ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. GÉHÉNIAU

Les groupes internes et la théorie de Heisenberg des particules élémentaires

Annales de l'I. H. P., section A, tome 1, n° 1 (1964), p. 21-30
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1964__1_1_21_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. I, N° 1, 1964, p. 21-30.

Section A :
Physique théorique.

Les groupes internes et la théorie de Heisenberg des particules élémentaires (1)

par

J. GÉHÉNIAU
Université de Bruxelles.

L'un des problèmes essentiels de la physique des particules élémentaires est sans doute d'exprimer correctement leurs caractéristiques internes : nombre baryonique, isospin, étrangeté, etc. Le groupe SU_2 suffit à l'École de Heisenberg pour représenter l'isospin et l'étrangeté, parce que l'étrangeté y est obtenue par des propriétés du vide, qui est lui-même un réservoir d'isospin. Dans le « modèle de la voie octuple » ces deux caractères sont décrits à l'aide du groupe SU_3. Dans le modèle du rotateur spatio-temporel, ce sont les indices p, q des représentations D_{pq} du groupe de Lorentz qui sont liés à l'isospin et à l'étrangeté.

L'École de Heisenberg a l'avantage de posséder une équation dont on peut espérer tirer toutes les propriétés des particules. J'exposerai quelques aspects de cette théorie. J'examinerai ensuite les équations du même type qui peuvent être écrites sur la base des deux autres groupes cités. Ceci à titre d'exemples. La même idée est applicable à tout groupe interne.

Le champ fondamental a d'abord été présenté, par les équations de Heisenberg-Pauli, comme un spineur ψ de Dirac à quatre composantes (et son conjugué ψ^*). Ces équations sont invariantes pour les groupes continus de Lorentz, de Pauli-Gürsey (isospin), de Touchek (nombre baryonique) et les groupes discrets désignés habituellement par P, C, T [*1*].

En particulier, elles sont invariantes pour la substitution :

$$\psi(\bar{r}, t) \rightarrow \gamma_4 \psi(-\bar{r}, t), \tag{1}$$

(1) Exposé fait au Séminaire L. de Broglie (Institut H. Poincaré), le 3 décembre 1963.

mais celle-ci ne représente pas la symétrie d'espace. Sa signification apparaît immédiatement dans les notations proposées par Dürr [2].

$$(2) \qquad \chi_{11} = \psi_1, \qquad \chi_{21} = \psi_2, \qquad \chi_{12} = -\psi_4^*, \qquad \chi_{22} = \psi_3^*,$$

où χ_{s1} et χ_{s2} sont deux semi-spineurs de première espèce. Dans ces notations et avec $\sigma_0 = 1$, $\sigma_k =$ matrices de Pauli qui opèrent sur le premier indice de χ, les équations fondamentales prennent la forme :

$$(3) \qquad \begin{cases} -i\sigma^\mu \partial_\mu \chi = l^2 \sigma^\mu \chi \, (\chi^+ \sigma_\mu \chi), \\ i\partial_\mu \chi^+ \sigma^\mu = l^2 \chi^+ \sigma^\mu \, (\chi^+ \sigma_\mu \chi) \, ; \end{cases}$$

la transformation de Pauli-Gürsey s'écrit :

$$(4) \qquad \chi \to e^{\frac{i\bar{\alpha}.\bar{\tau}}{2}} \chi.$$

où $\bar{\tau}$ sont les matrices de Pauli qui opèrent sur le second indice de χ; la transformation de Touchek est un simple changement de jauge :

$$(5) \qquad \chi \to e^{i\alpha} \chi$$

et (1) devient :

$$(6) \qquad \chi(\bar{r}, t) \to (-i\tau_2)(i\sigma_2)\chi^*(-\bar{r}, t).$$

Par (4) on voit que le second indice de χ représente l'isospin et par (6) que la substitution (1) doit être interprétée comme une opération PG.

