ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANDRÉ AVEZ

Le ds2 de Schwarzschild parmi les ds2 stationnaires

Annales de l'I. H. P., section A, tome 1, nº 3 (1964), p. 291-300
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1964__1_3_291_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. I, nº 3, 1964, p. 291-300.

Section A :
Physique théorique.

Le ds^2 de Schwarzschild parmi les ds^2 stationnaires

par

André AVEZ

SOMMAIRE. — Sous des hypothèses simples le seul ds^2 statique orthogonal régulier connu est celui de Schwarzschild. Par exemple, les ds^2 statiques orthogonaux à symétrie cylindrique présentent tous des singularités sur l'axe de symétrie. Il est donc naturel de conjecturer avec Lichnerowicz que si un modèle d'univers est régulier, complet, à comportement asymptotique euclidien, stationnaire, porteur d'un fluide parfait dont les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, c'est un modèle de Schwarzschild. On se propose de démontrer cette conjecture. Cela réduit considérablement l'axiomatique du ds^2 de Schwarzschild en la purgeant de ses hypothèses de symétrie sphérique.

SUMMARY. — A Lichnerowicz's conjecture is proved: if a cosmological model is regular, stationary, complete, with euclidean asymptotic behaviour, carrying a perfect fluid whose trajectories coincide with time lines, it is a Schwarzschild's model.

The Schwarzschild's ds^2 axiomatic is considerably reduced because the elimination of the spheric-symmetry hypothesis. We observe that Weyl's ds^2, with cylindrical symmetry, are not of the type studied: they carry singularities on the symmetry axis.

I

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

1. **Notations.** — Ce sont celles de Lichnerowicz : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Masson (Paris); ouvrage noté (L) par la suite.

2. **Espaces-temps produits stationnaires** ((L), p. 109). — Soit R la droite numérique. Nous dirons qu'un espace-temps V_4 est un produit stationnaire s'il existe une variété à trois dimensions V_3 de classe C^4 et un homéomorphisme h de classe C^4 de V_4 sur $V_3 \times R$ satisfaisant :

a) Les variétés $h^{-1}(\{x\} \times R)$, où $x \in V_3$, sont orientées dans le temps. On les appellera lignes de temps.

b) Les variétés $h^{-1}(V_3 \times \{t\})$, où $t \in R$ sont orientées dans l'espace. On les appellera sections d'espace.

c) La métrique de V_4 est de classe C^3. Les lignes de temps sont les trajectoires d'un groupe d'isométrie ne laissant invariant aucun point de V_4. Si, en outre, les lignes de temps sont les trajectoires orthogonales des sections d'espace, V_4 sera dit espace-temps produit statique orthogonal.

3. **Complétude** ((L), p. 135). — Soit V_4 un espace-temps produit stationnaire. Sa métrique induit sur une section d'espace W_3 une métrique définie négative g_{ij}. Nous dirons que V_4 est complet si les W_3 sont complets dans la métrique elliptique $-g_{ij}$.

4. **Comportement asymptotique euclidien.** — La définition adoptée est celle de (L), p. 139.

5. **Fluide parfait** ((L), p. 14). — Un schéma sera dit fluide parfait si le tenseur impulsion-énergie a la forme : $T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - pg_{\alpha\beta}$, où ρ est la densité, p la pression, u_α la vitesse unitaire du fluide. Des équations d'Einstein, on tire :

$$R_{\alpha\beta} = \chi[(\rho + p)u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\rho - p)], \tag{1}$$

où χ est une constante ne dépendant que du choix des unités.

Lemme 1. — Si un espace-temps produit statique orthogonal V_4 porte un fluide parfait dont les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, ρ et p ne dépendent, sur une section d'espace, que de la norme ξ^2 du vecteur de Killing ξ^α.

Preuve : Les équations différentielles des lignes de courant s'écrivent ((L), p. 37) :

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{\partial_\alpha p}{\rho + p}(g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta).$$

Mais

$$\xi^\alpha = \xi u^\alpha, \qquad \xi^\alpha \partial_\alpha \xi = 0, \qquad \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0,$$

donc :

$$-\partial_\beta \operatorname{Log} \xi = \frac{\partial_\beta p}{\rho + p} - \frac{\xi_\beta \cdot \xi^\alpha \partial_\alpha p}{\xi^2(\rho + p)}.$$

Rapportons V_4 au système de coordonnées orthogonales défini par les lignes de temps $x^i = (x^i)_0$, $i = 1, 2, 3$ et les sections d'espace. Puisque $\xi^i = 0$, il vient :

$$-\partial_i \operatorname{Log} \xi = \frac{\partial_i p}{\rho + p} \qquad \text{(C. Q. F. D.).}$$

II

COORDONNÉES ORTHOGONALES

Dans ce paragraphe et les suivants les indices latins prendront les valeurs de $1, 2, \ldots, n$, les indices majuscules $1, 2, \ldots, n-1$.

