à la fibre  $\widehat{G}_{x_0}$  de  $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}}^{\mathrm{nr}}$  au-dessus de l'élément de Frobenius  $\sigma_{x_0}$  de la fonction invariante  $\det$  sur  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$  est le produit de sa restriction à  $\widehat{G}$  et du scalaire  $\det \circ \rho(\sigma_{x_0})$ .

D'où la formule annoncée. □

On déduit de ce lemme :

**COROLLAIRE 10.9.** — *Dans la situation et avec les notations du lemme 10.8 ci-dessus, on a pour toute place  $x_0 \in |F|$ , toute représentation  $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x,K_{x_0}}^G$  de ramification bornée par un sous-groupe ouvert compact  $K_{x_0} \subset (F_{x_0})$  et tout caractère*

$$\omega : F_{x_0}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

assez ramifié en fonction de  $K_{x_0}$  et de  $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ , les formules

$$L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0} \cdot \omega, Z) = 1$$

$$\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi_{x_0} \cdot \omega, Z) = \varepsilon_{x_0}(\chi_{\pi_{x_0}} \cdot \omega_\rho \cdot \omega, \psi_{x_0}, Z) \cdot \varepsilon_{x_0}(\omega, \psi_{x_0}, Z)^{r-1}.$$

Pour toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de  $G(\mathbb{A})$ , on note

$$L(\rho, \pi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, Z^{\mathrm{deg}(x)})$$

qui est bien défini a priori en tant que série formelle en  $Z$ , et

$$\varepsilon(\rho, \pi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\rho, \pi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien défini comme monôme en  $Z$  puisque les monômes locaux  $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, Z)$  sont nécessairement égaux à 1 en presque toute place  $x \in |F|$ .

On déduit du théorème 10.3 et des corollaires 10.6 et 10.9 :

**THÉORÈME 10.10.** — *Pour toute représentation automorphe*

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de  $G(\mathbb{A})$ , on a :

(i) *Le produit*

$$L(\rho, \pi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, q_x^{-s})$$

*converge absolument pour tout  $s \in \mathbb{C}$  dont la partie réelle est assez grande.*

(ii) *Sa limite*

$$L(\rho, \pi, q^{-s})$$

*est une fraction rationnelle en  $q^{-s} = Z$ .*

(iii) *Les fractions rationnelles  $L(\rho, \pi, Z)$  et  $L(\rho, \pi^\vee, Z)$  sont reliées par l'équation fonctionnelle*

$$L\left(\rho, \pi^\vee, \frac{1}{qZ}\right) = L(\rho, \pi, Z) \cdot \varepsilon(\rho, \pi, Z).$$

(iv) *Si, en au moins une place  $x_0 \in |F|$ , le facteur local  $\pi_{x_0}$  de  $\pi$  est le produit*

$$\pi_{x_0} = \pi_0 \otimes (\omega \circ \det_G) = \pi_0 \cdot \omega$$

*d'une représentation  $\pi_0 \in \{\pi\}_{x_0, K_0}^G$  de ramification bornée par un sous-groupe ouvert compact  $K_0 \subset G(F_{x_0})$  et d'un caractère  $\omega : F_{x_0}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  assez ramifié en fonction de la borne  $K_0$  et de  $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ , alors la fraction rationnelle*

$$L(\rho, \pi, Z)$$

*n'a pas de pôles, c'est un polynôme en  $Z$ .*

(v) Pour toute place  $x_0 \in |F| - S_G$  en laquelle le facteur local  $\pi_{x_0}$  de  $\pi$  est non ramifié, le produit

$$L\left(\rho, \pi, Z \cdot q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, Z^{\deg(x_0)} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, Z^{-\deg(x_0)} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

est un polynôme en  $Z$ .

*Démonstration.* — Il existe au moins une représentation automorphe  $\pi' = \bigotimes_{x \in |F|} \pi'_x$  de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$  qui soit un  $\rho$ -transfert global de  $\pi$ .

En toute place  $x \in |F| - S_\rho$  où  $\pi_x$  est non ramifié, on a

$$L_x(\rho, \pi_x, Z) = L_x(\pi'_x, Z)$$

d'où les propriétés (i) et (ii).

De plus, on a en toute place  $x \in |F|$  sans exception

$$\gamma_x(\rho, \pi_x, Z) = \gamma_x(\pi'_x, \psi_x, Z)$$

d'où la propriété (iii).