Mais alors, quelle est la représentation de P ? En Mécanique ondulatoire il est bien connu que, pour des raisons d'invariance relativiste, la fonction d'onde semi-spinorielle de première espèce φ relative à un état de masse non nulle satisfait à un système de deux équations de Klein-Gordon, équivalent à un système de quatre équations de Dirac où figurent, à côté de φ, un semi-spineur de seconde espèce lié à φ. Dürr a montré qu'au champ quantifié pouvait également être associé un semi-spineur de seconde espèce $\tilde{\chi}$ [2]. Le lien entre ces deux grandeurs n'est pas établi avec précision, mais on dispose ainsi d'un spineur de Dirac :

$$(7) \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \chi \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

pour définir la symétrie d'espace

$$(8) \qquad \mathrm{PX}(\bar{r}, t) = \Gamma_4 \mathrm{X}(-\bar{r}, t).$$

Les équations obtenues par Dürr pour (7) sont celles qui établissent le maximum de symétrie entre χ et $\tilde{\chi}$. Elles sont formées, en effet, de (3) et, avec $\bar{\sigma}_0 = \mathrm{I}$, $\bar{\sigma}_k = -\sigma_k$,

$$(9) \qquad -i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \tilde{\chi} = l^2 \bar{\sigma}^\mu \tilde{\chi} (\tilde{\chi}^+ \bar{\sigma}_\mu \tilde{\chi})$$

(et une équation pour $\tilde{\chi}^{+}$) ou, à l'aide de X et des matrices Γ de Dirac

$$\Gamma^{\mu}\partial_{\mu}X = \tfrac{1}{2}l^{2}[\Gamma_{5}\Gamma^{\mu}X(\bar{X}\Gamma_{5}\Gamma_{\mu}X) + \Gamma^{\mu}X(\bar{X}\Gamma_{\mu}X)] \tag{10}$$

(et une équation pour $\bar{X} = X^{+}\Gamma_{4}$).

La première application de (3) et (10) a été le calcul, par une méthode de Tamm-Dancoff des masses du nucléon et des mésons pseudo-scalaires d'étrangeté nulle [*1*]. Leurs fonctions d'onde sont des éléments de matrice

$$\langle 0 \,|\, X(x) \,|\, N \rangle, \tag{11}$$

$$\langle 0 \,|\, X(x')\bar{X}(x'') \,|\, N'\bar{N}'' \rangle \tag{12}$$

associés à la destruction d'un nucléon, d'un système nucléon-antinucléon. Elles ont, pour les nucléons (11) huit composantes

$$\psi_{\alpha t}(x) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4\ ; \quad t = 1, 2). \tag{13}$$

Les mésons π d'isospin 1 s'obtiennent à partir de (12) par fusion complète du nucléon N' et de l'antinucléon $\bar{N}''$ dans l'état S. Cette opération fournit également un méson pseudo-scalaire d'isospin nul (η). Les fonctions d'onde ont respectivement trois composantes

$$\Phi_{(t't'')}(x) = \Phi_{t't''}(x) + \Phi_{t''t'}(x), \quad x = \tfrac{1}{2}(x' + x''), \quad \xi = x' - x'' = 0 \tag{14}$$

(état symétrique d'isospin) et une composante

$$\Phi_{12}(x) - \Phi_{21}(x) \tag{15}$$

(état antisymétrique d'isospin).

La réduction des fonctions à trois et quatre points qui apparaissent dans les calculs est effectuée grâce à une « règle de Wick » dans laquelle figure la valeur moyenne pour le vide

$$\langle 0 \,|\, X(x) \qquad \bar{X}(x') \,|\, 0 \rangle \tag{16}$$

dont on utilise une expression simplifiée à un seul pôle de masse $\varkappa$.

Les masses de π et η sont données en unités $\varkappa$ par les équations

$$1 - 2\left(\frac{\varkappa l}{4\pi}\right)^{2} q\left(\frac{m}{\varkappa}\right) = 0, \tag{17}$$

$$1 - 6\left(\frac{\varkappa l}{4\pi}\right)^{2} q\left(\frac{m}{\varkappa}\right) = 0, \tag{18}$$

où m est la masse cherchée. Ci-dessous quelques valeurs numériques, pour $\varkappa l = 5{,}88$, extraites de [3] :

$\left(\frac{\varkappa l}{4\pi}\right)^{-2} q^{-1}$ . . .	0,750	2	3,25	6
$\frac{m}{\varkappa}$	~ 0	0,170	0,394	0,665

Le rapport prévu par la théorie

$$\frac{m_\eta}{m_\pi} = 3{,}91$$

est en bon accord avec sa valeur expérimentale, ~ 4.

