ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU

Le déplacement des raies spectrales en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 2, nº 4 (1965), p. 355-368
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__2_4_355_0>

© Gauthier-Villars, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. II, n° 4, 1965, p. 355-368.

Section A :
Physique théorique.

Le déplacement des raies spectrales en Relativité générale

par

A. PAPAPETROU
(Institut Henri Poincaré).

RÉSUMÉ. — Une nouvelle méthode est proposée pour le calcul des déplacements des raies spectrales dans un champ gravitationnel quelconque. Cette méthode est caractérisée par l'utilisation de l'équation du mouvement du photon, considéré comme particule d'épreuve.

Cette méthode a été appliquée à quelques champs gravitationnels variables à symétrie sphérique. On trouve que, si les sources du champ sont en expansion, il y a un (très petit) effet de déplacement vers le violet. Par contre il y aura un déplacement vers le rouge dans le cas de contraction.

SUMMARY. — A new method is proposed for calculating the spectral shifts in an arbitrary gravitational field. The main feature of the method is the use of the equation of motion of the photon considered as a test particle.

The method has been applied to some spherically symetric gravitational fields. It is found that an expansion of the sources of the field leads to an additional (very small) violet shift; this changes into a red shift in the case of contraction.

1. — REMARQUES PRÉLIMINAIRES

En relativité restreinte des déplacements de raies spectrales ne sont causés que par un mouvement relatif entre la source émettant le rayonnement et l'observateur qui le reçoit (effet Doppler). L'espace minkowkien étant plan, le transport parallèle des quantités tensorielles d'un point à l'autre est univoque. Par conséquent, il suffit pour le calcul de l'effet de supposer que la source et l'observateur se trouvent, au moment de l'émission et de l'observation, au même point de l'espace.

En relativité générale il n'y a plus de transport parallèle univoque. Il s'ensuit que le déplacement des raies spectrales dépend non seulement des états de mouvement de la source et de l'observateur, mais aussi de leurs positions. Il y a même un cas particulièrement simple où l'effet ne dépend que des positions de la source et de l'observateur. C'est le cas d'une source et d'un observateur au repos dans le système de coordonnées adapté d'un champ gravitationnel stationnaire (1). Mais ceci est un cas exceptionnel et, en général, on ne pourra calculer que l'effet de déplacement total sans pouvoir le séparer en partie Doppler et partie purement gravitationnelle.

Le calcul de cet effet en relativité générale est rendu possible par le principe d'équivalence. D'après ce principe la métrique de l'espace riemannien de la relativité générale est localement, en un point quelconque, identique à la métrique minkowskienne. On peut donc utiliser aussi, en relativité générale, le postulat énoncé en relativité restreinte, d'après lequel les fréquences propres (ou les longueurs d'onde propres) des raies spectrales émises par un atome sont des constantes indépendantes de la position de l'atome. On peut aussi considérer l'aspect corpusculaire du rayonnement en introduisant l'énergie du photon par la relation

$$\mathrm{E} = h\nu \tag{1.1}$$

et énoncer alors ce postulat sous la forme suivante : les énergies propres des photons émis par l'atome sont, en relativité générale comme en relativité restreinte, indépendantes de la position de l'atome.

Dans la littérature on trouve déjà des méthodes de calcul différentes, certaines utilisant l'aspect corpusculaire, d'autres l'aspect ondulatoire du rayonnement. Nous citerons ici la méthode générale proposée par Synge [*1*] (2). Dans cette méthode le quadrivecteur vitesse de la source au moment de l'émission est soumis à un transport parallèle le long de la trajectoire du photon jusqu'à la position de l'observateur. Le calcul de l'effet se réduit alors formellement au calcul d'un effet Doppler.

---

(1) On remarquera que dans ce cas, l'existence du groupe d'isométries correspondant au caractère stationnaire a pour conséquence que les lignes paramétriques de la coordonnée t déterminent un mouvement « solide ». Il n'y aurait par conséquent aucune justification physique à parler d'un mouvement relatif entre la source et l'observateur.