En les places  $x$  en nombre fini où  $\rho$  ou  $\pi_x$  est ramifié,

$$L_x(\rho, \pi_x, Z)$$

est toujours le produit de

$$L_x(\pi'_x, Z)$$

et d'un polynôme en  $Z$ . Donc la fraction rationnelle globale

$$L(\rho, \pi, Z)$$

est le produit de

$$L(\pi', Z)$$

et d'un polynôme en  $Z$ .

(iv) résulte alors du corollaire 4.3.

(v) En une telle place  $x_0 \in |F| - S_G$  où  $\pi_{x_0}$  est non ramifiée, on a d'après la proposition 10.7

$$L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z) = L_{x_0}(\pi'_{x_0}, Z), \\ \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z) = \varepsilon_{x_0}(\pi'_{x_0}, \psi_{x_0}, Z).$$

Comme  $L(\rho, \pi, Z)$  est le produit de  $L(\pi', Z)$  et d'un polynôme en  $Z$ , on est ramené au fait que

$$L\left(\pi', Z \cdot q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi'_{x_0}, Z^{\deg(x_0)} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, Z^{-\deg(x_0)} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et un polynôme en  $Z$ , comme démontré dans le lemme 5.6. □

Nous allons déduire de ce théorème le théorème suivant qui généralise le corollaire 5.2 et le théorème 5.4 et qui constitue le principal résultat de l'article :

THÉOREME 10.11. — *Soit une représentation de tranfert*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

qui est compatible avec le caractère  $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ .

Étant donné un caractère

$$\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

complétons-le en la “donnée globale” induite par  $\rho$  définie dans le corollaire 10.6.

Alors :

- (i) La  $\rho$ -transformation de Fourier des  $\rho$ -fonctions globales sur  $G(\mathbb{A})$  satisfait la formule de Poisson de la définition 7.3(i).
- (ii) Elle satisfait également la formule de Poisson très ramifiée de la définition 7.3(ii).

*Démonstration.* — L'énoncé ne dépend pas du choix du caractère  $\det_\rho$ , donc on peut supposer que  $\det_\rho$  est trivial.

Comme dans la section 2, on choisit une paire  $(T_0, B_0)$  constituée d'un sous-tore  $T_0$  de  $G$ , défini sur  $F$  et maximal pour cette propriété, et d'un sous-groupe parabolique  $B_0$  de  $G$ , contenant  $T_0$ , défini sur  $F$  et minimal pour cette propriété. Le centralisateur  $M_0$  de  $T_0$  dans  $G$  est un sous-groupe de Levi de  $B_0$ . On appelle “standard” les sous-groupes paraboliques  $P$  [resp. les sous-groupes de Levi  $M$ ] de  $G$  définis sur  $F$  et contenant  $B_0$  [resp.  $M_0$ ]. Tout sous-groupe parabolique standard possède un unique sous-groupe de Levi standard  $M_P$ , et l'application ainsi définie  $P \mapsto M_P$  est une injection.

En toute place non ramifiée  $x \in |F| - S_G$ , on choisit une paire de Borel  $(T_x, B_x)$  de  $G$ , définie sur  $F_x$  et telle que  $T_x \supset T_0$  et  $B_x \subset B_0$ . Elle définit une structure entière de  $G$  sur  $O_x$  et donc un sous-groupe ouvert compact maximal  $K_{x,\emptyset} = G(O_x)$  de  $G(F_x)$  tel que  $G(F_x) = B_x(F_x) \cdot G(O_x)$  et a fortiori  $G(F_x) = B_0(F_x) \cdot K_{x,\emptyset}$ .

En les places restantes  $x \in S_G$ , on choisit un sous-groupe ouvert compact maximal  $K_{x,\emptyset}$  de  $G(F_x)$  tel que  $G(F_x) = B_0(F_x) \cdot K_{x,\emptyset}$ .

Ainsi,  $K_\emptyset = \prod_{x \in |F|} K_{x,\emptyset}$  est un sous-groupe ouvert compact maximal de  $G(\mathbb{A})$  tel que  $G(\mathbb{A}) = B_0(\mathbb{A}) \cdot K_\emptyset$ .

