ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PHAM MAU QUAN

Magnétohydrodynamique relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 2, nº 2 (1965), p. 151-165
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__2_2_151_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. II, nº 2, 1965, p. 151-165.

Section A : *Physique théorique.*

Magnétohydrodynamique relativiste

par

PHAM MAU QUAN

SOMMAIRE. — Les équations relativistes de la magnétohydrodynamique affectent une forme simple qui se prête à des interprétations fécondes en termes classiques d'espace et de temps. On a étudié leur compatibilité au moyen d'une analyse du problème de Cauchy. Les variétés caractéristiques rendent compte des ondes hydrodynamiques et des ondes d'Alfvèn. Une étude locale a été faite concernant la propagation de ces ondes : on retrouve à des corrections relativistes près les résultats classiques. Enfin les chocs magnétohydrodynamiques sont étudiés comme correspondant aux mesures singulières portées par des hypersurfaces. Une interprétation locale en a été faite.

1. INTRODUCTION

En mécanique relativiste, l'élément primitif est l'espace-temps V_4, variété différentiable de dimension 4, de classe C^2, C^4 par morceaux, muni d'une métrique riemannienne $g_{\alpha\beta}$ du type hyperbolique normal qui définit sur l'espace vectoriel tangent T_x en chaque point $x \in V_4$ une structure d'espace-temps plat de Minkowski.

L'espace-temps V_4 constitue l'univers des phénomènes physiques, ceux-ci étant décrits dans des domaines de V_4 par des schémas géométriques continus. La métrique d'univers V_4 satisfait localement aux équations d'Einstein :

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

qui sont un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre par rapport aux $g_{\alpha\beta}$, de caractère tensoriel et généralisant l'équation de Laplace-

Poisson de la théorie du potentiel classique. Le premier membre $S_{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique appelé tenseur d'Einstein : il définit la structure géométrique de l'espace-temps. Le second membre est un tenseur également symétrique appelé tenseur d'impulsion-énergie : il doit décrire au mieux la distribution matérielle ou énergétique dans V_4.

Un fluide est donc représenté dans un domaine D connexe de V_4 par le champ de tenseur $T_{\alpha\beta}$ qui selon A. Lichnerowicz doit admettre un vecteur propre orienté dans le temps. Selon le problème étudié, on est conduit à faire la décomposition de $T_{\alpha\beta}$, décomposition qui correspond à la séparation et à l'interaction des phénomènes mécaniques, thermodynamiques électromagnétiques. Ainsi dans le cas d'un fluide parfait en l'absence de phénomènes thermodynamiques et électromagnétiques :

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}$$

où ρ est la densité propre d'énergie, p la pression scalaire, u_a le vecteur vitesse unitaire ($g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = +1$).

Le tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta}$ étant conservatif, i. e. $\nabla_\alpha S^\alpha{}_\beta = 0$, il en est de même du tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$. Les quatre identités de conservation :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.2}$$

expriment la conservation de l'impulsion-énergie, généralisant les équations classiques du mouvement et de continuité.

Les équations (1.1) et (1.2) auxquelles on ajoute des équations supplémentaires servant à décrire les propriétés du fluide constituent le système des équations du champ qui est un système d'équations aux dérivées partielles dont on devra étudier l'existence et l'unicité de la solution.

2. REPRÉSENTATION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Le champ électromagnétique est représenté par deux champs de tenseurs antisymétriques d'ordre 2 : $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ appelés respectivement tenseur champ électrique-induction magnétique et tenseur induction électrique-champ magnétique. On introduit les tenseurs adjoints :

$$\overset{*}{H}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}H^{\gamma\delta} \qquad \overset{*}{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}G^{\gamma\delta} \tag{2.1}$$

où $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur antisymétrique définissant la forme élément de volume associée à la métrique $g_{\alpha\beta}$.

Cette représentation du champ électromagnétique entraîne l'existence des vecteurs champs et inductions électriques et magnétiques :

$$(2.2) \qquad e_\alpha = H_{\beta\alpha}u^\beta \quad d_\alpha = G_{\beta\alpha}u^\beta \quad h_\alpha = \overset{*}{G}_{\beta\alpha}u^\beta \quad b_\alpha = \overset{*}{H}_{\beta\alpha}u^\beta.$$

Ces vecteurs sont orthogonaux à u_α :

$$(2.3) \qquad e_\alpha u^\alpha = d_\alpha u^\alpha = h_\alpha u^\alpha = b_\alpha u^\alpha = 0$$

et coïncident dans le 3-plan espace orthogonal à u^α avec les vecteurs champs et inductions usuels. Inversement $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ s'expriment en fonction de e_α, d_α, h_α, b_α :