(2) Une méthode utilisant l'aspect ondulatoire a été développée récemment par M. A. Tonnelat [*2*] [*3*]. On trouvera dans [*3*] des références bibliographiques détaillées.

Nous proposerons dans le présent travail une variante de la méthode de Synge, basée sur le transport parallèle du quadrivecteur impulsion-énergie du photon, c'est-à-dire sur l'équation du mouvement du photon considéré comme particule d'épreuve. Cette méthode, sans doute plus simple au point de vue physique, semble aussi être avantageuse pour le calcul pratique.

Avant de commencer la description de la nouvelle méthode, nous ajouterons une remarque critique. En relativité restreinte, le postulat de la constance des fréquences propres n'est valable qu'à la condition qu'il n'y ait pas dans l'espace de champ électromagnétique, car autrement il y aurait des effets Zeeman et Stark (3). La question se pose alors de savoir si on ne devrait pas s'attendre aussi à un effet gravitationnel analogue aux effets Zeeman et Stark. Pour donner une réponse qualitative considérons par exemple l'atome d'hydrogène quantifié d'après la méthode primitive de Bohr. On doit d'abord étudier le mouvement du système électron-photon, cette fois en présence du champ gravitationnel. Si nous nous restreignons au champ gravitationnel extérieur, nous devrons prendre en considération, dans l'étude du mouvement de l'électron par rapport au proton, le terme de force apparaissant dans l'équation de déviation géodésique. Il semble alors *a priori* possible que ce terme ait une influence sur les niveaux d'énergie de l'atome. Ce terme étant proportionnel au tenseur de courbure $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, on voit qu'un tel effet serait — s'il existe — négligeable dans tous les cas habituels. Mais la question de principe reste posée; la question pourrait même devenir physiquement intéressante s'il se confirmait, comme il semble être suggéré par des découvertes astronomiques récentes, qu'il y a dans l'espace des champs gravitationnels extrêmement intenses.

2. — LA MÉTHODE PROPOSÉE

Soit S la position de la source au moment de l'émission. Utilisons pour le moment un système de coordonnées propre de S tel que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ au point S. La vitesse de S est alors

$$ {}_{S}u^{\alpha} = (1\,;\,0,\,0,\,0) = {}_{S}u_{\alpha}. \tag{2.1}$$

Dans ce système de coordonnées, soit

$$ p^{\alpha} = (p^0;\, p^1,\, p^2,\, p^3) \tag{2.2}$$

(3) Dans le cas d'un champ électromagnétique uniforme les fréquences propres seraient de nouveau indépendantes de la position de l'atome. Mais elles dépendraient des valeurs des champs électrique et magnétique.

l'énergie-impulsion du photon émis. La composante p^0 est alors l'énergie propre ε du photon, $p^0 = \varepsilon$. Des équations (2.1) et (2.2) on déduit pour ε la formule covariante

$$\varepsilon = {}_S u^\alpha p_\alpha, \tag{2.3}$$

qui peut être utilisée dans n'importe quel système de coordonnées. Rappelons encore que ε est une constante caractéristique de l'atome : on aura la même valeur de ε avec le même atome ou un autre de même nature en n'importe quel point de l'espace.

Le problème du déplacement des raies spectrales se présente maintenant sous la forme suivante. Supposons donnés le champ gravitationnel ainsi que la position S de la source, sa vitesse ${}_S u^\alpha$ et la direction du quadrivecteur p^α du photon émis. La valeur ε étant aussi connue, la relation (2.3) permet de déterminer complètement le vecteur p^α. On peut alors construire la trajectoire du photon — géodésique nulle déterminée par le point S et la direction p^α — et déterminer, à l'aide de l'équation du mouvement du photon, le vecteur p^α en chaque point de la trajectoire. Finalement, supposons que l'observateur se trouve en un point O de la trajectoire et qu'il ait la vitesse ${}_O u^\alpha$. L'énergie E du photon pour cet observateur est donnée par une formule analogue à (2.3) :

$$E = {}_O u^\alpha p_\alpha. \tag{2.4}$$

Le rapport E/ε caractérise le déplacement de cette raie spectrale et la détermination de cette quantité constitue la solution du problème.

