

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU

Rayonnement gravitationnel en première approximation

Annales de l'I. H. P., section A, tome 1, n° 1 (1964), p. 117-128

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1964__1_1_117_0

© Gauthier-Villars, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Rayonnement gravitationnel en première approximation

par

A. PAPAPETROU

RÉSUMÉ. — Le problème du rayonnement gravitationnel est considéré dans le cadre de la première approximation de la relativité générale et quelques formules ainsi qu'une forme réduite du pseudo-tenseur du champ gravitationnel sont déduites. Les résultats obtenus par la méthode d'Eddington et celle de Peres sont comparés aux résultats de la méthode d'Einstein. Cette comparaison montre que la méthode de Peres est équivalente à celle d'Einstein.

SUMMARY. — Gravitational radiation is discussed in the frame of the first approximation of general relativity and some formulae as well as a reduced form of the pseudotensor of the gravitational field are established. The results obtained by the use of the methods of Eddington and of Peres are compared with those obtained from Einstein's method. This comparison shows the equivalence of the method of Peres to that of Einstein.

Le problème du rayonnement gravitationnel a été posé par Einstein immédiatement après l'achèvement de la formulation de la relativité générale. Einstein [1] a considéré le cas d'un système de corps matériels en mouvement sous l'action de forces essentiellement non gravitationnelles, en supposant encore que les vitesses sont petites par rapport à la vitesse c . Il a trouvé qu'un tel système matériel émet du rayonnement gravitationnel, dont il a calculé, à l'aide des équations du champ en première approximation, l'énergie dans le cas d'émission quadrupolaire. Un peu plus tard Edding-

ton [2] a calculé par une autre méthode, mais toujours dans le cadre de la première approximation, l'énergie du rayonnement gravitationnel émis par une barre tournante.

A la base de ces calculs, qui ont été effectués dans un système de coordonnées spécialement choisi, sont des relations non covariantes. On a donc remarqué ultérieurement qu'il était nécessaire de démontrer que les résultats de ces travaux ont une signification physique indépendante du système de coordonnées utilisé. Cette démonstration a été obtenue récemment par deux méthodes différentes. Ce qui est commun aux deux méthodes est qu'on considère un système matériel qui émet du rayonnement pendant un intervalle de temps fini et reste stationnaire en dehors de cet intervalle. La première méthode [3] est basée sur une discussion détaillée des identités de conservation et l'on n'a besoin de connaître le champ gravitationnel qu'en première approximation. Dans la deuxième méthode [4], le champ est déterminé à une approximation plus élevée à l'aide d'une nouvelle méthode d'approximation particulièrement adaptée au problème du rayonnement [5]. La conclusion obtenue par ces considérations est que dans l'état non stationnaire le système matériel émet du rayonnement gravitationnel et que l'énergie et l'impulsion totale de ce rayonnement ont des valeurs indépendantes du système de coordonnées.

Pour le calcul du rayonnement gravitationnel en relation avec ses sources nous n'avons jusqu'à présent que la méthode d'approximation classique, la méthode d'approximation nouvelle étant valable — sous sa forme actuelle — seulement pour la région de l'espace éloignée des sources du champ [6]. Rappelons encore que, dans le cadre de la méthode d'approximation classique, Peres [7] a récemment proposé une modification particulièrement efficace de la méthode de calcul d'Eddington.

Dans ce qui suit, nous allons d'abord considérer la méthode de calcul d'Einstein et nous montrerons qu'il existe une forme réduite du pseudo-tenseur d'impulsion-énergie du champ gravitationnelle. Ensuite, nous allons comparer les méthodes de calcul d'Eddington et de Peres à celle d'Einstein et nous montrerons en particulier que la méthode de Peres est équivalente à celle d'Einstein. Nos considérations seront générales en ce sens que nous ne ferons aucune hypothèse restrictive sur les vitesses des corps du système matériel qui émet le rayonnement.

La méthode d'Einstein. — Les formules de départ sont les identités

$$(1) \quad (\mathfrak{T}_\mu^\alpha + t_\mu^\alpha)_{,\alpha} = 0,$$

$$(2) \quad \mathfrak{T}_\mu^\alpha + t_\mu^\alpha = U_\mu^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$$

$U_{\mu}^{\alpha\beta}$ étant par exemple le superpotentiel antisymétrique de Freud

$$(3) \quad U_{\mu}^{\alpha\beta} = \frac{c^4}{16\pi G} \frac{g_{\mu\rho}}{\sqrt{-g}} (g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma} - g^{\beta\rho}g^{\alpha\sigma})_{,\sigma}$$