Étant donné un sous-groupe ouvert compact

$$K = \prod_{x \in |F|} K_x \subset K_\emptyset,$$

on considère les paires  $(M_P, \pi)$  constituées d'un sous-groupe de Levi standard  $M_P$  de  $G$  (provenant d'un unique sous-groupe parabolique standard  $P$  dont le radical unipotent est noté  $N_P$ ) et d'une représentation auto-morphe de carré intégrable  $\pi$  de  $M_P(\mathbb{A})$  telle que l'espace  $L^2_\pi(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)$  ne soit pas nul. Leurs classes d'équivalence faible sont en nombre fini, et on peut en choisir un ensemble fini de représentants unitaires  $(M_P, \pi_0)$ .

Alors, pour toute fonction à support compact

$$h : K \backslash G(\mathbb{A})/K \rightarrow \mathbb{C}$$

et pour tous éléments  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ , on a d'après le théorème 2.3 de décomposition spectrale de Langlands

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2)$$

où chaque fraction rationnelle

$$[\pi_0] \ni \pi \mapsto h_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)} (h * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\bar{\varphi})(g_1)$$

ne dépend pas du choix de la base orthonormée finie  $\mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)$  de l'espace  $L^2_{\pi_0}(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)$  et est invariante par l'action du groupe fini  $\text{Fixe}(M_P, \pi_0)$  sur  $[\pi_0]$ .

On commence par le lemme suivant :

LEMME 10.12. — *Considérons une  $\rho$ -fonction globale produit*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est bi-invariante par  $K = \prod_{x \in |F|} K_x$ .

En chaque place  $x \in |F|$ , considérons la décomposition spectrale de  $f_x$  donnée par la définition 6.1(i)

$$f_x(\bullet) = \int_{\text{Im} \{ \pi \}_{x, K_x}^G} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x \left( \rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}} \right)$$

et définissons une fonction

$$h_x : K_x \backslash G(F_x)/K_x \rightarrow \mathbb{C}$$

par la décomposition spectrale

$$h_x(\bullet) = \int_{\text{Im} \{ \pi \}_{x, K_x}^G} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet).$$



Alors :

- (i) La fonction  $h_x$  est la fonction caractéristique  $\mathbb{1}_{G(O_x)}$  en toute place  $x \in |F| - S_G$  où  $f_x$  est la “ $\rho$ -fonction locale standard” au sens de la définition 7.1.

En les autres places,  $h_x$  n'est pas nécessairement à support compact, mais elle agit sur chaque classe de  $\{\pi\}_{x, K_x}^G$  comme un élément de  $\mathcal{H}_{x, K_x}^G$ .

Par conséquent,  $h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x$  agit sur chaque classe  $[\pi_0]$  de représentations automorphes comme un élément de  $\mathcal{H}_K^G$ .

- (ii) Pour tout réel  $s$  assez grand et tous éléments  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ , on a

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où, pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$  et toute  $\pi \in [\pi_0]$ , on note encore

$$h_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)} (h * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\bar{\varphi})(g_1).$$

- (iii) De même, si  $x_0 \in |F| - S_G$  est une place en laquelle  $f_{x_0}$  est sphérique, on a pour tout réel  $s$  assez grand, tous entiers  $N, N' \in \mathbb{N}$  et tous éléments  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2) \\ &= \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Démonstration.

- (i) résulte de ce que les  $f_{x, \pi}(\bullet)$  sont des fonctions polynomiales de  $\pi \in \{\pi\}_{x, K_x}^G$ .

(ii) résulte du théorème II.3 de décomposition spectrale de Langlands, du théorème 10.10(i) et de ce que, par définition de l'espace des  $\rho$ -fonctions globales, la restriction de  $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$  à chaque fibre de l'homomorphisme

$$|\det(\bullet)| : \text{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow q^{\mathbb{Z}}$$

est supportée par une partie compacte.