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} H_{\alpha\beta} &= u_\alpha e_\beta - u_\beta e_\alpha - \eta_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\lambda b^\mu & \overset{*}{H}_{\alpha\beta} &= u_\alpha b_\beta - u_\beta b_\alpha + \eta_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\lambda e^\mu \\ G_{\alpha\beta} &= u_\alpha d_\beta - u_\beta d_\alpha - \eta_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\lambda h^\mu & \overset{*}{G}_{\alpha\beta} &= u_\alpha h_\beta - u_\beta h_\alpha + \eta_{\alpha\beta\lambda\mu}u^\lambda d^\mu. \end{aligned}$$

En théorie de Maxwell les inductions dépendent linéairement des champs. Dans le cas isotrope où le fluide a pour permittivité électrique ε et pour perméabilité magnétique μ, on a :

$$(2.5) \qquad b_\alpha = \mu h_\alpha \qquad \text{ou} \qquad \overset{*}{H}_{\beta\alpha}u^\beta = \mu \overset{*}{G}_{\beta\alpha}u^\beta$$

$$(2.6) \qquad d_\alpha = \varepsilon e_\alpha \qquad \text{ou} \qquad \overset{*}{G}_{\beta\alpha}u^\beta = \varepsilon \overset{*}{H}_{\beta\alpha}u^\beta.$$

On en déduit :

$$(2.7) \qquad G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu}H_{\alpha\beta} + \frac{1-\varepsilon\mu}{\mu}(H_{\rho\alpha}u^\rho u_\beta - H_{\rho\beta}u^\rho u_\alpha).$$

L'évolution du champ électromagnétique est régie par les deux groupes d'équations de Maxwell :

$$(2.8) \qquad \nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0$$

$$(2.9) \qquad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = J^\beta.$$

Les équations (2.8) qui s'écrivent encore $\partial_\alpha H_{\beta\gamma} + \partial_\beta H_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma H_{\alpha\beta} = 0$ expriment qu'il existe localement un champ de vecteur ψ_α (potentiel vecteur) dont $H_{\alpha\beta}$ est le rotationnel : $H_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\psi_\beta - \partial_\beta\psi_\alpha$. Les équations (2.9) définissent le vecteur courant électrique J^β. On peut décomposer J^β en une composante δu^β colinéaire à u^β et une composante Γ^β orthogonale à u^β et satisfaisant à l'hypothèse d'Ohm, i. e. $\Gamma^\beta = \sigma e^\beta = \sigma H^{\alpha\beta}u_\alpha$:

$$(2.10) \qquad J^\beta = \delta u^\beta + \sigma u_\alpha H^{\alpha\beta}$$

δ est la densité de charge propre, σ la conductivité du fluide. Alors δu^β est le courant de convection, $\Gamma^\beta = \sigma u_\alpha H^{\alpha\beta} = \sigma e^\beta$ le courant de conduction. On démontre facilement que :

$$(2.11) \qquad \nabla_\alpha J^\alpha = 0.$$

Cette identité traduit la loi de conservation de l'électricité.

3. LE TENSEUR D'IMPULSION-ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

A partir de $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ on construit le tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique $\tau_{\alpha\beta}$ dont la divergence donne la densité de force électromagnétique. En généralisant un résultat connu dans le cas sans inductions ($G_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$), on obtient :

$$(3.1) \qquad \tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}(G_{\rho\sigma}H^{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha}H^{\rho}{}_{\beta}.$$

Tenant compte des équations de Maxwell, on en déduit :

$$(3.2) \qquad \nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = J^\alpha H_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} g^\alpha{}_\beta (G^{\rho\sigma}\nabla_\alpha H_{\rho\sigma} - H_{\rho\sigma}\nabla_\alpha G^{\rho\sigma}).$$

Pour interpréter ces résultats, exprimons $\tau_{\alpha\beta}$ en fonction des vecteurs e_α, d_α h_α, b_α, u_α :

$$(3.3) \quad \tau_{\alpha\beta} = -\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right)(e_\rho d^\rho + h_\rho b^\rho) - (e_\alpha d_\beta + h_\alpha b_\beta) - (u_\alpha w_\beta + u_\beta v_\alpha)$$

où l'on a posé :

$$(3.4) \qquad v_\alpha = \eta_{\alpha\lambda\mu\nu} e^\lambda h^\mu u^\nu \qquad w_\alpha = \eta_{\alpha\lambda\mu\nu} d^\lambda b^\mu u^\nu.$$

On voit que dans le repère propre τ_{00} représente la densité d'énergie électromagnétique $\Lambda = \frac{1}{2}(e_\rho d^\rho + h_\rho b^\rho)$, τ_{i0} le vecteur de Poynting v_i, τ_{0i} le vecteur d'impulsion w_i proportionnel au vecteur de Poynting et τ_{ij} le tenseur des tensions électromagnétiques $e_i d_j + h_i b_j$ de Maxwell.