Nous allons utiliser systématiquement la quantité $g^{\alpha\beta}$ et la condition isotherme

$$(4) \quad g^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0.$$

Le champ étant faible partout, nous poserons

$$(5) \quad g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + {}_1g^{\alpha\beta} + {}_2g^{\alpha\beta} + \dots$$

Dans les calculs suivants nous ne considérons systématiquement que la quantité ${}_1g^{\alpha\beta}$. Nous poserons donc, pour alléger les formules,

$$(6) \quad {}_1g^{\alpha\beta} \equiv v^{\alpha\beta}.$$

Les équations du champ sont, en première approximation,

$$(7) \quad \square_{{}_1g}^{\alpha\beta} \equiv \square v^{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} {}_0\mathfrak{T}^{\alpha\beta},$$

avec

$$(8) \quad {}_0\mathfrak{T}^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu} {}_0\mathfrak{T}_{\mu}^{\beta}, \quad {}_0\mathfrak{T}^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0 = {}_0\mathfrak{T}_{\mu,\beta}^{\beta}$$

Il est à souligner que, dans les calculs suivants, nous utiliserons toujours, sauf indication contraire, la solution retardée de (7).

La quantité t_{μ}^{α} commence avec le terme du premier ordre ${}_1t_{\mu}^{\alpha}$ qui est quadratique par rapport aux dérivées premières de $v^{\rho\sigma}$. L'expression détaillée donnant ${}_1t_{\mu}^{\alpha}$ peut être déduite de (2) si l'on y met $\mathfrak{T}_{\mu}^{\alpha} = 0$ et si l'on y retient les termes en ${}_1g^{\rho\sigma}$ et ${}_2g^{\rho\sigma}$. En utilisant les équations du champ en première et deuxième approximation [8],

$$\square_{{}_1g}^{\mu\nu} \equiv \square v^{\mu\nu} = 0,$$

$$\begin{aligned} \square_{{}_2g}^{\mu\nu} = & -v^{\rho\sigma} v^{\mu\nu}_{,\rho\sigma} + v^{\mu\rho} v^{\nu\sigma}_{,\rho} - (\eta^{\mu\sigma} v^{\beta\nu}_{,\rho} + \eta^{\nu\sigma} v^{\beta\mu}_{,\rho}) \eta_{\alpha\beta} v^{\alpha\rho}_{,\sigma} + \eta_{\alpha\beta} \eta^{\rho\sigma} v^{\mu\beta}_{,\rho} v^{\nu\alpha}_{,\sigma} \\ & + \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \right) \eta_{\alpha\alpha'} \eta_{\beta\beta'} \left(v^{\alpha'\beta'}_{,\rho} v^{\alpha\beta}_{,\sigma} - \frac{1}{2} v^{\alpha\alpha'}_{,\rho} v^{\beta\beta'}_{,\sigma} \right) \\ & + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} v^{\alpha\rho}_{,\sigma} v^{\beta\sigma}_{,\rho}, \end{aligned}$$

on trouve finalement

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{16\pi G}{c^4} {}_1t_{\mu}^{\alpha} = & -\eta_{\rho\sigma} v^{\rho\beta}_{,\mu} v^{\alpha\sigma}_{,\beta} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left(\eta_{\rho\lambda} \eta_{\sigma\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\lambda\nu} \right) v^{\lambda\nu}_{,\beta} v^{\rho\sigma}_{,\mu} \\ & + \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\alpha} \left\{ \eta_{\nu\lambda} v^{\nu\rho}_{,\sigma} v^{\lambda\sigma}_{,\rho} - \frac{1}{2} \eta^{\beta\gamma} \left(\eta_{\rho\lambda} \eta_{\sigma\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\lambda\nu} \right) v^{\rho\sigma}_{,\beta} v^{\lambda\nu}_{,\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Considérons une hypersurface $t = \text{Cte}$ et, sur cette hypersurface, une surface (à deux dimensions) fermée S dont tous les points sont très éloignés du système matériel que nous considérons. Nous prendrons, pour la simplicité, comme surface S une sphère ayant comme centre le point $x^i = 0$ et un très grand rayon a . Soit V le volume intérieur à S et posons

$$(10) \quad P_\mu(V) \equiv \int_V (\mathfrak{T}_\mu^4 + t_\mu^4) d^3x.$$

Nous aurons alors, pour l'énergie et l'impulsion totale du système considéré, la formule

$$(11) \quad P_\mu \equiv \int_{V \rightarrow \infty} (\mathfrak{T}_\mu^4 + t_\mu^4) d^3x = \lim_{V \rightarrow \infty} P_\mu(V).$$

Rappelons que cette formule donne l'énergie et l'impulsion correcte pour un champ stationnaire et que, dans ce cas, on peut l'utiliser même avec un système de coordonnées quelconque, à condition toutefois que $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ pour $r \rightarrow \infty$ de manière à ce que l'intégrale figurant dans (11) converge.