(iii) est déduit de (ii) en remplaçant  $f$  par  $f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right)$ .  $\square$

Considérons d'autre part la  $\rho$ -transformée de Fourier  $\widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x$  de  $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$ . En toute place  $x \in |F|$ , les décompositions spectrales de  $f_x$  et  $\widehat{f}_x$

$$f_x(\bullet) = \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x, K_x}^G} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x \left( \rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}} \right),$$

$$\widehat{f}_x(\bullet) = \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x, K_x}^G} d\pi \cdot \widehat{f}_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x \left( \rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}} \right),$$

sont reliées par les formules

$$\widehat{f}_{x, \pi^\vee}(g) = f_{x, \pi}(g^{-1}) \cdot \varepsilon_x \left( \rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}} \right), \quad \forall \pi.$$

On définit en toute place  $x \in |F|$  une fonction

$$\widehat{h}_x : K_x \backslash G(F_x) / K_x \rightarrow \mathbb{C}$$

par la décomposition spectrale

$$\widehat{h}_x(\bullet) = \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x, K_x}^G} d\pi \cdot \widehat{f}_{x, \pi}(\bullet),$$

puis on forme le produit global

$$\widehat{h} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{h}_x$$

et on pose pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$ , tout  $\pi \in [\pi_0^\vee]$  et tous éléments  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$

$$\widehat{h}_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0^\vee)} (\widehat{h} * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\overline{\varphi})(g_1).$$

D'après le lemme 10.12 appliqué à  $\widehat{f}$ , on a, pour n'importe quel réel  $s$  assez grand, les formules

$$\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(g_2^{-1} \gamma g_1) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im} [\pi_0^\vee]} d\pi \cdot \widehat{h}_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_2, g_1) \cdot L \left( \rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}} \right)$$

et, pour tous entiers  $N, N' \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in G(F)} \left( \widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g_2^{-1} \gamma g_1) \\ &= \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0^\vee]} d\pi \cdot \widehat{h}_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_2, g_1) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Or on a :

LEMME 10.13. — *Pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$  et tous éléments  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ , on a :*

(i) *Les fonctions*

$$\begin{aligned} [\pi_0] \ni \pi &\mapsto h_\pi(g_1, g_2), \\ [\pi_0] \ni \pi &\mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1) \end{aligned}$$

*sont des fractions rationnelles en  $\pi$ .*

*Elles admettent un dénominateur indépendant de  $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ , invariant par l'action de  $\Lambda^G$  et qui ne s'annule pas sur  $\text{Im}[\pi_0]$  ni donc sur  $\Lambda^G \cdot \text{Im}[\pi_0] \supset \{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^s, \pi \in \text{Im}[\pi_0], s \in \mathbb{C}\}$ .*

(ii) *Ces fractions rationnelles sont reliées par l'équation fonctionnelle*

$$\widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1) = h_\pi(g_1, g_2) \cdot \varepsilon\left(\rho, \pi, q^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \pi \in [\pi_0].$$

*Démonstration.*

(i) résulte des propriétés connues des séries d'Eisenstein

$$\pi \mapsto E_\pi(\varphi), \quad \varphi \in L_{\pi_0}^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K).$$

(ii) résulte de ce que, en toute place  $x \in |F|$ ,

$$\widehat{f}_{x, \pi^\vee}(g) = f_{x, \pi}(g^{-1}) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall g, \quad \forall \pi.$$

□

D'après ce lemme et le théorème 10.3, on passe de la somme

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(g_1^{-1} \gamma g_2) \quad [\text{resp.} \quad \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2)]$$

à la somme

$$\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(g_2^{-1} \gamma g_1) \quad [\text{resp.} \quad \sum_{\gamma \in G(F)} \left( \widehat{f}_{x_0}^{N', N} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g_2^{-1} \gamma g_1)]$$

par un déplacement de contours d'intégration, de  $\text{Re}(s) \gg 0$  à  $\text{Re}(s) \ll 0$ , des intégrales

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

[resp.  $\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right)$

$$\cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)].$$

Si  $f$  est très ramifiée en au moins une place, le théorème X.10(iv) implique que les facteurs

$$L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

n'ont pas de pôle.

Les intégrales pour  $\text{Re}(s) \gg 0$  et  $\text{Re}(s) \ll 0$  sont donc égales, soit

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(g_2^{-1} \gamma g_1).$$

Cela prouve la partie (ii) du théorème 10.11.

Dans le cas général, on sait d'après le théorème X.10(v) que les produits

$$L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

n'ont jamais de pôles.

On en déduit :

LEMME 10.14.

(i) Pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$ , les séries formelles

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2)$$

$$\cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\pi_0^\vee]} d\pi \cdot \widehat{h}_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_2, g_1) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

sont indépendantes de  $s \in \mathbb{C}$  et égales entre elles.

- (ii) Leurs sommes sur les représentants  $(M_P, \pi_0)$ , qui sont les séries formelles

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( \widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g_2^{-1} \gamma g_1),$$

sont égales.