De même, en exprimant le second membre de (3.2) en fonction de e_α, h_α, d_α, b_α, u_α, il vient :

$$(3.5) \quad \nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = \delta e_\beta + \eta_{\beta\lambda\mu\nu}\Gamma^\lambda b^\mu u^\mu - (\Gamma_\alpha e^\alpha)u_\beta - (v_\alpha - w_\alpha)\nabla_\beta u^\alpha + \frac{1}{4}\, e_\alpha e^\alpha \nabla_\beta \varepsilon$$

les trois premiers termes du second membre constituent l'expression de $J^\alpha H_{\alpha\beta}$, ils s'interprètent comme la densité de force électrique, la densité d'action magnétique sur le courant de conduction et le travail des forces électromagnétiques (effet Joule). Les deux derniers termes constituent l'expression du terme supplémentaire dans (3.2). Si la permittivité électrique est constante, le dernier terme disparaît. Quant au terme $-(v_\alpha - w_\alpha)\nabla_\beta u^\alpha$, on le rencontre déjà en physique classique; il est nul si $v_\alpha = 0$ ($w_\alpha = 0$ aussi) ou si u^α est un champ à dérivée covariante nulle.

4. ÉQUATIONS DE LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE

La magnétohydrodynamique est l'étude des fluides de conductivité infinie. Le courant de conduction $\Gamma_\alpha = \sigma e_\alpha$ devant rester fini, on en déduit que nécessairement $e_\alpha = 0$, $G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta}$ et :

$$\overset{*}{H}_{\alpha\beta} = \mu(u_\alpha h_\beta - h_\alpha u_\beta) \tag{4.1}$$

le tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique a alors pour expression :

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu\left[\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) | h |^2 - h_\alpha h_\beta\right] \tag{4.2}$$

où l'on a posé $| h |^2 = - h_\alpha h^\alpha \geqslant 0$. Il est symétrique, alors que dans le cas général il ne l'est pas.

Le tenseur d'impulsion-énergie en magnétohydrodynamique est la somme du tenseur d'impulsion-énergie du schéma fluide considéré en l'absence du champ électromagnétique et du tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique (4.2). Pour un fluide parfait de densité propre ρ, de pression p, il a pour expression :

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \mu\left[\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) | h |^2 - h_\alpha h_\beta\right]. \tag{4.3}$$

On supposera dans la suite que le fluide admet l'équation d'état $\rho = \varphi(p)$ et que la permittivité magnétique μ est constante. Les résultats restent valables dans le cas μ variable.

Les équations relativistes de la magnétohydrodynamique sont alors constituées par les équations d'Einstein, les conditions de conservation et les équations de Maxwell du 1er groupe :

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{4.4}$$

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{4.5}$$

$$\nabla_\alpha(u^\alpha h^\beta - u^\beta h^\alpha) = 0. \tag{4.6}$$

De (4.6) on déduit par multiplication par u_β et h_β en tenant compte des relations $u_\beta u^\beta = 1$ et $h_\beta u^\beta = 0$:

$$\nabla_\alpha h^\alpha - u^\alpha \nabla_\alpha h^\beta u_\beta = 0 \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{2} u^\alpha \partial_\alpha | h |^2 + | h |^2 \nabla_\alpha u^\alpha - h^\alpha \nabla_\alpha h^\beta u_\beta = 0 \tag{4.8}$$

les conditions de conservation (4.5) s'écrivent explicitement :

$$\nabla_\alpha[(\rho+p)u^\alpha]u^\beta+(\rho+p)u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta-g^{\alpha\beta}\delta_\alpha p+$$
$$\mu\left[\left(u^\alpha u^\beta-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\right)\partial_\alpha|h|^2+|h|^2(\nabla_\alpha u^\alpha u^\beta+u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta)-(\nabla_\alpha h^\alpha h^\beta+h^\alpha\nabla_\alpha h^\beta)\right]=0.$$

En multipliant ces équations par u_β, il vient en tenant compte de (4.8) l'équation de continuité :

$$(4.9)\qquad \nabla_\alpha[(\rho+p)u^\alpha]-u^\alpha\partial_\alpha p=0.$$

On en tire les équations du mouvement :

$$(4.10)\quad (\rho+p)u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta-(g^{\alpha\beta}-u^\alpha u^\beta)\partial_\alpha p+$$
$$\mu\left[\left(u^\alpha u^\beta-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\right)\partial_\alpha|h|^2+|h|^2(\nabla_\alpha u^\alpha u^\beta+u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta)-(\nabla_\alpha h^\alpha h^\beta+h^\alpha\nabla_\alpha h^\beta)\right]=0.$$

Par multiplication des conditions de conservation par h_β, en tenant compte de (4.7), on a encore l'équation :

$$(4.11)\qquad (\rho+p)u^\alpha\nabla_\alpha h^\beta u_\beta+h^\alpha\partial_\alpha p=0.$$

On peut donc prendre (4.9), (4.10) et (4.6) pour les équations du mouvement d'un fluide parfait de conductivité infinie.