En intégrant (1) sur le volume V , on trouve

$$(12) \quad \frac{d}{dt} P_\mu(V) = - \int_V (\mathfrak{T}_\mu^i + t_\mu^i) d^3x = - \int_S t_\mu^i n_i dS,$$

car $\mathfrak{T}_\mu^i = 0$ sur S . C'est cette formule qu'utilise Einstein pour le calcul de l'énergie et de l'impulsion emportée par le rayonnement en première approximation : l'énergie et l'impulsion du rayonnement émis dans l'intervalle dt sera donnée par

$$(13) \quad c \, td \int_S t_\mu^i n_i dS = - c \, dt \frac{d}{dt} P_\mu(V).$$

Pour le calcul en première approximation on remplacera dans le premier membre de (13) t_μ^i par ${}_1t_\mu^i$. Le contenu de cette relation est sans doute étroitement lié au système de coordonnées utilisé. Mais il est facile à voir que l'énergie et l'impulsion totale du rayonnement gravitationnel émis par le système matériel considéré ne dépendra pas du système de coordonnées. En effet, en intégrant (13) dans l'intervalle $-\infty < t < +\infty$, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c \, dt \int_S t_\mu^i n_i dS = - \{ P_\mu(V)_{t=+\infty} - P_\mu(V)_{t=-\infty} \}.$$

Passons maintenant à la limite $S \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire $a \rightarrow \infty$). Dans le premier membre on devra alors retenir seulement les termes qui sont indépendants de a , tandis qu'au second membre $P_\mu(V)$ sera remplacé par P_μ

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} c \, dt \int_{S \rightarrow \infty} t_\mu^i n_i dS = (P_\mu)_{t=-\infty} - (P_\mu)_{t=+\infty}.$$

Le second membre est maintenant la différence des quantités P_μ de deux champs stationnaires, donc indépendant du système de coordonnées. Il s'ensuit que le premier membre sera aussi indépendant du système de coordonnées [9].

De la relation (14) on peut tirer une seconde conclusion. Il y a des identités analogues à (1) avec, par exemple, l'indice μ situé en haut ou avec un poids tensoriel différent. Le cas le plus intéressant est l'identité de Landau-Lifshitz [10]

$$(\mathfrak{I}^{\alpha\mu}\mathfrak{T}_\mu^\beta + \tilde{t}^{\alpha\beta})_{,\beta} = 0, \quad \text{avec} \quad \tilde{t}^{\alpha\beta} = \tilde{t}^{\beta\alpha}.$$

Toutes ces identités [11] donnent les mêmes valeurs de P_μ pour un champ stationnaire. La relation (14) montre alors que chacune de ces identités donne, si on l'utilise pour la discussion du rayonnement gravitationnel, les mêmes valeurs pour l'énergie et l'impulsion totale du rayonnement.

Nous allons montrer qu'il y a un pseudo-tenseur réduit t_μ^α qu'on peut substituer à \mathfrak{t}_μ^α dans les formules (13) ou (14). Posons

$$(15) \quad t_\mu^\alpha = \frac{c^4}{32\pi G} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \left(\eta_{\rho\lambda} \eta_{\sigma\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma} \eta_{\lambda\nu} \right) \mathfrak{v}^{\rho\sigma}_{,\beta} \mathfrak{v}^{\lambda\nu}_{,\mu}.$$

Alors

$$(16) \quad \mathfrak{t}_\mu^\alpha = t_\mu^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha t_\rho^\rho + \frac{c^4}{32\pi G} \left(-2\eta_{\rho\sigma} \mathfrak{v}^{\rho\nu}_{,\mu} \mathfrak{v}^{\sigma\lambda}_{,\nu} + \delta_\mu^\alpha \eta_{\rho\sigma} \mathfrak{v}^{\rho\nu}_{,\lambda} \mathfrak{v}^{\sigma\lambda}_{,\nu} \right).$$

Nous montrerons que le dernier terme de (16) ne contribue pas aux intégrales (13) et (14).