Pour le nucléon, on avait l'équation [1]

$$1 + 24\left(\frac{\varkappa l}{4\pi}\right)^4 \mathrm{L}\left(\frac{m}{\varkappa}\right) = 0. \tag{19}$$

Il est remarquable, vu les approximations faites, que les trois masses de ces particules d'étrangeté nulle soient obtenues ainsi avec une bonne approximation, grâce à un choix convenable de $\varkappa l$ — de l'ordre de 5,8 — et de $\varkappa$ — de l'ordre de la masse du nucléon.

Signalons une autre application. Elle concerne les moments magnétiques des nucléons. La méthode consiste à évaluer la modification apportée à l'énergie d'un nucléon au repos par la présence d'un champ magnétique extérieur, uniforme et constant. Ce champ est introduit dans l'équation (3) par son potentiel

$$\partial_\mu \to \partial_\mu - ie_t \mathrm{A}_\mu \qquad (e_1 = e, e_2 = 0) \tag{20}$$

et par un terme de Pauli. Ce terme, invariant pour les rotations autour du troisième axe de l'iso-espace, est unique, à un facteur k près. A cause du champ magnétique, la valeur moyenne pour le vide (16) est modifiée, comme en théorie quantique des champs habituelle. Le résultat intéressant est ici que la somme des moments magnétiques du proton et du neutron est indépendante de k et est de l'ordre de $\frac{e}{2\varkappa}$ (Les contributions aux moments magnétiques du proton et du neutron dues au terme de Pauli sont égales et de signes contraires).

Tout ceci ne permet pas encore de situer les particules étranges dans la théorie. C'est ici qu'intervient la notion de dégénérescence du vide [3]. Pour notre propos il suffit d'imaginer que le vide est rempli de particules, appelées spurions, dénuées de caractères relatifs au groupe de Lorentz, mais douées d'un isospin, $\frac{1}{2}$. Une particule est vue comme un système de N_p nucléons, N_a antinucléons, n'_p spurions e, n'_a antispurions $\bar{e}$ intimement liés. Les différences

$$B = N_p - N_a, \qquad S = n'_p - n'_a$$

déterminent son nombre baryonique et son étrangeté. D'où l'hypercharge

$$u = \tfrac{1}{2}(n_p - n_a),$$

où

$$n_p = N_p + n'_p, \qquad n_a = N_a + n'_a.$$

Les lois de transformation du spurion pour les opérations $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{I}$ sont calquées sur celles des particules matérielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C} : e \rightarrow e^* ; \\ \mathcal{G} : e \rightarrow (-i\tau_2)e^* ; \\ \mathcal{I} : e \rightarrow e^{\frac{i\vec{\alpha}.\vec{\tau}}{2}} e. \end{array} \right. \tag{21}$$

Il a paru nécessaire, pour produire la séparation des niveaux de masse baryoniques, d'attribuer en outre les deux parités ± 1 au spurion. Ceci a eu notamment pour effet de doubler le nombre d'hypérons d'étrangeté moins 1. Il existerait dans ce cas, des hypérons Λ (et Σ) de pariétés $+1$ et -1 et, d'après leur spectre de masse théorique, les deux premières particules par ordre de masses croissantes seraient un Λ et un Σ de parités opposées [*3*].

Cette prévision est en contradiction avec l'expérience. D'où le rejet du postulat sur la parité des spurions et l'on peut penser que cette correction soit de nature à rectifier la théorie [*4*].

A (11) et (12) s'ajoutent maintenant les éléments

$$\langle 0 \,|\, X(x) \,|\, N\bar{e} \rangle, \tag{22}$$

$$\langle 0 \,|\, X(x')\,\bar{X}(x'') \,|\, N'e\bar{N}'' \rangle. \tag{23}$$

Les fonctions d'onde (22) sont des états de spin $\frac{1}{2}$, d'étrangeté moins 1 et d'isospin 0 ou 1. L'état antisymétrique d'isospin est à quatre composantes

$$\psi_\alpha(x), \tag{24}$$

l'état symétrique d'isospin a 12 composantes

$$\psi_{\alpha(t_1 t_2)}(x). \tag{25}$$

Par fusion complète on tire de (23), comme de (12), des particules pseudoscalaires d'étrangeté 1, d'isospin $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$. Les états d'isospin $\frac{1}{2}$ peuvent être, par rapport aux indices d'isospin des deux particules N′, *e*, soit antisymétriques

(26) $$\Phi_{[t't]t''},$$

soit symétriques

(27) $$\Phi_{(t't)t''}.$$

Les fonctions d'onde du quadruplet sont complètement symétriques

(28) $$\Phi_{(t'tt'')}.$$

Le nombre d'états possibles est réduit par l'exigence suivante : la fonction d'onde doit être symétrique par rapport aux indices d'isospin des particules (nucléons et spurions), ainsi que des antiparticules (antinucléons et antispurions), liées entre elles dans le système.