Soit V_n une variété à n dimensions munie d'une métrique g_{ij} de classe C^3. Rapportons localement V_n à un système de de coordonnées tel que les courbes $x^A =$ constante, $A = 1, \ldots, n-1$, soient orthogonales aux variétés $x^n =$ constante. La métrique de V_n prend la forme : $ds^2 = V^2(dx^n)^2 + \overset{*}{ds}{}^2$, où $\overset{*}{ds}{}^2 = g_{AB}dx^A dx^B$ est la métrique induite sur $x^n =$ constante. Affectons du signe * les éléments relatifs à la variété $x^n =$ constante munie de la métrique g_{AB}. Nous définissons un tenseur sur $x^n =$ constante par les égalités :

$$\Omega_{AB} = \frac{1}{2V} \partial_n g_{AB}, \qquad \Omega^B_A = g^{BC}\Omega_{CA}, \qquad \Omega^{AB} = g^{AC}g^{BD}\Omega_{CD},$$

et nous poserons :

$$K = \Omega^A_A, \qquad \Omega^2 = \Omega_{AB}\Omega^{AB}.$$

Calculons les $\Gamma_{i\,j}^{\,k}$:

On a : $g_{nn} = V^2$, $\quad g^{nn} = \bar{V}^2$, $\quad g_{nA} = g^{nA} = 0$, $\quad \overset{*}{g}{}^{AB} = g^{AB}$, d'où :

(2) $$\Gamma_{n\,n}^{\,n} = \frac{1}{2} g^{nn}\partial_n g_{nn} = \bar{V}^1 . \partial_n V$$

(3) $$\Gamma_{n\,A}^{\,n} = \frac{1}{2} g^{nn}\partial_A g_{nn} = \bar{V}^1 . \partial_A V$$

(4) $$\Gamma_{n\,n}^{\,A} = -\frac{1}{2} g^{AB}\partial_B g_{nn} = V\partial^A V$$

(5) $$\Gamma_{n\ B}^{\ A} = \frac{1}{2} g^{AC}\partial_n g_{CB} = V\Omega_B^A$$

(6) $$\Gamma_{A\ B}^{\ n} = -\frac{1}{2} g^{nn}\partial_n g_{AB} = -\bar{V}^1 . \Omega_{AB}$$

(7) $$\Gamma_{A\ B}^{\ C} = \overset{*}{\Gamma}{}_{A\ B}^{\ C}.$$

Calculons les $R_{ij\ l}^{\ \ k}$:

$$R_{AB\ D}^{\ \ C} = \partial_A\Gamma_{B\ D}^{\ C} - \partial_B\Gamma_{A\ D}^{\ C} + \Gamma_{A\ E}^{\ C}\Gamma_{B\ D}^{\ E} - \Gamma_{B\ E}^{\ C}\Gamma_{A\ D}^{\ E} + \Gamma_{A\ n}^{\ C}\Gamma_{B\ D}^{\ n} - \Gamma_{B\ n}^{\ C}\Gamma_{A\ D}^{\ n}.$$

Avec (5), (6), (7) :

(8) $$R_{AB\ D}^{\ \ C} = \overset{*}{R}{}_{AB\ D}^{\ \ C} - \Omega_A^C\Omega_{BD} + \Omega_B^C\Omega_{AD}$$

$$R_{AB\ n}^{\ \ C} = \partial_A\Gamma_{B\ n}^{\ C} - \partial_B\Gamma_{A\ n}^{\ C} + \Gamma_{A\ E}^{\ C}\Gamma_{B\ n}^{\ E} - \Gamma_{B\ E}^{\ C}\Gamma_{A\ n}^{\ E} + \Gamma_{A\ n}^{\ C}\Gamma_{B\ n}^{\ n} - \Gamma_{B\ n}^{\ C}\Gamma_{A\ n}^{\ n}.$$