La solution retardée de (7) est donnée par

$$(17) \quad \frac{c^4}{4G} \mathfrak{v}^{\alpha\beta}(x^i, t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{r} \mathfrak{T}^{\alpha\beta}(X^i, T) d^3X = \frac{1}{R} \int_0 \mathfrak{T}^{\alpha\beta}(X^i, T) d^3X + \dots,$$

avec

$$cT = ct - r, \quad r^2 = (x^i - X^i)(x^i - X^i), \quad R^2 = x^i x^i.$$

Les termes indiqués par ... dans (17) s'annulent pour $R \rightarrow \infty$ comme $R^{-\alpha}$, avec $\alpha > 1$ et, par conséquent, ne contribuent pas aux intégrales (13) et (14). Nous calculons d'abord les quantités $\mathfrak{v}^{\alpha\beta}_{,4}$

$$\frac{c^4}{4G} \mathfrak{v}^{\alpha\beta}_{,4} \equiv \frac{c^4}{4G} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{v}^{\alpha\beta} = \frac{1}{R} \int_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{T}^{\alpha\beta}(X^i, T) d^3X + \dots,$$

les points indiquant toujours des termes qui n'ont pas d'importance pour les intégrales (13) et (14). Avec l'abréviation

$$(18) \quad \Omega^{\alpha\beta} \equiv \int_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{T}^{\alpha\beta}(X^i, T) d^3X,$$

nous écrivons

$$(19) \quad \frac{c^4}{4G} v^{\alpha\beta}_{,4} = \frac{1}{R} \Omega^{\alpha\beta} + \dots$$

Un calcul analogue nous donne

$$(20) \quad \frac{c^4}{4G} v^{\alpha\beta}_{,i} = \frac{c^4}{4G} \frac{\partial}{\partial X^i} v^{\alpha\beta} = -\frac{1}{R} n_i \Omega^{\alpha\beta} + \dots,$$

$$(21) \quad n_i = \frac{x^i}{R}$$

étant la normale à la sphère S.

Les dix quantités $\Omega^{\alpha\beta}$ satisfont à quatre relations qu'on déduit de la relation (8), qu'il faut écrire ici sous la forme

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial X^k} \circ \mathfrak{T}^{\mu k}(X^i, T) \right\}_{T=\text{Cte}} + \frac{\partial}{c \partial T} \circ \mathfrak{T}^{\mu 4}(X^i, T) = 0.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial}{\partial X^k} \circ \mathfrak{T}^{\mu k}(X^i, T) = \left\{ \frac{\partial}{\partial X^k} \circ \mathfrak{T}^{\mu k}(X^i, T) \right\}_{T=\text{Cte}} + \frac{\partial}{c \partial T} \circ \mathfrak{T}^{\mu k}(X^i, T) \frac{c \partial T}{\partial X^k},$$

mais

$$\frac{c \partial T}{\partial X^k} = -\frac{\partial r}{\partial X^k} = \frac{\partial r}{\partial x^k} = n_k + \dots,$$

et l'on trouve finalement

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial X^k} \circ \mathfrak{T}^{\mu k} + \frac{\partial}{c \partial T} \circ \mathfrak{T}^{\mu 4} = \frac{\partial}{c \partial T} \circ \mathfrak{T}^{\mu k} n_k + \dots$$

En intégrant les deux membres de cette relation sur l'espace de X^i , on trouve

$$(23) \quad \Omega^{\mu 4} = \Omega^{\mu k} n_k + \dots$$

On peut écrire cette relation sous la forme plus détaillée

$$(23 a) \quad \Omega^{i4} = \Omega^{ik} n_k + \dots, \quad \Omega^{44} = \Omega^{ik} n_i n_k + \dots$$

En posant

$$(24) \quad n_4 = -1$$

on pourra écrire (19) et (20) sous la forme

$$(25) \quad \frac{c^4}{4G} v^{\mu\nu}_{,p} = -\frac{1}{R} \Omega^{\mu\nu} n_p + \dots,$$

tandis que la relation (23) devient

$$(26) \quad \Omega^{\mu\sigma} n_\sigma = 0.$$

En remarquant encore que

$$(27) \quad \gamma_i^{\rho\sigma} n_\rho n_\sigma = 0,$$

on vérifie immédiatement que la différence $t_\mu^i - t_\mu^i$ ne contribue pas aux intégrales de surface (13) et (14). On pourra donc calculer l'énergie et l'impulsion du rayonnement en utilisant les composantes réduites t_μ^i .