5. L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU CHAMP

L'intégration locale des équations du champ peut être envisagée au moyen d'une analyse du problème de Cauchy. On se donne une hypersurface initiale S orientée dans le temps (i. e. à un instant donné) les $g_{\alpha\beta}$, $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$, h^α et on cherche à déterminer les divers champs $g_{\alpha\beta}$, h^α, u^α, p au voisinage de S. En faisant un changement de coordonnées on peut toujours supposer l'hypersurface S représentée localement par $x^0=0$, les données de Cauchy sont alors les valeurs sur S des quantités $g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 g_{\alpha\beta}$, h^α et on a à calculer les valeurs sur S de p, u^α, puis de $\partial_{00}g_{\alpha\beta}$, $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_0 h^\alpha$.

Les équations d'Einstein (4.4) sont équivalentes à l'ensemble des deux systèmes :

$$(5.1)\quad S^0_\alpha=\chi\left[\left(\rho+p+\mu|h|^2\right)u^0u_\alpha-\frac{1}{2}(\rho+p+\mu|h|^2)g^0_\alpha-h^0h_\alpha\right]$$

$$(5.2)\quad R_{ij}=-\frac{1}{2}g^{00}\partial_{00}g_{ij}+F_{ij}(\text{d. C.})=\chi[T_{ij}-(\rho-3p)g_{ij}]$$

où les F_{ij} et S^0_α ont des valeurs connues sur S. Les équations (5.1) jointes aux relations $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1$ et $\rho = \varphi(p)$ permettent de calculer les valeurs de u^α, p sur S. Les équations (5.2) déterminent les $\partial_{00}g_{ij}$ si :

$$g^{00} \neq 0.$$

Les dérivées $\partial_0 p$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_0 h^\alpha$ sont données par les conditions de conservation (4.5) et les équations de Maxwell (4.6) ou encore par le système des équations (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) qui en dérivent. Le calcul montre que les dérivées $\partial_0 p$, $\partial_0 u^0$, $\partial_0 h^0$, $\partial_0 \mid h \mid^2$ sont données par le système :

$$\begin{aligned}
\varphi' u^0 \partial_0 p + (\rho + p)\partial_0 u^0 &= H_1(\text{d. C.})\\
(u^0 u^0 - g^{00})\partial_0 p + (\rho + p)u^0\partial_0 u^0 - \frac{1}{2}\mu g^{00}\partial_0 \mid h \mid^2 &= H_2(\text{d. C.})\\
\mid h \mid^2 u^0 \partial_0 u^0 - h^0\partial_0 h^0 + \frac{1}{2} u^0 \partial_0 \mid h \mid^2 &= H_3(\text{d. C.})\\
h^0 \partial_0 p + (\rho + p)\partial_0 h^0 &= H_4(\text{d. C.})
\end{aligned}$$

où H_1, H_2, H_3, H_4 sont connus sur S, si le déterminant H des coefficients n'est pas nul. Les dérivées $\partial_0 u^i$, $\partial_0 h^i$ sont ensuite déterminées par le système :

$$\begin{aligned}
(\rho + p + \mu \mid h \mid^2)u^0\partial_0 u^i - \mu h^0 \partial_0 h^i &= A_1(\text{d. C.})\\
h^0\partial_0 u^i - u^0 \partial_0 h^i &= A_2(\text{d. C.})
\end{aligned}$$

où A_1, A_2 sont connus sur S, si le déterminant A des coefficients n'est pas nul.

Ainsi si l'hypersurface S n'est pas exceptionnelle, i. e. si $g^{00} \neq 0$, $H \neq 0$, $A \neq 0$ les dérivées $\partial_{00}g_{ij}$; $\partial_0 p$, $\partial_0 u^0$, $\partial_0 h^0$, $\partial_0 \mid h \mid^2$; $\partial_0 u^i$, $\partial_0 h^i$ sont bien déterminées et continues à la traversée de S. Les mêmes conclusions s'étendent aux dérivées d'ordre supérieur. De plus leur détermination ne fait pas intervenir les équations :

$$\begin{aligned}
Q^0_\beta &\equiv S^0_\beta - XT^0_\beta = 0\\
E^0 &\equiv \nabla_i(u^i h^0 - u^0 h^i) = 0
\end{aligned}$$

où $Q_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \chi T_{\alpha\beta}$, $E^\beta = \nabla_\alpha(u^\alpha h^\beta - u^\beta h^\alpha)$ qui se présentent comme des conditions auxquelles doivent satisfaire les données de Cauchy. Ces conditions sont nécessairement satisfaites au voisinage de S. En effet si $\{ g_{\alpha\beta}, h^\alpha, p, u^\alpha \}$ est une solution, il résulte des conditions de conservation et de la définition de cette solution que l'on a $\nabla_\alpha P^\alpha{}_\beta = 0$, $\nabla_\alpha E = 0$, soit :

$$\begin{aligned}
g^{00}\partial_0 Q^0{}_\beta &= A^{i\alpha}{}_\beta \partial_i Q^0{}_\alpha + B^\alpha{}_\beta Q^0{}_\alpha\\
\partial_0 E^0 &= -\Gamma_\alpha{}^\alpha{}_0 E^0
\end{aligned}$$

où $A^{i\alpha}{}_{\beta}$, $B^{\alpha}{}_{\beta}$, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha 0}$ sont des fonctions continues. Ces équations étant linéaires homogènes, on en déduit que si $Q^0{}_\alpha = E^0 = 0$ sur S, elles restent nulles au voisinage de S.