Avec (3), (5), (7) :

$$R_{AB\ n}^{\ \ C} = \partial_A(V\Omega_B^C) + \overset{*}{\Gamma}{}_{A\ E}^{\ C}(V\Omega_B^E) - \overset{*}{\Gamma}{}_{A\ B}^{\ E}(V\Omega_E^C)$$
$$- \partial_B(V\Omega_A^C) - \overset{*}{\Gamma}{}_{B\ E}^{\ C}(V\Omega_A^E) + \overset{*}{\Gamma}{}_{B\ A}^{\ E}(V\Omega_E^C) + \Omega_A^C\partial_B V - \Omega_B^C\partial_A V,$$

soit :

(9) $$R_{AB\ n}^{\ \ C} = V[\overset{*}{\nabla}_A\Omega_B^C - \overset{*}{\nabla}_B\Omega_A^C].$$

$$R_{An\ n}^{\ \ B} = \partial_A\Gamma_{n\ n}^{\ B} - \partial_n\Gamma_{A\ n}^{\ B} + \Gamma_{A\ E}^{\ B}\Gamma_{n\ n}^{\ E} - \Gamma_{n\ E}^{\ B}\Gamma_{A\ n}^{\ E} + \Gamma_{A\ n}^{\ B}\Gamma_{n\ n}^{\ n} - \Gamma_{n\ n}^{\ B}\Gamma_{A\ n}^{\ n}.$$

Avec (2), (3), (4), (5), (7) :

$$R_{An\ n}^{\ \ B} = \partial_A(-V\partial^B V) + \overset{*}{\Gamma}{}_{A\ E}^{\ B}(-V\partial^E V) - \partial_n(V\Omega_A^B)$$
$$- V\Omega_E^B . V\Omega_A^E + \bar{V}^1 . \partial_n V . V\Omega_A^B - (-V\partial^B V)(\bar{V}^1\partial_A V),$$

soit :

(10) $$R_{An\ n}^{\ \ B} = -V[\overset{*}{\nabla}_A\partial^B V + \partial_n\Omega_A^B + V\Omega_E^B\Omega_A^E].$$

Calculons les R_{ij} :

$$R_{AB} = R_{CA\ B}^{\ \ C} + R_{nA\ B}^{\ \ n} = R_{CA\ B}^{\ \ C} + g^{nn}g_{BC}R_{An\ n}^{\ \ C}.$$

Avec (8) et (9) :

$$R_{AB} = \overset{*}{R}_{AB} - \Omega_{AB}.K - \bar{V}^1 . \overset{*}{\nabla}_A\partial_B V - g_{BC} . \bar{V}^1 . \partial_n\Omega_A^C.$$

Or :

$$g_{BC}\partial_n\Omega_A^C = \partial_n(\Omega_A^C g_{BC}) - \partial_n g_{BC} . \Omega_A^C = \partial_n\Omega_{AB} - 2V\Omega_{AC}\Omega_B^C,$$

d'où :

(11) $$R_{AB} = \overset{*}{R}_{AB} - \bar{V}^1 . \partial_n\Omega_{AB} - \bar{V}^1 . \overset{*}{\nabla}_A\partial_B V - K\Omega_{AB} + 2\,\Omega_A^C\Omega_{CB}.$$

$$R_{nA} = R_{nCA}^{\ \ \ C}, \quad \text{avec (9) :}$$

$$\text{(12)} \qquad R_{nA} = V \cdot \overset{\bullet}{\nabla}_B(\Omega^B_A - g^B_A K).$$

$$R_{nn} = R_{nCn}{}^C, \quad \text{avec (10) :}$$

$$\text{(13)} \qquad R_{nn} = -V(\overset{\bullet}{\Delta}_2 V + \partial_n K + V\Omega^2).$$

III

ÉNONCÉ DU THÉORÈME FONDAMENTAL

1. **Le théorème fondamental.** — Si un modèle d'univers V_4 est :

a) un produit stationnaire,

b) complet,

c) à comportement asymptotique euclidien,

d) porteur d'un fluide parfait dont les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps,

e) tel qu'aux points d'une section d'espace où $\partial_i \xi = 0$, Dét $(\partial_{ij}\xi) \neq 0$, c'est un modèle de Schwarzschild.