La méthode d'Eddington. — Eddington part de la forme covariante de l'identité (1)

$$(28) \quad \mathfrak{T}_{\mu;\alpha}^\alpha = \mathfrak{T}_{\mu,\alpha}^\alpha - \frac{1}{2} \mathfrak{T}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} = 0.$$

En intégrant les deux membres de cette relation sur l'hypersurface $t = \text{Cte}$, on trouve

$$(29) \quad \frac{d}{c dt} \int \mathfrak{T}_\mu^4 d^3x = \frac{1}{2} \int \mathfrak{T}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} d^3x.$$

Le champ étant faible, on aura $\mathfrak{T}_\mu^4 \gg t_\mu^4$ et, par conséquent,

$$\int \mathfrak{T}_\mu^4 d^3x \approx P_\mu.$$

La relation (29) pourrait donc être utilisée pour le calcul de l'énergie et de l'impulsion du rayonnement. On remarquera que, d'après la formule (29), ces quantités se présentent sous la forme d'intégrales de volume étendues sur les sources du champ. Il est à souligner que, malgré le fait que la relation (28) est covariante, les deux membres de (29) ne le sont plus. Ceci est en accord avec la conclusion précédente selon laquelle seulement l'énergie et l'impulsion totale du rayonnement sont univoquement déterminées.

Il n'est pas difficile de voir que la méthode d'Eddington ne sera pas généralement utilisable. La raison en est que le rayonnement gravitationnel est aussi extrêmement faible et, par conséquent, l'omission du terme t_μ^4 dans (29) n'est pas justifiée *a priori*. Pour clarifier ce point complètement nous devons comparer la formule d'Eddington à celle d'Einstein.

Nous considérons d'abord la composante $\mu = 4$ de l'équation (29) en première approximation. En tenant compte de l'équation du champ (7) ainsi que de la relation

$${}_1g_{\alpha\beta} = -\eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta\sigma} {}_1g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta}\eta_{\rho\sigma} {}_1g^{\rho\sigma},$$

nous trouvons, par un calcul élémentaire,

$$(30) \quad \frac{d}{c dt} \int \mathfrak{T}_4^4 d^3x = - \int_{S \rightarrow \infty} t_4^i n_i dS - \frac{d}{c dt} \int \left(t_4^4 - \frac{1}{2} t_\alpha^\alpha \right) d^3x.$$

Cette relation n'est qu'une autre forme de la composante $\mu = 4$ de l'équation (12)

$$\frac{d}{c dt} \int (\bar{\mathfrak{T}}_4^4 + t_4^4) d^3x = - \int_{S \rightarrow \infty} t_4^i n_i dS,$$

comme on peut le vérifier directement. Le premier terme du second membre de (30) conduit à la valeur correcte de l'énergie totale du rayonnement. Il s'ensuit que le premier membre de (30) suffirait pour le calcul de l'énergie du rayonnement, si le dernier terme de (30) ne contribuait pas à l'énergie totale ; c'est-à-dire si

$$\left\{ \int \left(t_4^4 - \frac{1}{2} t_\alpha^\alpha \right) d^3x \right\}_{t=-\infty} = \left\{ \int \left(t_4^4 - \frac{1}{2} t_\alpha^\alpha \right) d^3x \right\}_{t=+\infty}.$$

Il est facile de voir que cette dernière condition n'est pas en général satisfaite. Supposons pour la simplicité que le champ est, pour $t = \pm \infty$, statique. Dans ce cas, il n'y a que la composante v^{44} de $v^{\mu\nu}$ qui est différente de zéro [12] et, par conséquent,

$$t_4^4 - t_i^i = - t_i^i = \frac{c^4}{32\pi G} \frac{1}{2} v^{44},_{,i} v^{44},_{,i} = \frac{c^4}{64\pi G} \{ (v^{44},_{,i})_{,i} - v^{44},_{,ii} \}.$$

Le premier terme ne contribue pas à l'intégrale $\int t_i^i d^3x$, car

$$v^{44} \sim \frac{1}{R}, \quad v^{44},_{,i} \sim \frac{1}{R^2} \quad \text{pour } R \rightarrow \infty.$$

On aura donc

$$\int t_i^i d^3x = \frac{c^4}{64\pi G} \int v^{44},_{,ii} d^3x.$$

Mais le second membre est proportionnel à l'énergie potentielle newtonienne et cette énergie aura des valeurs différentes pour $t = -\infty$ et $+\infty$ si la configuration du système matériel dans l'état statique final est différente de celle de l'état initial. Nous sommes ainsi arrivés à la conclusion que la méthode d'Eddington donne le résultat correct pour l'énergie du rayonnement si la configuration du système matériel ne change pas, comme par exemple dans le cas de la barre tournante. Autrement, on devra calculer aussi la quantité

$$\left(\int t_i^i d^3x \right)_{t=+\infty} - \left(\int t_i^i d^3x \right)_{t=-\infty}$$

ou utiliser la méthode d'Einstein.