Ainsi si l'hypersurface S portant les données de Cauchy n'est pas exceptionnelle, le problème de Cauchy est déterminé et l'existence et l'unicité locale des solutions des équations du champ est assurée. Dans le cas analytique, la solution serait connue par un développement suivant les puissances de x^0.

6. LES VARIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES

Si l'hypersurface S portant les données de Cauchy est exceptionnelle, i. e. si $g^{00} = 0$, $H = 0$ ou $A = 0$, les dérivées $\partial_{00} g_{ij}$; $\partial_0 p$, $\partial_0 u^0$, $\partial_0 h^0$, $\partial_0 \mid h \mid^2$; $\partial_0 u^i$, $\partial_0 h^i$ peuvent être discontinues à la traversée de S et il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations du champ correspondant aux mêmes données de Cauchy. Dans la théorie des équations aux dérivées partielles, l'hypersurface S est une variété caractéristique des équations du champ, tangente en chaque point au cône caractéristique C.

D'après l'étude du problème de Cauchy, on a à considérer les variétés caractéristiques S_E des équations d'Einstein et les variétés caractéristiques des équations du mouvement du fluide, celles-ci se décomposant en variétés S_H et S_A. Ces trois sortes de variétés caractéristiques S_E, S_H, S_A satisfont chacune à une équation aux dérivées partielles obtenues en rendant invariante l'une des trois conditions $g^{00} = 0$, $H = 0$, $A = 0$.

Les variétés caractéristiques S_E vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$g^{\alpha\beta}\delta_\alpha f \delta_\beta f = 0. \tag{6.1}$$

Elles sont tangentes en chaque point au cône caractéristique C_E dual du cône C^*_E d'équation :

$$g^{\alpha\beta} Y_\alpha Y_\beta = 0 \tag{6.2}$$

i. e. au cône élémentaire de V_u. Les variétés caractéristiques S_H vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$(\rho + p)(\varphi' - 1)(u^\alpha \partial_\alpha f)^4 + (\rho + p + \mu \mid h \mid^2 \varphi') (u^\alpha \partial_\alpha f)^2 g^{\lambda\mu} \partial_\lambda f \partial_\mu f - \mu (h^\alpha \partial_\alpha f)^2 g^{\lambda\mu} \partial_\lambda f \partial_\mu f = 0 \tag{6.3}$$

Elles sont tangentes en chaque point au cône caractéristique C_H dual au cône C^*_H d'équations :

$$(\rho + p)(\varphi' - 1)(u^\alpha Y_\alpha)^4 + (\rho + p + \mu \mid h \mid^2) (u^\alpha Y_\alpha)^2 g^{\lambda\mu} Y_\lambda Y_\mu - \mu (h^\alpha Y_\alpha)^2 g^{\lambda\mu} Y_\lambda Y_\mu = 0. \tag{6.4}$$

Enfin les variétés caractéristiques S_A vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$(6.5) \qquad (\rho + p + \mu \mid h \mid^2)(u^\alpha \partial_\alpha f)^2 - \mu(h^\alpha \partial_\alpha f)^2 = 0.$$

Elles sont tangentes en chaque point au cône caractéristique C_A dual du cône C^*_A d'équation :

$$(6.6) \qquad (\rho + p + \mu \mid h \mid^2)(u^\alpha Y_\alpha)^2 - \mu(h^\alpha Y_\alpha)^2 = 0.$$

7. PROPAGATION DES ONDES

Dans la théorie de la propagation par ondes telle qu'elle découle des travaux de Hugoniot et Hadamard, les variétés caractéristiques des équations du champ constituent les hypersurfaces ou fronts d'ondes et les cônes caractéristiques les cônes d'ondes dans l'espace-temps, parce que ses génératrices sont tangentes aux bicaractéristiques i. e. aux rayons d'ondes.