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE. — Si un modèle d'univers est

a') un produit statique orthogonal,

b') complet,

c') la norme ξ^2 du vecteur de Killing tendant vers 1 par valeurs inférieures dans le domaine à l'infini des sections d'espace,

d') porteur d'un fluide parfait,

e') vérifiant le *e)* ci-dessus,

c'est un modèle de Schwarzschild.

2. **Réduction du problème.** — D'après un théorème de Lichnerowicz ((L), p. 146), *a, b, c, d* entraînent que V_4 est un produit statique orthogonal. En le rapportant au système de coordonnées orthogonales défini par les lignes de temps et les sections d'espace, les équations d'Einstein s'écrivent ((L), p. 136) compte tenu de (1) et de $u_i = 0$, $u_0 u_0 = \xi^2$:

$$\text{(14)} \qquad \overline{R}_{ij} = \overline{\xi}^1 . \overline{\nabla}_i \partial_j \xi - \frac{\chi}{2} g_{ij}(\rho - p).$$

$$\text{(15)} \qquad \overline{\Delta}_2 \xi = -\frac{\chi\xi}{2}(\rho + 3p),$$

où g_{ij} est la métrique définie négative des sections d'espace, $\overline{R}_{ij}$ leur tenseur de Ricci, $\overline{\nabla}\, \partial_j \xi$ et $\overline{\Delta}_2 \xi$ la dérivée seconde covariante et le Laplacien de ξ sur une section. Tout revient donc à déterminer sur une variété à trois dimensions W_3 une fonction ξ et une métrique elliptique $-g_{ij}$ vérifiant (14) et (15).

Au voisinage d'un point de W_3 où $\partial_i \xi \neq 0$, rapportons W_3 au système de coordonnées orthogonales définit par les surfaces $x^3 = \xi =$ constante et leurs trajectoires orthogonales $x^1 = (x^1)_0$, $x^2 = (x^2)_0$. Nous pouvons identifier ce voisinage avec la variété V_n de la 2e partie ($n = 3$), ξ avec x^3. Ainsi, les grandeurs affectées du signe * seront relatives aux surfaces $\xi = \xi_0$.

Afin d'écrire le système (11), (12), (13), remarquons que $\partial_i \xi = \delta_i^3$. Par suite :

$$\overline{\nabla}_i \partial_j \xi = \partial_{ij} \xi - \overline{\Gamma}_{ij}^k \partial_k \xi = -\overline{\Gamma}_{ij}^3\ ;$$

soit :

$$(16) \quad \overline{\nabla}_A \partial_B \xi = \overline{V}^1 . \Omega_{AB}, \quad \overline{\nabla}_3 \partial_A \xi = -\overline{V}^1 . \partial_A V, \quad \overline{\nabla}_3 \partial_3 \xi = -\overline{V}^1 . \partial_3 V.$$

Remarquons aussi que $\overset{*}{R}_{AB} = \frac{1}{2} \overset{*}{R} g_{AB}$.

Avec (14) et (16), (11), (12), (13) s'écrit :

$$(17) \quad \frac{\Omega_{AB}}{V\xi} - \frac{\chi}{2} g_{AB}(\rho - p) = \frac{\overset{*}{R}}{2} g_{AB} - \frac{\partial_3 \Omega_{AB}}{V} - \frac{\overset{*}{\nabla}_A \partial_B V}{V} - K\Omega_{AB} + 2\, \Omega_A^C \Omega_{CB}.$$

$$(18) \quad -\frac{\partial_A V}{V^2 \xi} = \overset{*}{\nabla}_B (\Omega_A^B - g_A^B K).$$

$$(19) \quad \frac{\chi}{2} V(\rho - p) + \frac{\partial_3 V}{V^2 \xi} = \overset{*}{\Delta}_2 V + \partial_3 K + V\Omega^2.$$

Avec (16), (15) s'écrit :

$$\overline{\Delta}_2 \xi = g^{ij} \overline{\nabla}_i \partial_j \xi = \frac{g^{AB} \Omega_{BA}}{V} - \frac{g^{33} \partial_3 V}{V} = \frac{K}{V} - \frac{\partial_3 V}{V^3},$$

soit

$$(20) \quad -\frac{\chi}{2} \xi V(\rho + 3p) = K - \frac{\partial_3 V}{V^2}.$$

Établissons deux dernières formules :

$$g_{AB} g^{BC} = \delta_A^C \qquad \text{entraîne} \qquad \partial_3 g_{AB} . g^{BC} + g_{AB} . \partial_3 g^{BC} = 0\ ;$$

or $\quad \partial_3 g_{AB} = 2\, V\Omega_{AB}, \qquad$ donc $\qquad 2\, V\Omega_A^C + g_{AB} \partial_3 g^{BC} = 0.$