Pour les composantes $\mu = k$ de l'équation (29) on trouve, après un calcul analogue à celui qui nous a conduit à (30),

$$(31) \quad \frac{d}{c dt} \int \mathfrak{T}_k^4 d^3x = - \int_{S \rightarrow \infty} t_k^i n_i dS + \frac{1}{2} \delta_k^i \int_{S \rightarrow \infty} t_\alpha^\alpha n_i dS - \frac{d}{c dt} \int t_k^4 d^3x.$$

Le premier terme du second membre donne la valeur correcte de l'impulsion totale du rayonnement, tandis que le second n'y contribue pas d'après (25) et (27). Le dernier terme donne comme contribution totale

$$\left(\int t_k^4 d^3x \right)_{t=-\infty} - \left(\int t_k^4 d^3x \right)_{t=+\infty}.$$

Mais d'après (15), t_k^4 s'annule dans le cas d'un champ stationnaire. Il s'ensuit que la formule d'Eddington donne la valeur correcte pour l'impulsion totale du rayonnement.

La méthode de Peres. — En partant de la formule de Dirac pour l'énergie et l'impulsion du rayonnement électromagnétique, Peres remplace dans le second membre de la formule d'Eddington le facteur $g_{\alpha\beta,\mu}$ — qui devrait être écrit plus exactement comme $\{ (g_{\alpha\beta})_{\text{ret}} \}_{,\mu}$ — par $\frac{1}{2} \{ (g_{\alpha\beta})_{\text{ret}} - (g_{\alpha\beta})_{\text{av}} \}_{,\mu}$. Comme l'a montré Peres, sa formule est particulièrement avantageuse en ce qui concerne l'aspect technique du calcul. Ici nous allons montrer par une comparaison directe avec la formule d'Einstein que la formule de Peres donne les valeurs correctes pour l'énergie et l'impulsion totale du rayonnement, l'incertitude de la valeur de l'énergie calculée par la formule d'Eddington étant éliminée.

Nous considérons d'abord la composante $\mu = 4$ de la formule de Peres. Nous partons de la relation

$$(32) \quad \square f^{\alpha\beta} \varphi^{\rho\sigma}_{,4} = - (f^{\alpha\beta}_{,i} \varphi^{\rho\sigma}_{,4})_{,i} + f^{\alpha\beta}_{,i} \varphi^{\rho\sigma}_{,4i} + f^{\alpha\beta}_{,44} \varphi^{\rho\sigma}_{,4}.$$

Les formules détaillées étant trop longues, il sera utile d'écrire cette formule sous la forme symbolique

$$(32 a) \quad \square f \varphi_{,4} = - (f_{,i} \varphi_{,4})_{,i} + f_{,i} \varphi_{,4i} + f_{,44} \varphi_{,4}$$

obtenue après omission des indices α, β et ρ, σ . Nous réintroduirons ces indices à la fin des calculs intermédiaires. Nous écrirons aussi

$$(\upsilon^{\mu\nu})_{\text{ret}} = \bar{\upsilon}^{\mu\nu}, \quad (\upsilon^{\mu\nu})_{\text{av}} = \overset{+}{\upsilon}^{\mu\nu}, \quad \bar{\upsilon}^{\mu\nu} - \overset{+}{\upsilon}^{\mu\nu} = \delta_{\upsilon}^{\mu\nu}.$$

Nous rappelons que $\bar{v}^{\mu\nu}$ et $v^{\mu\nu}$ sont des solutions de la même équation et correspondent exactement aux mêmes sources,

$$(33) \quad \square \bar{v}^{\mu\nu} = \square v^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} \mathfrak{T}^{\mu\nu}.$$

Écrivons maintenant la relation (32 a) en posant d'abord $f = \bar{v}$ et $\varphi = \bar{v}$ ou v :

$$(a) \quad \square \bar{v} \cdot \bar{v}_{,4} = - (\bar{v}_{,i} \bar{v}_{,4})_{,i} + \bar{v}_{,i} \bar{v}_{,4i} + \bar{v}_{,44} \bar{v}_{,4},$$

$$(b) \quad \square v \cdot v_{,4} = - (v_{,i} v_{,4})_{,i} + v_{,i} v_{,4i} + v_{,44} v_{,4}.$$

De même, avec $f = v$ et $\varphi = \bar{v}$ ou v ,

$$(c) \quad \square v \cdot \bar{v}_{,4} = - (v_{,i} \bar{v}_{,4})_{,i} + v_{,i} \bar{v}_{,4i} + v_{,44} \bar{v}_{,4},$$

$$(d) \quad \square v \cdot v_{,4} = - (v_{,i} v_{,4})_{,i} + v_{,i} v_{,4i} + v_{,44} v_{,4}.$$