On peut définir la vitesse locale de l'onde. Si celle-ci est représentée par l'hypersurface S d'équation $f(x^\alpha) = 0$, sa vitesse v dans un repère lorentzien $\{ x, e_\alpha \}$, $x \in S$ est égale à la pente spatio-temporelle dans ce repère du 3-plan tangent en x à S. Si $\vec{e}_0 = \vec{u}$, v est donnée par la formule :

$$v = \frac{u^\alpha \partial_\alpha f}{\sqrt{(u^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta})\partial_\alpha f \partial_\beta f}}$$

le vecteur $\widehat{X}_\alpha = \partial_\rho f(g^\rho_\alpha - u^\rho u_\alpha)$, composante orthogonale à u^α du vecteur $X_\alpha = \partial_\alpha f$, définit la direction de propagation de l'onde dans l'espace associé à $\vec{u}$. De plus l'exigence relativiste $v \leqslant 1$ entraîne que l'hypersurface S représentant l'onde est orientée dans le temps ou à la limite tangente au cône élémentaire.

L'application de ces définitions conduit aux résultats suivants :

Les variétés caractéristiques des équations d'Einstein représentent les ondes gravitationnelles qui se propagent à la vitesse limite 1. Ceci est un caractère propre à la mécanique relativiste :

$$v_E = 1.$$

Les variétés caractéristiques des équations du mouvement représentent les ondes magnétohydrodynamiques qui se décomposent en ondes hydrodynamiques (discontinuités des dérivées de p et des composantes normales de $\vec{u}$ et $\vec{h}$) et en ondes d'Alfvèn (discontinuité des dérivées des composantes tangentielles de $\vec{u}$ et $\vec{h}$). Les ondes hydrodynamiques S_H se propagent dans une direction donnée avec deux vitesses différentes v_H racines de l'équation :

$$(\rho + p + \mu\,|\,h\,|^2)\varphi' v_H^4 - (\rho + p + \mu\,|\,h\,|^2\varphi' + \mu h_n^2)v_H^2 + \mu h_n^2 = 0$$

où h_n est la composante de $\vec{h}$ suivant la direction spatiale de propagation, soit :

$$v_H^2 = \frac{(\rho + p + \mu\,|\,h\,|^2\varphi' + \mu h_n^2) \pm \sqrt{(\rho + p + \mu\,|\,h\,|^2\varphi' + \mu h_n^2)^2 - \mu h_n^2(\rho + p + \mu\,|\,h\,|^2)\varphi'}}{2(\rho + p + \mu\,|\,h\,|^2)\varphi'}.$$

Les ondes d'Alfvèn S_A se propagent avec la vitesse :

$$v_A^2 = \frac{\mu h_n^2}{\rho + p + \mu\,|\,h\,|^2}.$$

On vérifie que toutes ces vitesses v_{H1}, v_{H2}, v_A sont inférieures à 1 si $\varphi' \geqslant 1$ et que la vitesse v_A est comprise entre les deux vitesses v_{H1} et v_{H2}.

8. REPRÉSENTATION DES CONES D'ONDES DANS R^3

On peut représenter les cônes d'ondes C_E^*, C_H^*, C_A^* dans R^3 de la manière suivante. On prendra un repère propre $\{ x, e_\alpha \}$ tel que $\vec{e_0} = \vec{u}$ et que $\vec{e_1}$ soit porté par $\vec{h}$. Aux cônes d'ondes C_E^*, C_H^*, C_A^* correspondent les indicatrices d'ondes Σ_E, Σ_H, Σ_A qui sont des surfaces de R^3 d'équations :

$$(\Sigma_E) \qquad 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$(\Sigma_u) \quad (\rho + p)(\varphi' - 1) + (\rho + p + \mu\,|\,h\,|^2\varphi')(1 - x^2 - y^2 - z^2) - \mu\,|\,h\,|^2 x^2 (1 - x^2 - y^2 - z^2) = 0$$

$$(\Sigma_A) \qquad (\rho + p + \mu\,|\,h\,|^2) - \mu\,|\,h\,|^2 x^2 = 0.$$

Ces surfaces sont de révolution autour de Ox. Il suffit d'étudier leurs méridiennes dans le plan des x, y. Σ_E est une sphère de rayon r. En coupant Σ_H par une droite issue de l'origine, on voit que Σ_H se compose de deux nappes, la nappe inférieure Σ_{H_1} est convexe, tandis que la nappe extérieure est asymptote aux plans :

$$\mu \mid h \mid^2 x^2 - (\rho + p + \mu \mid h \mid^2 \varphi') = 0.$$

L'indicatrice Σ_A des ondes d'Alfvèn est formée de deux plans. En déterminant les intersections de ces surfaces avec l'axe des x, on a :

$$x_E = \pm 1 \qquad x_{H1} = \pm \sqrt{\varphi'} \qquad x_{H2} = x_A = \pm \left(\frac{\rho + p + \mu \mid h \mid^2}{\mu \mid h \mid^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il en résulte que le cône C_E^* coïncide avec le cône élémentaire, le cône C_H se compose de deux nappes et le cône C_A de deux plans tangents à C_H suivant des génératrices situées dans le 2-plan $(\vec{u}, \vec{h})$, sauf dans le cas où $\rho + p + \mu \mid h \mid^2 = \mu \mid h \mid^2 \varphi'$ où le cône C_H admet deux génératrices doubles. Si $\varphi' = 1$ C_{H_1} vient se confondre avec C_E et C_{H_2} avec C_A. Pour obtenir les cônes caractéristiques, il suffit de prendre les polaires réciproques de Σ_E, Σ_H, Σ_A par rapport à la sphère unité : C_E coïncide avec C_E^*. i. e. est cône élémentaire; C_H est un cône du 4e ordre et C_A est formé de deux droites orientées dans le temps.