Puis on obtient :

**COROLLAIRE 10.15.**

- (i) Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  de module  $|z|$  assez petit, les séries en  $Z = z$  du lemme 10.14(i) ci-dessus convergent absolument vers les intégrales

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

- (ii) Ces intégrales définissent des fractions rationnelles en  $z$ .

*Démonstration.* — (i) résulte du lemme 10.14(i) en prenant  $s = 0$ .

Prouvons maintenant (ii). Si  $\Lambda^{M_P}$  est un tore de dimension  $k$ , donc isomorphe à  $(\mathbb{C}^\times)^k$ , la variété algébrique complexe  $[\pi_0]$  s'identifie à un ouvert de  $\Lambda^{M_P} \cong (\mathbb{C}^\times)^k$  et sa sous-variété algébrique réelle  $\text{Im}[\pi_0]$  s'identifie au sous-tore unitaire  $\text{Im} \Lambda^{M_P} \cong \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{C}^\times)^k \mid |\lambda_1| = \dots = |\lambda_k| = 1\}$ .

La mesure  $d\pi$  sur  $\text{Im}[\pi_0]$  n'est autre que la mesure invariante de volume 1

$$d\lambda_1 \dots d\lambda_k.$$

L'expression

$$h_\pi(g_1, g_2)$$

est une fraction rationnelle en  $\pi$ , c'est-à-dire en  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , dont le dénominateur est un produit de facteurs de la forme

$$1 - \lambda_i \lambda_i^{-1} z_0$$

pour des  $z_0 \in \mathbb{C}^\times$  tels que  $|z_0| \neq 1$ .

Le produit

$$L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

est un polynôme en  $\pi$ , c'est-à-dire en  $\lambda_1^{\pm 1}, \dots, \lambda_k^{\pm 1}$ .

Enfin, il existe des caractères

$$\rho_j : \Lambda^{M_P} \cong (\mathbb{C}^\times)^k \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

des multiplicités  $e_j \geq 1$  et des nombres complexes  $z_j \in \mathbb{C}^\times$ ,  $1 \leq j \leq r'$ , tels que, pour toute  $\pi \in [\pi_0]$  paramétrée par  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda^{M_P} \cong (\mathbb{C}^\times)^k$ , on ait

$$L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z) = \prod_{1 \leq j \leq r'} \frac{1}{1 - \rho_j(\lambda^{\deg(x_0)}) \cdot Z^{e_j} \cdot z_j},$$

$$L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}^\vee, Z) = \prod_{1 \leq j \leq r'} \frac{1}{1 - \rho_j(\lambda^{-\deg(x_0)}) \cdot Z^{e_j} \cdot \bar{z}_j}.$$

Si  $\Lambda^{\mathbb{G}_m} \cong \mathbb{C}^\times$  agit sur  $\Lambda^{M_P} \cong (\mathbb{C}^\times)^k$  via le caractère  $M_P \hookrightarrow G \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m$ , on a pour tout indice  $j \in \{1, \dots, r'\}$

$$\rho_j(z\lambda) = z^{e_j} \cdot \rho_j(\lambda), \quad \forall \lambda \in \Lambda^{M_P}, \quad \forall z \in \Lambda^{\mathbb{G}_m} \cong \mathbb{C}^\times.$$

La conclusion s'obtient par déplacement des contours d'intégration, par exemple dans la direction  $|z| \mapsto 0$ , et calcul des résidus. □

Ainsi, les deux séries formelles

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( \widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (\gamma)$$

sont des fractions rationnelles égales entre elles.

En particulier, elles ont la même valeur régularisée en  $Z = 1$ , notée

$$S_{x_0}(f) = S_{x_0}(\widehat{f}).$$

Il reste seulement à prouver que  $S_{x_0}(f)$  ne dépend pas du choix de la place  $x_0$ .

On montre d'abord :

LEMME 10.16. — *Supposons que la transformée de Fourier  $\widehat{f}_x$  de  $f_x$  est à support compact en au moins une place  $x \in |F| - S_G$  où  $f_x$  est sphérique.*

Alors :

- (i) *Pour tout représentant  $(M_P, \pi_0)$ , la “valeur régularisée” en  $Z = 1$  de la fraction rationnelle développée en série formelle*

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

est égale à l'intégrale

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

pour n'importe quel réel  $s$  assez grand.