La différence (a) - (d) nous donne

$$(e) \quad \square v \cdot (\bar{v} - v)_{,4} = \square \bar{v} \cdot \bar{v}_{,4} - \square v \cdot v_{,4} = (v_{,i} v_{,4} - \bar{v}_{,i} \bar{v}_{,4})_{,i} + \frac{1}{2} \{ (\bar{v}_{,i})^2 + (\bar{v}_{,4})^2 - (v_{,i})^2 - (v_{,4})^2 \}_{,4}.$$

D'autre part, la combinaison (b) + (c) - (a) - (d) de ces relations conduit, après quelques transformations élémentaires, à l'équation

$$(f) \quad - (\bar{v}_{,i} \bar{v}_{,4})_{,i} - (v_{,i} v_{,4})_{,i} + (\bar{v}_{,i} v_{,4} + v_{,i} \bar{v}_{,4})_{,i} = - \frac{1}{2} \{ (\bar{v} - v)_{,i}^2 + (\bar{v} - v)_{,4}^2 \}_{,4}.$$

En introduisant dans (e) la valeur de $(v_{,i} v_{,4})_{,i}$ tirée de (f) nous trouvons

$$\square v \cdot (\delta v)_{,4} = - 2 (\bar{v}_{,i} \bar{v}_{,4})_{,i} + (\bar{v}_{,i} v_{,4} + v_{,i} \bar{v}_{,4})_{,i} + \{ \bar{v}_{,i} (\delta v)_{,i} + \bar{v}_{,4} (\delta v)_{,4} \}_{,4}.$$

Ou, si nous écrivons de nouveau les indices α, β et ρ, σ ainsi que le facteur $(-\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\sigma})$:

$$(34) \quad \int_0 \mathfrak{T}^{\alpha\beta} \frac{1}{2} ({}_1 \bar{g}_{\alpha\beta} - {}_1 g_{\alpha\beta})_{,4} d^3 x = - \int \bar{t}_4^i n_i dS + \frac{c^4}{64\pi G} \left(-\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\sigma} \right) \\ \times \left\{ \int (\bar{v}^{\alpha\beta}_{,i} v^{\rho\sigma}_{,4} + v^{\alpha\beta}_{,i} \bar{v}^{\rho\sigma}_{,4}) n_i dS + \frac{d}{c dt} \int (\bar{v}^{\alpha\beta}_{,i} \delta v^{\rho\sigma}_{,i} + \bar{v}^{\alpha\beta}_{,4} \delta v^{\rho\sigma}_{,4}) d^3 x \right\},$$

\bar{t}_4^i étant donné par (15), avec $v^{\alpha\beta} = \bar{v}^{\alpha\beta}$.

Le premier terme du deuxième membre de (34) nous donne la valeur correcte de l'énergie totale du rayonnement. Le second terme contient les valeurs des quantités $\bar{v}^{\alpha\beta}_{,p}$ et $\bar{v}^{\alpha\beta}_{,p}$ sur la surface S. Un calcul analogue à celui qui nous a conduit aux relations (19) et (20) nous donne

$$(35) \quad \frac{c^4}{4G} \bar{v}^{\alpha\beta}_{,i} = \frac{1}{R} \bar{\Omega}^{\alpha\beta} n_i + \dots, \quad \frac{c^4}{4G} \bar{v}^{\alpha\beta}_{,4} = \frac{1}{R} \bar{\Omega}^{\alpha\beta} + \dots$$

A l'aide de ces formules nous trouvons que l'avant-dernier terme du second membre de (34) est zéro. Enfin, le dernier terme de (34) donne à l'énergie totale la contribution

$$\left(-\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\sigma} \right) \left\{ \left[\int (\bar{v}^{\alpha\beta}_{,i} \delta v^{\rho\sigma}_{,i} + \bar{v}^{\alpha\beta}_{,4} \delta v^{\rho\sigma}_{,4}) d^3x \right]_{t=+\infty} - \left[\dots \right]_{t=-\infty} \right\}.$$

Le champ étant stationnaire pour $t = \pm \infty$, nous aurons $\delta v^{\rho\sigma} = 0$ et, par conséquent, cette contribution est aussi égale à zéro : la formule de Peres donne pour l'énergie totale du rayonnement la même valeur comme celle d'Einstein.