Ainsi ;

$$\partial_3 g^{BC} = -2V . \Omega^{BC}\ ;$$

par suite :

$$g^{AB}\partial_3\Omega_{AB} = \partial_3(g^{AB}\Omega_{AB}) - \partial_3 g^{AB}.\Omega_{AB} = \partial_3 K + 2\,V.\Omega^2.$$

Contractons en g^{AB} les deux membres de (17) en tenant compte de cette dernière relation :

$$\overset{*}{R} = \frac{K}{V\xi} + \frac{\partial_3 K}{V} + \frac{\overset{*}{\Delta}_2 V}{V} + K^2 - \chi(\rho - p). \tag{21}$$

Remplaçons $\overset{*}{\Delta}_2 V + \partial_3 K$ par sa valeur tirée de (19) et utilisons (20) pour chasser $\frac{\partial_3 V}{V^2}$:

$$\overset{*}{R} = \frac{2K}{V\xi} + K^2 - \Omega^2 + 2\chi p. \tag{22}$$

IV

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

On se place systématiquement sous les hypothèses du théorème.

1. **Lemme 2.** — V et $\overset{*}{R}$ sont constants sur une même composante connexe d'une surface ξ = constante.

Preuve. — A cause de la connexité, il suffit de la démontrer localement. Faisons opérer $\overset{*}{\nabla}{}^B$ sur les deux membres de (17).

Calcul de $\partial_A\overset{*}{R}$: on utilise (22).

Calcul de $\overset{*}{\nabla}{}^B(\partial_3\Omega_{AB})$:

$$\begin{aligned}\overset{*}{\nabla}{}^B(\partial_3\Omega_{AB}) = \overset{*}{g}{}^{BC}\overset{*}{\nabla}_C(\partial_3\Omega_{AB}) &= \overset{*}{g}{}^{BC}[\partial_C\partial_3\Omega_{AB} - \overset{*}{\Gamma}{}_C{}^H{}_A\partial_3\Omega_{HB} - \overset{*}{\Gamma}{}_C{}^H{}_B\partial_3\Omega_{HA}] \\ &= \overset{*}{g}{}^{BC}[\partial_3(\partial_C\Omega_{AB} - \overset{*}{\Gamma}{}_C{}^H{}_A\Omega_{HB} - \overset{*}{\Gamma}{}_C{}^H{}_B\Omega_{HA}) + \partial_3\overset{*}{\Gamma}{}_C{}^H{}_A.\Omega_{HB} + \partial_3\overset{*}{\Gamma}{}_C{}^H{}_B.\Omega_{HA}] \\ &= \overset{*}{g}{}^{BC}\partial_3(\overset{*}{\nabla}_C\Omega_{AB}) + \Omega_H^C\partial_3\overset{*}{\Gamma}{}_C{}^H{}_A + \Omega_{HA}\overset{*}{g}{}^{BC}\partial_3\overset{*}{\Gamma}{}_C{}^H{}_B.\end{aligned}$$

Mais d'une part :

$$\overset{*}{g}{}^{BC}\partial_3(\overset{*}{\nabla}_C\Omega_{AB}) = \partial_3(\overset{*}{\nabla}{}^B\Omega_{AB}) - \partial_3\overset{*}{g}{}^{BC}.\overset{*}{\nabla}_C\Omega_{AB} = \partial_3(\overset{*}{\nabla}{}^B\Omega_{AB}) + 2\,V\Omega^{BC}\overset{*}{\nabla}_C\Omega_{AB},$$

car on a vu que $\partial_3\overset{*}{g}{}^{BC} = -2V\Omega^{BC}$.