- (ii) On a

$$S_{x_0}(f) = \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma).$$

*Démonstration.* — (ii) résulte de (i) et du lemme 10.12(ii).

Démontrons maintenant (i). Choisissons un réel  $s$  assez grand. D'après le lemme 10.14(i) et le corollaire 10.15, la fraction rationnelle considérée  $R(z)$  est égale, si  $|z|$  est assez petit, à l'intégrale

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-s-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, zq_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right).$$

Cette même intégrale, considérée non plus au voisinage de  $z = 0$  mais au voisinage de  $z = 1$ , définit une autre fraction rationnelle en  $z$  que nous noterons  $R'(z)$ .

Comme  $R'(1)$  est égal à l'intégrale de (i), il s'agit de prouver que la “valeur régularisée” en  $z = 1$  de la fraction rationnelle

$$R'(z) - R(z)$$

est égale à 0.

Or la différence  $R'(z) - R(z)$  s'écrit comme une somme de résidus calculés le long des pôles qu'il faut traverser en allant de la zone  $|z| \ll 1$  à la zone  $|z| = 1$ .

Comme  $s$  a été choisi très grand, les pôles de

$$L_{x_0} \left( \rho, \pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}} \right)$$

n'apparaissent pas au cours de cette traversée.

D'autre part, comme la transformée de Fourier  $\widehat{f}_x$  est à support compact en au moins une place  $x \in |F| - S_G$  où  $f_x$  est sphérique, les pôles de la fonction  $L$  globale

$$L \left( \rho, \pi^\vee, q^{-s-\frac{1}{2}} \right)$$

disparaissent par multiplication avec le facteur

$$h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L_{x_0} \left( \rho, \pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}} \right)^{-1}.$$

Finalement, les seuls pôles qui apparaissent dans le calcul de la différence  $R'(z) - R(z)$  sont ceux de

$$L_{x_0} \left( \rho, \pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right) = \prod_{1 \leq j \leq r'} \frac{1}{1 - \left( zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right)^{e_j} \cdot z_j \cdot \rho_j(\lambda)}.$$

Comme les fonctions à intégrer comportent en facteur supplémentaire le polynôme

$$L_{x_0} \left( \rho, \pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} = \prod_{1 \leq j \leq r'} \left( 1 - q_{x_0}^{-\frac{1}{2} e_j} \cdot z_j \cdot \rho_j(\lambda) \right),$$

les résidus le long des pôles à traverser sont des fractions rationnelles en  $z$  bien définies en  $z = 1$  et qui y prennent la valeur 0.

Cela termine la preuve de la partie (i) et donc du lemme 10.16. □

On déduit de ce lemme le corollaire suivant qui termine la preuve du théorème 10.11 :

**COROLLAIRE 10.17.** — *Soit  $x_1 \in |F| - S_G$  une autre place en laquelle le facteur  $f_{x_1}$  de  $f$  est sphérique. Alors :*

(i) *La différence des deux fonctionnelles*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto S_{x_0}(f)$$

et

$$f \mapsto S_{x_1}(f)$$

*ne dépend que de la restriction de  $\widehat{f}_{x_0}$  ou  $\widehat{f}_{x_1}$  au complémentaire d'une partie compacte arbitrairement grande de  $G(F_x)$ .*



(ii) *Cette différence est identiquement nulle.*

*Démonstration.*

(i) Soit  $f' = \bigotimes_{x \in |F|} f'_x$  une autre  $\rho$ -fonction globale produit qui est sphérique en les places  $x_0$  et  $x_1$  et telle que  $\widehat{f}_x$  et  $\widehat{f}'_x$  coïncident en dehors d'une partie compacte de  $G(F_x)$  en  $x = x_0$  ou  $x_1$  et qu'ils soient égaux en toutes les autres places.