Ce postulat écarte (26). Reste comme mésons pseudo-scalaires le triplet (14), le singulet (15), le doublet (27) et le quadruplet (28).

L'équation de masse est, pour le doublet [*4*],

(29) $$1 - 5\left(\frac{\varkappa l}{4\pi}\right)^2 q\left(\frac{m}{\varkappa}\right) = 0,$$

d'où avec $\varkappa l = 5{,}88$,

(30) $$\frac{m_k}{\varkappa} = 0{,}580 \qquad \text{et} \qquad \frac{m_k}{m_\pi} = 3{,}41,$$

en bon accord avec la valeur expérimentale ($\approx 3{,}61$).

A la conférence de Sienne [*4*], Heisenberg a également situé dans sa théorie l'invariant

(31) $$\lambda \mathrm{I} + \mu[\mathrm{T}(\mathrm{T}+1) - u^2] + \nu \mathrm{B} u,$$

où :

$$\mathrm{T}(\mathrm{T}+1) = \tfrac{1}{4}(\Sigma\bar{\tau}_p + \Sigma\bar{\tau}_a)^2$$

est le carré de l'isospin total. Ceci nous rapproche curieusement du modèle de la voie octuple, par le théorème d'Okybo [*5*].

Dans le modèle de la voie octuple, les notions d'isospin et d'hypercharge sont introduites simultanément par les propriétés du groupe SU_3 d'avoir comme sous-groupes qui commutent entre eux un groupe SU_2 et un groupe de jauge H à un paramètre. Ces propriétés permettent également d'introduire directement ces deux notions de manière explicite dans l'équation fondamentale de Heisenberg, en donnant à χ la variance du produit d'un semi-spineur pour $L_+^\uparrow$ par un tenseur irréductible pour SU_3 :

(32) $$\chi \langle\ \rangle D_{\frac{1}{2}0} \times \mathfrak{D}_{pq}.$$

La représentation à prendre dans SU_3 ne s'impose pas *a priori.*

Avec $\mathfrak{D}_{11}$ on a le point de vue le plus global

(33) $$\chi \langle\ \rangle D_{\frac{1}{2}0} \times \mathfrak{D}_{11}.$$

Les fonctions d'onde (11) sont alors celles de l'octet de baryons, dont la masse commune satisfait à une équation du type (19) obtenue en résolvant une équation du type (3) ou (10) par la méthode de Tamm-Dancoff à l'aide de la valeur moyenne pour le vide (16) qui est maintenant numériquement invariante pour SU_3. La séparation de ce niveau d'après l'isospin et l'étrangeté est réalisée en abandonnant l'invariance complète de (16) pour SU_3, tout en conservant son invariance pour les deux sous-groupes mentionnés ci-dessus. Dès lors, (16) devient le produit

(34) $$F(x, x')\Omega$$

d'un tenseur de l'espace-temps de Minkowski par des composantes d'un tenseur de SU_3 qui forment une grandeur numériquement invariante pour SU_2 et H seulement. La première expression qui se présente ainsi pour Ω est donnée par le théorème d'Okubo et, dans ce cas, Ω n'est autre que (31), vu dans SU_3. Ceci a pour conséquence de produire la séparation des masses baryoniques conformément à la relation

(35) $$2(m_N + m_\Xi) = 3m_\Lambda + m_\Sigma.$$

Il convient de noter que dans cette voie un problème nouveau se pose, celui de l'unicité de l'équation fondamentale. Cette unicité n'est, en effet, plus assurée lorsque la variance de χ pour SU_3 est celle de la représentation régulière $\mathfrak{D}_{11}$.