D'autre part :

$$\partial_3 \overset{*}{\Gamma}{}_C{}^H{}_A = \frac{1}{2} \partial_3[\overset{*}{g}{}^{HK}(\partial_C g_{KA} + \partial_A g_{KC} - \partial_K g_{AC})]$$

$$= \frac{1}{2} \partial_3 \overset{*}{g}{}^{HK}(\partial_C g_{KA} + \partial_A g_{KC} - \partial_K g_{AC}) + \frac{1}{2} \overset{*}{g}{}^{HK}(\partial_C \partial_3 g_{KA} + \partial_A \partial_3 g_{KC} - \partial_K \partial_3 g_{AC}),$$

c'est-à-dire, avec $\partial_3 g_{KA} = 2V\Omega_{KA}$, $\partial_3 \overset{*}{g}{}^{HK} = -2V\Omega^{HK}$:

$$\partial_3 \overset{*}{\Gamma}{}_C{}^H{}_A = -V\Omega^{HK}(\partial_C g_{KA} + \partial_A g_{KC} - \partial_K g_{AC}) + \overset{*}{g}{}^{HK}[\partial_C(V\Omega_{KA}) + \partial_A(V\Omega_{KC}) - \partial_K(V\Omega_{AC})]$$
$$= \overset{*}{\nabla}_C(V\Omega^H_A) + \overset{*}{\nabla}_A(V\Omega^H_C) - \overset{*}{\nabla}{}^H(V\Omega_{AC}).$$

Par suite :

$$\overset{*}{\nabla}{}^B(\partial_3 \Omega_{AB}) = \partial_3(\overset{*}{\nabla}{}^B \Omega_{AB}) + 2\,V\Omega^{BC}\overset{*}{\nabla}_C \Omega_{AB} + \Omega^{HC}\overset{*}{\nabla}_A(V\Omega_{HC})$$
$$+ 2\,\Omega_{HA}\overset{*}{\nabla}_C(V\Omega^{HC}) - \Omega_{HA}\overset{*}{\nabla}{}^H(VK).$$

Calcul de $\overset{*}{\nabla}{}^B \overset{*}{\nabla}_A \partial_B V$:

Les identités de Ricci donnent :

$$\overset{*}{\nabla}{}^B \overset{*}{\nabla}_A \partial_B V = \frac{\overset{*}{R}}{2} \partial_A V + \partial_A \overset{*}{\Delta}_2 V.$$

Pour faire opérer $\overset{*}{\nabla}{}^B$ sur les deux membres de (17), tenons compte des calculs précédents. Il reste :

$$-\frac{\chi}{2} \partial_A[V(\rho - p)] - \chi V \partial_A p + \frac{1}{\xi} \overset{*}{\nabla}{}^B \Omega_{AB} = \frac{V}{2} \partial_A K^2 - \partial_A(V\Omega^2)$$
$$+ \frac{\partial_A K}{\xi} - \frac{K}{\xi} \frac{\partial_A V}{V} - \partial_3(\overset{*}{\nabla}{}^B \Omega_{AB}) - \partial_A(\overset{*}{\Delta}_2 V) - KV\overset{*}{\nabla}{}^B \Omega_{BA}.$$

Remplaçons $\overset{*}{\nabla}{}^B \Omega_{AB}$ et $\overset{*}{\Delta}_2 V$ par leur valeur tirée de (18) et (19) :

$$\chi V^3 \partial_A p + \frac{\partial_A V}{\xi^2} = 0.$$

Mais d'après le lemme 1, valide sous nos hypothèses, $\partial_A p = 0$; donc $\partial_A V = 0$, et V est constant sur $\xi = \xi_0$. Ainsi, V, ρ et p ne dépendent que de ξ. D'après (20), puis (21), il en est donc de même de K et $\overset{*}{R}$.

2. **Lemme 3.** — Désignons par M_r le nombre (éventuellement infini) de points de W_3 où $\partial\,\xi = 0$, la forme quadratique $\partial_{ij}\xi . X^i X^j$ comportant r signes moins en ce point. Alors $M_1 = M_2 = 0$.

Preuve : Le lemme 2 montre que $\overline{\Delta}_1\xi = g^{ij}\partial_i\xi\partial_j\xi = g^{ij}\delta_{3i}\delta_{3j} = g^{33} = \overline{V}^2$ ne dépend que de ξ. Donc :

$$\partial_i\overline{\Delta}_1\xi = f(\xi)\partial_i\xi.$$

Prenons la dérivée covariante des deux membres et plaçons-nous en un point où $\partial_i\xi = 0$ (point isolé, puisque Dét $(\partial_{ij}\xi) \neq 0$) :

$$\overline{\nabla}_i\partial_j\xi . \overline{\nabla}_k\partial^j\xi = f . \overline{\nabla}_i\partial_k\xi.$$

L'hypothèse e entraîne Dét $(\overline{\nabla}_i\partial_j\xi) =$ Dét $(\partial_{ij}\xi) \neq 0$, donc :

$$\overline{\nabla}_i\partial_j\xi = f . g_{ij}.$$

Par suite $\partial_{ij}\xi . X^iX^j = f . g_{ij}X^iX^j$ est une forme définie.