On voit immédiatement que la partie centrale du problème est la détermination de la trajectoire du photon ainsi que du vecteur p_α entre S et O à partir des valeurs de p^α données en S. Pour ce problème, on utilisera l'équation du mouvement du photon. L'équation du mouvement d'une particule d'épreuve de masse propre m_0 est

$$u^\alpha{}_{;\beta} u^\beta = 0, \qquad m_0 = \text{const.} \tag{2.5}$$

En multipliant cette équation par m_0^2 on peut y introduire le quadrivecteur $p^\alpha = m_0 u^\alpha$ d'impulsion-énergie de la particule. On trouve

$$p^\alpha{}_{;\beta} p^\beta = 0. \tag{2.6}$$

On a encore

$$p^\alpha p_\alpha = m_0^2 = \text{const.}$$

Sous la forme (2.6), l'équation du mouvement est valable aussi pour $m_0 = 0$, donc aussi pour le photon. Il suffit d'ajouter, dans ce cas, la condition initiale

$$p^\alpha p_\alpha = 0. \tag{2.7}$$

Pour notre problème, il sera plus utile d'écrire (2.6) sous la forme

$$p_{\alpha;\beta} p^\beta = 0. \tag{2.8}$$

Écrite en détail cette équation prend la forme

$$p_{\alpha,\beta} p^\beta + \frac{1}{2} g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha} p_\beta p_\gamma = 0\ ; \tag{2.8a}$$

c'est-à-dire en utilisant les relations

$$p^\alpha / p^0 = dX^\alpha / cdt$$

et en introduisant dans (2.8a) les dérivées par rapport à la coordonnée $x^0 = ct$:

$$p^0 \frac{dp_\alpha}{cdt} + \frac{1}{2} g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha} p_\beta p_\gamma = 0. \tag{2.9}$$

C'est cette équation qui sera utilisée pour discuter le problème du déplacement des raies spectrales.

3. — CHAMPS GRAVITATIONNELS STATIONNAIRES

Comme première application nous allons retrouver la formule connue pour le déplacement des raies spectrales dans le cas particulièrement simple d'un champ gravitationnel stationnaire avec source et observateur au repos dans le système de coordonnées adapté. Nous avons d'abord

$${}_S u^\alpha = ({}_S u^0;\ 0,\ 0,\ 0), \qquad {}_O u^\alpha = ({}_O u^0;\ 0,\ 0,\ 0). \tag{3.1}$$

D'autre part la formule générale $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 1$ nous donne

$${}_S g_{00} ({}_S u^0)^2 = 1 = {}_O g_{00} ({}_O u^0)^2; \tag{3.2}$$

${}_S g_{00}$ est la valeur de g_{00} au point S et ${}_O g_{00}$ la valeur au point O. Des formules (2.3) (2.4) et (3.1) nous déduisons

$$\varepsilon = {}_S u^0 {}_S p_0, \qquad E = {}_O u^0 {}_O p_0, \tag{3.3}$$

où ${}_Sp_0$ et ${}_Op_0$ sont les valeurs de p_0 aux points S et O. On voit qu'à cause de la forme simple (3.1) de ${}_Su^\alpha$ et ${}_Ou^\alpha$, on n'a besoin que de la composante p_0 de p_α. Mais le champ étant stationnaire, on a dans le système de coordonnées adapté que nous utilisons

$$g^{\mu\nu}{}_{,0} = 0$$

et par conséquent, la composante $\alpha = 0$ de l'équation du mouvement (2.9) nous donne immédiatement $p_0 =$ const., c'est-à-dire

$$(3.4) \qquad {}_Sp_0 = {}_Op_0.$$

On déduit alors de (3.3) et (3.2) :

$$(3.5) \qquad \mathrm{E}/\varepsilon = {}_Ou^0/{}_Su^0 = \sqrt{{}_Sg_{00}/{}_Og_{00}}.$$