9. CHOCS MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUES

Une onde de choc magnétohydrodynamique est une hypersurface S orientée dans le temps à la traversée de laquelle les u^α, h^α, p sont discontinus. Les $g_{\alpha\beta}$ et $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$ étant continus dans le domaine d'espace-temps considéré, les équations du mouvement $\nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0$ et $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ s'écrivent en coordonnées locales :

$$\partial_\alpha(h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha) = f^\beta$$
$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = g^\beta$$

où f^β et g^β sont des fonctions continues par morceaux dans D. La vérification au sens des distributions de ces équations, par les quantités u^α, h^α, p discontinues à la traversée de S entraîne la nullité des mesures singulières portées par S, introduites par les dérivations figurant aux premiers membres, soit les équations du choc :

$$(9.1) \qquad [h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha] n_\alpha = 0$$

$$(9.2) \qquad \left[(\rho + p + \mu \mid h \mid^2) u^\alpha u^\beta - \left(p + \frac{1}{2}\mu \mid h \mid^2\right) g^{\alpha\beta} - \mu h^\alpha h^\beta\right] n_\alpha = 0$$

où n_α est la normale à S et où l'on désigne par $[f]$ le saut de f, i. e. la différence $f_+ - f_-$ des valeurs de f de part et d'autre de S.

Le problème consiste à déterminer les discontinuités de u^α, h^α, p. Pour cela, il est commode de choisir un repère orthonormé $\{x, \vec{e}_\alpha\}$ $x \in S$ tel que $\vec{e}_1 = \vec{n}$, $\vec{e}_2$ normal au 3-plan $(\vec{n}, \vec{u}-, \vec{h}-)$, $\vec{e}_3$ porté par le vecteur :

$$a^\beta = (h^\alpha n_\alpha)u^\beta - (u^\alpha n_\alpha)h^\beta$$

qui est orthogonal à $\vec{e}_1$ et situé dans le 2-plan $(\vec{u}, \vec{h})$, enfin $\vec{e}_0$ orthogonal à $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Les deux vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sont orientés dans l'espace, le vecteur $\vec{e}_3$ (resp. $\vec{e}_0$) est orienté dans l'espace ou le temps suivant que la quantité :

$$a^\alpha a_\alpha - (h^\alpha n_\alpha)^2 - |h|^2 (u^\alpha n_\alpha)^2 \tag{9.3}$$

est négative ou positive (resp. positive ou négative). Le cas $a^\alpha a_\alpha = 0$ ($\vec{e}_3$ isotrope) est un cas singulier.

Le vecteur $a^\beta = (h^\alpha u^\alpha)u^\beta - (u^\alpha u_\alpha)h^\beta$ est continu à la traversée de S et sa seule composante non nulle est a^3. On en déduit que les projections de $\vec{u}$ et $\vec{h}$ sur le 3-plan $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont colinéaires et on a de part et d'autre de S :

$$h^i = lu^i \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{9.4}$$

D'autre part, dans le repère choisi, $u^2_- = h^2_- = 0$, les équations (9.1) et (9.2) avec $\beta = 2$ s'écrivent :

$$u^1_+ h^2_+ - h^1_+ u^2_+ = 0$$

$$(\rho + p + \mu |h|^2)_+ u^1_+ u^2_+ - \mu h^1_+ h^2_+ = 0.$$

On en déduit $u^2_+ = h^2_+ = 0$ si $(\rho + p + \mu |h|^2)_+ + (u^1_+)^2 - \mu(h^1_+)^2 \neq 0$, c'est-à-dire si S n'est pas une onde d'Alfvèn, de sorte qu'on a encore de part et d'autre de S :

$$u^0 = ku^1 \qquad h^0 = kh^1. \tag{9.5}$$

10. ÉTUDE DES DISCONTINUITÉS

Il nous faut déterminer les discontinuités de p, $|h|^2$, u^α, h^α; il suffit de calculer les discontinuités de p, u^1, k, l. Ce calcul fait intervenir l'orientation des vecteurs $\vec{e}_3$, $\vec{e}_0$. On est conduit à interpréter le signe de $a^\alpha a_\alpha$. Il résulte de la définition de la vitesse de propagation v de l'onde de choc que $a^\alpha a_\alpha$ a même signe que :

(10.1) $$\cos^2(\vec{h}, \vec{n}) - v^2$$

$\vec{e}_3$ est donc spatial si le cosinus de l'angle du champ magnétique avec la normale à l'onde de choc dans le repère propre est inférieur (en module) à la vitesse de propagation v de cette onde; il est temporel dans le cas contraire et isotrope s'il y a égalité.