3. **Lemme 4.** — $M_3 = 0$.

Preuve : Si $M_3 \neq 0$, cela signifie qu'il existe un point x de W_3 où $\partial_i\xi = 0$, la forme quadratique $-\partial_{ij}\xi . X^jX^j$ étant elliptique :

$$\overline{\Delta}_2\xi = g^{ij}\partial_{ij}\,\xi > 0$$

ce qui contredit (15) d'après lequel :

$$\overline{\Delta}_2\xi \leqslant 0.$$

4. **Lemme 5.** — $M_0 = 1$.

Preuve : D'après l'hypothèse c, il existe ξ_0 assez voisin de 1 pour que $D = \{x;\ x \in W_3,\ \xi(x) \leqslant \xi_0\}$ contienne tous les points singuliers de ξ. Ainsi, D est compact, connexe, c implique que son bord ∂D est difféomorphe à S^2, tous les points critiques de ξ sont dans D et la valeur de ξ sur ∂D est supérieure aux valeurs de ξ sur $D - \partial D$. On peut donc appliquer les inégalités de Morse (3).

En désignant par B_r le $r^{\text{ième}}$ nombre de Betti de D et en posant :

$$\pi_i = M_i - B_i + 1 :$$

$$\begin{aligned}
1 &\leqslant \pi_0 \\
1 &\geqslant \pi_0 - \pi_1 \\
1 &\leqslant \pi_0 - \pi_1 + \pi_2 \\
1 &= \pi_0 - \pi_1 + \pi_2 - \pi_3.
\end{aligned}$$

Compte tenu de $B_0 = 1$, $M_1 = M_2 = M_3 = 0$, il reste :

$$\begin{aligned} M_0 &\geqslant 1 \\ M_0 + B_1 &\leqslant 2 \\ M_0 + B_1 - B_2 &\geqslant 1 \\ 1 + (B_0 - B_1 + B_2 - B_3) &= M_0. \end{aligned}$$

Comme $\partial D \approx S^2$, $\chi(D) = B_0 - B_1 + B_2 - B_3 = 0$, donc $M_0 = 1$.

5. **Lemme 6.** — Soit V_n une variété connexe de classe C^2 sur laquelle est définie une fonction ξ de classe C^2. S'il n'existe sur V_n qu'un seul point où $\partial_i \xi = 0$ et qu'en ce point $\partial_{ij}\xi$ est elliptique, V_n est difféomorphe à R_u et les $\xi =$ constante sont difféomorphes à S^{n-1}.

Preuve : Voir Morse (lemme 7, p. 360).

7. **Démonstration du théorème fondamental.** — D'après le lemme 5, il n'existe sur une section d'espace W_3 qu'un point 0 où $\partial_i \xi = 0$ et en ce point $\partial_{ij}\xi$ est elliptique.

D'après le lemme 6, V_3 est donc difféomorphe à R^3. La démonstration de ce lemme montre que les lignes intégrales de $\partial\ \xi$ et les surfaces difféomorphes à S^2 : $\xi =$ constante, constituent un système global de coordonnées orthogonales sur $W_3 - \{ 0 \}$. D'après le lemme 2, les surfaces $\xi = \xi_0$ forment une famille de surfaces parallèles et à courbure constante. La métrique de W^3 écrite dans le système de coordonnées ci-dessus : $ds^2 = V^2(d\xi)^2 + g_{AB}dx^A dx^B$, ne dépend donc que de ξ, ainsi que ρ et p (lemme 1). On sait alors que V_4 est un modèle de Schwarzschild.

Je remercie les professeurs Ehlers et Kundt qui m'ont signalé une simplication du Lemme 4.

RÉFÉRENCES

A. Avez, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 257, 1963, p. 3316-3318.

A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris.

M. Morse, *Transactions of the American Mathematical Society*, t. 27, 1925, p. 345-396.

(Manuscrit reçu le 26 mars 1964).