Ce problème ne se pose pas lorsque la variance de χ pour SU_3 est, par définition, celle de la représentation à trois dimensions $\mathfrak{D}_{10}$:

(36) $$\chi \langle\ \rangle D_{\frac{1}{2}0} \times \mathfrak{D}_{10}.$$

Dans ce cas, l'équation fondamentale est encore univoquement déterminée par les conditions d'invariance. Elle a d'ailleurs la même forme qu'en (3), à cette différence près que l'indice d'isospin $t = 1, 2$ est remplacé par un indice qui prend trois valeurs 1, 2, 3.

Introduisons ces modifications dans la première application mentionnée plus haut. Si l'invariance complète pour SU_3 est exigée, le facteur Ω de (34) est la matrice unité 3×3, (11) fournit trois états de même masse, mais

(12) conduit à deux niveaux d'états pseudo-scalaires, un octet de masse donnée par la même équation qu'en (17), et un singulet de masse donnée par l'équation

$$1 - 8\left(\frac{\varkappa l}{4\pi}\right)^2 q\left(\frac{m}{\varkappa}\right) = 0. \tag{37}$$

La séparation des niveaux d'après leur isospin et leur étrangeté est réalisée en abandonnant l'invariance de (16) pour SU_3 tout en conservant son invariance pour SU_2 et H. L'octet de mésons pseudo-scalaires se scinde en un triplet (π), un doublet (K) et un singulet (η), tandis que le triplet baryonique se scinde en un doublet (nucléons) et un singulet (Λ), comme dans le modèle de Sakata.

On peut obtenir directement l'octet de baryons à partir de (36), à condition que le vide soit dégénéré. Dans ce cas (22), où $\bar{e}$ est maintenant un vecteur de $\mathfrak{D}_{01}$ se réduit en un singulet et un octet. La séparation des niveaux de l'octet est toujours réalisée suivant les mêmes principes; (35) en résulte encore. Mais cette fois, le nucléon renferme un spurion comme les autres baryons et il faut éliminer arbitrairement les états sans spurion.

J'ai suggéré il y a quelque temps déjà d'introduire une équation du type (3) dans l'étude du modèle du rotateur spatio-temporel [*6*] [*7*].

Quelle variance interne attribuer à χ dans ce cas ? La plus simple serait celle d'un semi-spineur :

$$\chi \langle\ \rangle D_{\frac{1}{2}0} \times \mathfrak{D}_{\frac{1}{2}0}.$$

Mais c'est insuffisant parce qu'avec les produits $\chi\chi^+\chi$ on ne peut former une grandeur qui a la variance interne de χ, puisque

$$\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}0} \times \mathfrak{D}_{0\frac{1}{2}} \times \mathfrak{D}_{\frac{1}{2}0} = \mathfrak{D}_{1\frac{1}{2}} + \mathfrak{D}_{0\frac{1}{2}}.$$

Il est donc nécessaire de poser

$$\chi \langle\ \rangle D_{\frac{1}{2}0} \times \mathfrak{D}(\tfrac{1}{2}0), \tag{38}$$

où $\mathfrak{D}(\frac{1}{2}0)$ désigne la représentation spinorielle à quatre dimensions. Le champ χ possède huit composantes

$$\chi_s^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4\,; \quad s = 1, 2)$$

qui constituent, dans l'espace interne, 2×2 semi-spineurs de première espèce et 2×2 semi-spineurs de seconde espèce

$$\xi_s^\sigma \quad \text{et} \quad \eta_s^{\dot{\sigma}}. \tag{39}$$

Le lagrangien le plus général est formé de

$$- i\chi^+\beta_4\sigma^\mu\partial_\mu\chi \tag{40}$$

et d'une combinaison linéaire arbitraire à coefficients réels des cinq invariants du quatrième degré (dont deux seulement sont linéairement indépendants)

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \chi^+\beta_4\sigma^\mu\chi\,.\,\chi^+\beta_4\sigma_\mu\chi, & \chi^+\beta_4\beta_5\sigma^\mu\chi\,.\,\chi^+\beta_4\beta_4\sigma_\mu\chi, \\ \chi^+\beta_4\beta^\nu\sigma^\mu\chi\,.\,\chi^+\beta_4\beta_\nu\sigma_\mu\chi, & \chi^+\beta_4\beta_5\beta^\nu\sigma^\mu\chi\,.\,\chi^+\beta_4\beta_5\beta_\nu\sigma_\mu\chi, \\ \chi^+\beta_4\beta^{[\nu}\beta^{\rho]}\sigma^\mu\chi\,.\,\chi^+\beta_4\beta_{[\nu}\beta_{\rho]}\sigma_\mu\chi, & \end{array}\right.$$

où les matrices de Dirac

$$(42)\qquad \beta_5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

opèrent dans l'espace interne.