On trouve un résultat simple aussi dans le cas où la source est en mouvement, mais l'observateur au repos. Pour arriver à ce résultat il suffit de considérer un observateur auxiliaire O′ au repos au point S. Soit E′ l'énergie du photon pour l'observateur O′,

$$(3.6) \qquad \mathrm{E}' = {}_{O'}u^\alpha p_\alpha = {}_{O'}u^0 p_0 = p_0/\sqrt{{}_Sg_{00}}.$$

L'énergie E étant donnée par (3.3) et (3.2),

$$\mathrm{E} = {}_Ou^0 p_0 = p_0/\sqrt{{}_Og_{00}},$$

on aura

$$(3.7) \qquad \mathrm{E}/\mathrm{E}' = \sqrt{{}_Sg_{00}/{}_Og_{00}}.$$

Nous avons encore à calculer la quantité E'/ε qui décrit maintenant l'effet Doppler du mouvement relatif de O′ et S (qui se trouvent au même point). Si nous écrivons

$$(3.8) \qquad p_\alpha = \rho\,.\,{}_{O'}u_\alpha + \sigma v_\alpha, \qquad {}_Su_\alpha = \lambda\,.\,{}_{O'}u_\alpha + \mu v_\alpha + \nu w_\alpha,$$

les vecteurs v_α et w_α satisfaisant aux conditions

$$(3.9) \qquad {}_{O'}u^\alpha v_\alpha = {}_{O'}u^\alpha w_\alpha = 0 = v^\alpha w_\alpha, \qquad v^\alpha v_\alpha = w^\alpha w_\alpha = -1,$$

nous trouvons sans difficulté

$$(3.10) \qquad \varepsilon/\mathrm{E}' = \sqrt{1+\mu^2+\nu^2} - \mu.$$

Le déplacement total est alors

$$(3.11) \quad \mathrm{E}/\varepsilon = (\mathrm{E}/\mathrm{E}')(\mathrm{E}'/\varepsilon) = \sqrt{{}_Sg_{00}/{}_Og_{00}}\,\left\{\sqrt{1+\mu^2+\nu^2} - \mu\right\}^{-1}$$

et apparaît dans ce cas comme une superposition du déplacement purement gravitationnel (3.7) et du déplacement Doppler E'/ε.

Une formule analogue à (3.11) est valable dans le cas où la source est au repos et l'observateur en mouvement. En effet, en introduisant un observateur auxiliaire O″ au repos au point O, on trouve par un raisonnement semblable

$$E/\varepsilon = (E/E'')(E''/\varepsilon) = (E/\varepsilon'')\sqrt{{}_{\mathrm{S}}g_{00}/{}_{\mathrm{O}}g_{00}}. \tag{3.12}$$

Mais on ne pourra déterminer E/E'' directement par une formule du type (3.10) que si l'on suppose le vecteur p_α donné au point O : si le vecteur p_α est donné au point S, on devra aussi utiliser, pour déterminer p_α au point O, les composantes $\alpha = 1, 2, 3$ de l'équation du mouvement (2.9). Remarquons enfin que dans le cas général où source et observateur sont en mouvement, on pourra encore, en utilisant les deux observateurs auxiliaires O′ et O″, écrire la formule

$$E/\varepsilon = (E/E'')\sqrt{{}_{\mathrm{S}}g_{00}/{}_{\mathrm{O}}g_{00}}(E'/\varepsilon). \tag{3.13}$$

Mais cette formule n'est simple qu'en apparence, car le vecteur p_α doit être connu maintenant aux deux points S et O : comme il est donné au point initial S, on devra le déterminer au point O en faisant usage, en tout cas, aussi des composantes $\alpha = 1, 2, 3$ de l'équation du mouvement (2.9).