Trois cas sont à considérer :

1. Dans l'hypothèse $\cos^2(\vec{h}, \vec{n}) < v^2$, $\vec{e}_3$ est spatial, $\vec{e}_0$ est temporel et définit un temps local et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ définit l'espace associé. La quantité :

$$(\rho + p + \mu \mid h \mid^2)(u^1)^2 - \mu(h^1)^2 = (\rho + p)(u^\alpha u_\alpha)^2 - a^\alpha a_\alpha$$

est toujours positive. L'hypersurface S ne peut pas être une onde d'Alfvèn et on a toujours $u^2 + = h^2 + = 0$.

Or, les conditions $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1$, $g_{\alpha\beta} u^\alpha h^\beta = 0$ donnent :

(10.2) $$(u^3)^2 = (k^2 - 1)(u^1)^2 - 1 \qquad h^3 = m(k^2 - 1)u^1$$

où :

(10.3) $$m = h^1 u^3 - h^3 u^1 = \frac{h^1}{u^3} = \frac{lu^1}{\sqrt{(k^2 - 1)(u^1)^2 - 1}}$$

est continu à la traversée de S comme on le vérifie sur (9.1) avec $\beta = 3$. On en déduit ensuite :

(10.4) $$\mid h \mid^2 = m^2(k^2 - 1).$$

Les équations de choc (9.1) avec $\beta = 3$ et (9.2) avec $\beta = 0, 1, 3$ conduisent aux relations :

$$[(m)^2] = \left[\frac{l^2(u^1)^2}{(k^2 - 1)(u^1)^2 - 1}\right] = 0$$
$$[(\rho + p)k(u^1)^2] + \mu(m)^2[k] = 0$$
$$[(\rho + p)(u^1)^2] + [p] + \frac{1}{2}\mu(m)^2[k^2 - 1] = 0$$
$$[(\rho + p)l(u^1)^2] = 0$$

qui déterminent les discontinuités de p, $(u^1)^2$, k, l.

Dans le repère de Galilée associé au repère lorentzien considéré, les vecteurs champs et inductions électriques et magnétiques $e'_i = H_{0i}$, $d'_i = G_{0i}$, $h'_i = \overset{*}{G}_{0i}$, $b' = \overset{*}{H}_{0i}$ ont pour valeur :

$$e'_1 = e'_2 = 0 \qquad e'_3 = \mu m \qquad h'_1 = h'_2 = 0 \qquad h'_3 = ml$$

$$d'_1 = d'_2 = 0 \qquad d'_3 = m \qquad b'_1 = b'_2 = 0 \qquad b'_3 = \mu ml.$$

On voit que la perméabilité magnétique reste égale à μ et qu'il apparaît une permittivité diélectrique $\varepsilon = \dfrac{1}{\mu}$. Le vecteur vitesse du fluide défini par $\beta^i = u^i/u^0$ a pour composantes :

$$\beta' = \frac{1}{k} \qquad \beta^2 = 0 \qquad \beta^3 = \frac{1}{mk}.$$

2. Dans l'hypothèse $\cos^2 (\vec{h}, \vec{n}) > v^2$, $\vec{e}_3$ est temporel, $\vec{e}_0$ spatial. Les relations (10.2), (10.3) sont à remplacer par :

$$(u^3)^2 = (k^2 + 1)(u^1)^2 + 1 \qquad h^3 = m(k^2 + 1)u'$$

où :

$$m = h^1u^3 - h^3u^1 = \frac{h^1}{u^3} = \frac{lu^1}{\sqrt{(k^2 + 1)(u^1)^2 + 1}}$$

et les relations de choc qui définissent les discontinuités de p, u^1, k, l sont :

$$[(m)^2] = \left[\frac{l^2(u^1)^2}{(k^2 + 1)(u^1)^2 + 1}\right] = 0$$

$$[(\rho + p)k(u^1)^2] - \mu(m)^2[k] = 0$$

$$[(\rho + p)(u^1)^2] + [p] + \frac{1}{2}\mu(m)^2[k^2 + 1] = 0$$

$$[(\rho + p)l(u^1)^2] = 0$$

Dans le repère de Galilée associé, le champ et l'induction électriques $\vec{e}'$, $\vec{d}'$ sont nuls, tandis que le champ et l'induction magnétiques $\vec{h}'$, $\vec{b}'$ sont colinéaires au vecteur vitesse $\vec{\beta}$ du fluide :

$$\vec{h}' = l\vec{\beta} \qquad \vec{b}' = \mu l\vec{\beta}.$$

C'est le cas traité par Hoffmann et Teller.