Pour l'impulsion, on partira de la relation

$$\square f \cdot \varphi_{,m} = - \left(f_{,i} \varphi_{,m} + \frac{1}{2} \delta_m^i \eta^{\rho\sigma} f_{,p} \varphi_{,p} \right)_{,i} + \frac{1}{2} (f_{,i} \varphi_{,mi} - f_{,im} \varphi_{,i}) + \frac{1}{2} (f_{,4} \varphi_{,4m} + f_{,4m} \varphi_{,4}) + f_{,44} \varphi_{,m}.$$

Une série d'opérations complètement analogues à celles que nous venons d'effectuer pour l'énergie nous donne finalement

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \bar{\Omega}^{\alpha\beta} \frac{1}{2} (\bar{g}_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta})_{,m} d^3x \\ &= - \int \left(\bar{t}^i - \frac{1}{2} \delta_m^i \bar{t}^{\alpha} \right) n_i dS + \frac{c^4}{16\pi G} \left(-\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\sigma} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\sigma} \right) \\ & \times \left\{ \int (\bar{v}^{\alpha\beta}_{,i} \bar{v}^{\rho\sigma}_{,m} + \bar{v}^{\alpha\beta}_{,i} \bar{v}^{\rho\sigma}_{,m}) n_i dS + \int (\bar{v}^{\alpha\beta}_{,4} \bar{v}^{\rho\sigma}_{,4} - \bar{v}^{\alpha\beta}_{,i} \bar{v}^{\rho\sigma}_{,i}) n_m dS \right. \\ & \left. + \frac{d}{c dt} \int (\bar{v}^{\alpha\beta}_{,4} \delta v^{\rho\sigma}_{,m} + \delta v^{\alpha\beta}_{,4} \bar{v}^{\rho\sigma}_{,m}) d^3x \right\}. \end{aligned}$$

Ici aussi le premier terme du second membre conduit à la valeur correcte de l'impulsion totale du rayonnement. La somme du second et du troisième terme est zéro à cause des relations (19), (20) et (35). Le dernier terme donne à l'impulsion totale la contribution

$$\left\{ \int (\bar{v}^{\alpha\beta}_{,4} \delta v^{\rho\sigma}_{,m} + \delta v^{\alpha\beta}_{,4} \bar{v}^{\rho\sigma}_{,m}) (-\eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\sigma} + \dots) d^3x \right\}_{t=+\infty} - \left\{ \dots \right\}_{t=-\infty}.$$

Mais cette contribution aussi est zéro, car le champ est stationnaire pour $t = \pm \infty$ et, par conséquent, $\delta u^{\rho\sigma} = 0$. La formule de Peres est donc équivalente, en ce qui concerne l'énergie et l'impulsion totale du rayonnement, à la formule d'Einstein.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. EINSTEIN, *Berliner Berichte*, 1918, p. 154.
- [2] A. S. EDDINGTON, *The mathematical theory of Relativity*, Cambridge, 1954, p. 248.
- [3] D. GEISSLER, A. PAPAPETROU et H. TREDER, *Ann. Physik* (7), t. 2, 1959, p. 344.
- [4] H. BONDI, M. G. J. VAN DER BURG et A. W. K. METZNER, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A, t. 269, 1962, p. 21; R. K. SACHS, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A, t. 270, 1962, p. 103; E. NEWMAN et R. PENROSE, *J. Math. Physics*, t. 3, 1962, p. 566; E. NEWMAN et T. W. J. UNTI, *J. Math. Physics*, t. 3, 1962, p. 891.
- [5] Rappelons que, dans la méthode d'approximation classique utilisée par Einstein et Eddington, la détermination de la deuxième approximation nécessite des calculs trop laborieux.
- [6] Voir cependant W. B. BONNOR, *Phil. Trans.*, t. 251, 1959, p. 233, qui propose une méthode d'approximation différente.
- [7] A. PERES, *Phys. Rev.*, t. 128, 1962, p. 2471.
- [8] Voir A. PAPAPETROU, *Ann. Physik* (6), t. 20, 1957, p. 402.
- [9] Pour une discussion plus détaillée, voir référence [3].
- [10] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ, *The classical theory of fields*, Oxford, 1962.
- [11] Pour une déduction simple de toutes ces identités, voir J. N. GOLDBERG, *Phys. Rev.*, t. 111, 1958, p. 315.
- [12] Voir A. PAPAPETROU, *Ann. Physik*, (7), t. 8, 1961, p. 265.

(Manuscrit reçu le 13 janvier 1964).

Directeur de la publication : P. GAUTHIER-VILLARS.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL Éd. N° 1225.

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 4875. 7-1964.