4. — CORPS CENTRAL ÉMETTANT UN RAYONNEMENT ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Comme deuxième exemple, nous allons considérer un champ gravitationnel non stationnaire, mais possédant un degré de symétrie élevé. C'est le champ d'une étoile émettant un rayonnement électromagnétique, le tout ayant la symétrie sphérique. Ce champ est donné par une généralisation très simple du champ de Schwarzschild écrit sous la forme de Finkelstein [*4*] :

$$ds^2 = -\left(1+\frac{m}{r}\right)dr^2 + \frac{2m}{r}dr\,dt + \left(1-\frac{m}{r}\right)dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{4.1}$$

La généralisation consiste à prendre pour m non plus une constante, mais une fonction non-croissante de $t - r$ [*5*] :

$$m = m(t-r), \qquad \frac{\partial m}{\partial t} \leqslant 0. \tag{4.2}$$

En effet, on peut montrer par un calcul simple que la métrique définie par (4.1) et (4.2) représente le champ d'une masse centrale entouré par un nuage de particules de masse propre nulle — c'est-à-dire de particules qu'on peut considérer comme des photons — en mouvement radial centrifuge. La décroissance de m correspond à la perte d'énergie par rayonnement du corps central.

Nous nous limiterons au cas simplifié d'une étoile qui n'émet du rayonnement que pendant un intervalle de temps fini :

$$m = m_1 \text{ pour } t - r < 0, \quad m = m_2 < m_1 \text{ pour } t - r > \mathrm{T} > 0 \tag{4.3}$$

où m_1, m_2 et T sont des constantes. Il s'ensuit que le champ est stationnaire dans les domaines $t - r < 0$ et $t - r > \mathrm{T}$ et par conséquent les lignes paramétriques de la coordonnée t ont dans ces domaines une signification géométrique invariante. D'autre part, on vérifie sans difficulté que dans le domaine intermédiaire, où le champ n'est pas stationnaire, la coordonnée t est un paramètre affine des géodésiques isotropes sur lesquelles se propage le rayonnement électromagnétique. La coordonnée t a donc une signification géométrique invariante dans tout l'espace défini par (4.1) et (4.2).

Supposons d'abord que la source S et l'observateur O sont au repos dans le système de coordonnées utilisé dans (4.1) et (4.2) (c'est-à-dire que les lignes d'univers de S et O sont des lignes paramétriques de t). Dans ce cas, nous avons besoin seulement de la composante p_0 de p_α et par conséquent, nous n'aurons à considérer que la composante $\alpha = 0$ de l'équation (2.9). Avec la métrique (4.1) (4.2) cette équation prend la forme

$$p^0 \frac{dp_0}{dt} = -\frac{1}{2r}(p_0 + p_1)^2 \frac{\partial m}{\partial t}\,. \tag{4.4}$$

Cette équation montre de nouveau que dans les régions $t - r < 0$ et $t - r > \mathrm{T}$, où $\dfrac{\partial m}{\partial t} = 0$, on a $\dfrac{dp_0}{dt} = 0$. Mais dans la région intermédiaire $\dfrac{\partial m}{\partial t} < 0$, et par conséquent nous avons en général

$$\frac{dp_0}{dt} > 0. \tag{4.5}$$

La seule exception est le cas où le photon émis par la source S vers l'observateur O est en mouvement radial centrifuge. En effet, ce cas est caractérisé par $p^2 = p^3 = 0$. On déduit alors de la forme (4.1) de la métrique :

$$p^0 = p^1, \qquad p_0 + p_1 = 0,$$

et par conséquent

(4.5*a*) $$\frac{dp_0}{dt} = 0.$$

Nous pouvons appliquer ce résultat aussi à chacun des photons émis par l'étoile centrale ; il signifie alors qu'un quelconque de ces photons a une énergie constante, comme dans le cas d'un champ stationnaire.

Supposons maintenant que le photon émis par S et qui se dirige vers O soit en mouvement non radial. La trajectoire est, dans ce cas, caractérisé par le point A qui correspond au minimum de la coordonnée r, $r_{\min} \equiv a$. Supposons que le photon passe par A à l'instant $t = t_0$. Il y a alors trois possibilités différentes :

a) Pour des valeurs de t_0 assez petites, le photon restera pendant son mouvement dans la région du champ stationnaire initial.

b) Pour des valeurs de t_0 assez grandes, le photon restera dans la région du champ stationnaire final.

c) Dans le cas intermédiaire le photon se trouvera aussi dans la région du champ variable.