Au lieu de (3), on a donc

$$(43)\qquad -i\sigma^\mu\partial_\mu\chi = l^2\sigma^\mu(a\chi\,.\,\chi^+\beta_4\sigma_\mu\chi + b\beta_5\chi\,.\,\chi^+i\beta_4\beta_5\sigma_\mu\chi + \ldots)$$

(et une équation en χ^+), où a, b, ... sont cinq constantes réelles.

La valeur moyenne pour le vide

$$(44)\qquad \langle 0 \,|\, \chi(x)\,\chi^+(x')\,\beta_4 \,|\, 0 \rangle$$

est toujours de la forme

$$(45)\qquad \mathrm{F}(xx')\Omega,$$

où Ω est un opérateur de l'espace interne. La seule matrice numériquement invariante pour le groupe complet de Lorentz est la matrice unité; mais sans l'invariance pour la symétrie d'espace, on peut écrire plus généralement

$$(46)\qquad \Omega = \lambda \mathrm{I} + \mu\beta_5.$$

Dans ce cas, la représentation $\mathfrak{D}(p, q)$ se scinde en $\mathfrak{D}_{pq}$ et $\mathfrak{D}_{qp}$. Conformément au modèle du rotateur spatio-temporel, le premier indice fixe l'isospin

$$(47)\qquad \mathrm{T}_3 = p, \quad p-1, \quad \ldots, \quad -p$$

et le second l'étrangeté

$$(48)\qquad \mathrm{S} = 2q, \quad 2(q-1), \quad \ldots, \quad -2q.$$

Il en résulte que

$$(49)\qquad \langle 0 \,|\, \xi \,|\, \mathrm{N} \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle 0 \,|\, \eta \,|\, \mathrm{X} \rangle$$

représentent respectivement un doublet d'étrangeté nulle (nucléons) et deux singulets d'étrangetés moins un ($\wedge$) et plus un ($\vee$). La présence de β_4 dans (44) fixe le choix des fonctions d'onde des antiparticules

$$(50)\qquad \langle 0 \,|\, \eta^* \,|\, \overline{\mathrm{N}} \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle 0 \,|\, \xi^* \,|\, \overline{\mathrm{X}} \rangle.$$

La particule et son antiparticule ont donc la même représentation dans l'espace interne et ceci est bien conforme au modèle du rotateur spatio-temporel.

Ce modèle possède ainsi au même titre que la théorie de Heisenberg, son équation fondamentale à partir de laquelle on peut calculer notamment les masses des particules. C'est ce qu'il conviendrait de faire pour la mettre à l'épreuve.

Le but principal de cet exposé est de montrer qu'il peut être intéressant d'introduire systématiquement une équation de Heisenberg-Pauli en physique des particules. Cette proposition implique naturellement l'étude approfondie des équations non linéaires des champs quantifiés.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] H. P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder et K. Yamazaki, *Z. Naturforschung*, 14 *a*, 1959, p. 441.
[*2*] H. P. Dürr, *Z. Naturforschung*, t. 16 *a*, 1961, p. 327.
[*3*] H. P. Dürr et W. Heisenberg, *Z. Naturforschung*, t. 16 *a*, 1961, p. 726.
[*4*] W. Heisenberg, Communication présentée à la conférence de Sienne sur la Physique des hautes énergies, octobre 1963.
[*5*] S. Okubo, *Progr. Théor. Phys.*, t. 27, 1962, p. 949 et t. 28, 1962, p. 24.
[*6*] L. de Broglie, D. Bohm, P. Hillion, F. Halbwachs, T. Takabayasi et J.-P. Vigier, *Phys. Rev.*, t. 129, 1963, p. 438.
[*7*] L. de Broglie, F. Halbwachs, P. Hillion, T. Takabayasi et J.-P. Vigier, *Phys. Rev.*, t. 129, 1963, p. 451.

(Manuscrit reçu le 21 décembre 1963).