On a d'après le lemme 10.16(ii)

$$S_{x_0}(f - f') = S_{x_1}(f - f')$$

soit

$$(S_{x_0} - S_{x_1})(f) = (S_{x_0} - S_{x_1})(f').$$

(ii) Introduisons la série formelle en  $Z_0$  et  $Z_1$

$$\sum_{\substack{N_0, N'_0 \in \mathbb{N} \\ N_1, N'_1 \in \mathbb{N}}} Z_0^{N_0 + N'_0} \cdot Z_1^{N_1 + N'_1} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left( f_{x_0}^{N_0, N'_0} \otimes f_{x_1}^{N_1, N'_1} \otimes \left( \bigotimes_{x \neq x_0, x_1} f_x \right) \right) (\gamma).$$

En procédant comme dans la démonstration de la première partie du théorème 10.11, on montre que cette série formelle est une fraction rationnelle

$$R(Z_0, Z_1)$$

qui s'écrit comme le quotient d'un polynôme en  $Z_0$  et  $Z_1$  par le produit d'un polynôme en  $Z_0$ , d'un polynôme en  $Z_1$  et d'un polynôme en  $Z_0/Z_1$ .

Par conséquent, on peut parler de la valeur régularisée en  $Z_0 = 1$  de la valeur régularisée en  $Z_1 = 1$  de  $R(Z_0, Z_1)$ , ainsi que de la valeur régularisée en  $Z_1 = 1$  de sa valeur régularisée en  $Z_0 = 1$ , et elles sont égales.

Or, d'après la partie (i) du corollaire, la première est égale à

$$S_{x_0}(f)$$

et la seconde est égale à

$$S_{x_1}(f).$$

Cela termine la démonstration du corollaire 10.17 et donc du théorème 10.11.  $\square$

On peut noter  $S(f)$  la valeur commune des  $S_{x_0}(f)$ .

Pour terminer, remarquons la conséquence suivante du lemme 10.16(i) :

COROLLAIRE 10.18. — Pour toute  $\rho$ -fonction globale  $f$  sur  $G(\mathbb{A})$ , notons

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”} = \left( \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) \right) + \left( \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f).$$

Alors :

(i) La fonctionnelle

$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”}$$

satisfait la formule de Poisson au sens que

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{f}(\gamma) \text{”}, \quad \forall f.$$

(ii) Elle coïncide avec la fonctionnelle

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$$

en les  $\rho$ -fonctions globales  $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$  dont au moins un facteur sphérique  $f_x$  en une place  $x \in |F| - S_G$  est à support compact dans  $G(F_x)$ .

Remerciements. — Je remercie notre secrétaire Cécile Gourgues pour la frappe entière et parfaite du manuscrit.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BRAVERMAN & D. KAZHDAN, «  $\gamma$ -functions of representations and lifting », *Geom. Funct. Anal.* (2000), n° Special Volume, Part I, p. 237-278, With an appendix by V. Vologodsky, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999).
- [2] A. GENESTIER & V. LAFFORGUE, « Chtoucas restreints pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands locale », en préparation.
- [3] R. GODEMENT & H. JACQUET, *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, ix+188 pages.
- [4] H. JACQUET & J. SHALIK, « A lemma on highly ramified  $\epsilon$ -factors », *Math. Ann.* **271** (1985), n° 3, p. 319-332.
- [5] L. LAFFORGUE, « Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands », *Invent. Math.* **147** (2002), n° 1, p. 1-241.
- [6] ———, « Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires », prépublication de l'IHÉS numéro M/12/28, 2012.

- [7] ———, « Formules de Poisson non linéaires et principe de functorialité de Langlands », notes d'un double exposé donné au séminaire Takagi, à Tokyo, les 25 et 26 mai 2013 et à l'Université Tsinghua de Pékin le 8 novembre 2013, <http://www.ihes.fr/~lafforgue/math/TokyoPekin2013.pdf>, 2013.
- [8] ———, « Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires », *Jpn. J. Math.* **9** (2014), n° 1, p. 1-68.
- [9] V. LAFFORGUE, « Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale », <http://arxiv.org/abs/1209.5352>, 2013.
- [10] C. MœGLIN & J.-L. WALDSPURGER, *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein*, Progress in Mathematics, vol. 113, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994, Une paraphrase de l'Écriture. [A paraphrase of Scripture], xxx+342 pages.
- [11] J. T. TATE, « Fourier analysis in number fields, and Hecke's zeta-functions », in *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*, Thompson, Washington, D.C., 1967, p. 305-347.

Manuscrit reçu le 12 mars 2014,  
révisé le 24 juillet 2015,  
accepté le 10 septembre 2015.

Laurent LAFFORGUE  
Institut des Hautes Études Scientifiques  
Le Bois-Marie  
35, route de Chartres  
91440 Bures-sur-Yvette (France)  
laurent@ihes.fr