Dans les cas *a*) et *b*) nous avons $\frac{dp_0}{dt} = 0$, et par conséquent

$$_{s}p_0 = {_{o}p_0},$$

ce qui nous redonne — à cause des relations (3.2) — la formule (3.5). Mais cette formule a maintenant une signification différente pour les cas *a*) et *b*), car g_{00} n'a pas la même valeur pour toutes les valeurs de t. Il faut porter dans (3.5) les valeurs $_{s}g_{00}$ et $_{o}g_{00}$ du champ stationnaire initial dans le cas *a*), et celles du champ final dans le cas *b*).

Dans le cas *c*), nous aurons d'après (4.5) $_{o}p_0 > {_{s}p_0}$; c'est-à-dire, en posant $_{s}p_0 \equiv p_0$:

(4.6) $$_{o}p_0 = p_0 + \delta p_0, \qquad \delta p_0 > 0.$$

La valeur de δp_0 est déterminée par intégration de (4.4) :

(4.7) $$\delta p_0 = \int_{s}^{o} \frac{dp_0}{dt}\, dt.$$

On trouve alors

(4.8*a*) $$\varepsilon = p_0({_{s}g_{00}})^{-1/2}, \qquad \mathrm{E} = (p_0 + \delta p_0)({_{o}g_{00}})^{-1/2} ;$$

(4.8) $$\mathrm{E}/\varepsilon = \sqrt{_{s}g_{00}/{_{o}g_{00}}}\cdot\left(1 + \frac{\delta p_0}{p_0}\right).$$

Il faudra porter dans cette formule la valeur de ${}_{S}g_{00}$ prise au moment de l'émission du photon et celle de ${}_{O}g_{00}$ au moment de l'observation (4).

Si la source S et l'observateur O sont assez éloignés du centre (5), pour que

$$(4.9) \qquad {}_{S}g_{00} = {}_{O}g_{00} = 1,$$

la formule (4.8) se réduit à :

$$(4.10) \qquad \mathrm{E}/\varepsilon = 1 + \frac{\delta p_0}{p_0} > 1.$$

Autrement dit, nous avons dans ce cas un *déplacement vers le violet*. Pour avoir l'ordre de grandeur de cet effet par des calculs assez simples, supposons que l'étoile centrale ne rayonne que pendant un intervalle de temps T très petit, de telle sorte que $c\mathrm{T} \ll a$. Supposons encore que le photon émis par S et se dirigeant vers O traverse la région de champ variable (c'est-à-dire la zone du rayonnement émis par l'étoile) très près du point A de sa trajectoire correspondant à $r = r_{\min} = a$. (Ceci revient à supposer que $ct_0 \approx a$.) On a alors $p_1 = 0$, et la formule (4.4) nous donne immédiatement

$$(4.11) \qquad \delta p_0/p_0 \approx \delta m/2a, \qquad \delta m = m_1 - m_2;$$

δm est l'énergie totale du rayonnement. Prenons comme exemple numérique :

$$\delta m \approx 10^{-3}\, m_{\text{soleil}} \approx 10^2 \text{ cm}, \qquad a \approx 10\mathrm{R}_{\text{soleil}} \approx 10^{12} \text{ cm}.$$

Nous trouvons alors d'après (4.11)

$$\delta p_0/p_0 \approx 10^{-10},$$

c'est-à-dire un déplacement extrêmement petit vers le violet.

Si S et O ont des positions telles que ${}_{S}g_{00} < {}_{O}g_{00}$, le premier facteur du deuxième membre de (4.8) représente le déplacement vers le rouge habituel. Le deuxième facteur $1 + \dfrac{\delta p_0}{p_0} > 1$ représente le déplacement vers le violet

---

(4) Il est à remarquer que dans la région où $\dfrac{\partial m}{\partial t} < 0$, l'espace n'est pas vide. Mais la matière qu'il contient est un nuage de photons. Par conséquent, il est justifié d'utiliser pour le photon considéré la loi du mouvement géodésique, l'interaction entre photons étant extrêmement faible. (Strictement parlant, la loi géodésique n'est valable que pour une particule d'épreuve en mouvement dans le vide.)

(5) Signalons que dans ce cas il n'y a que les possibilités *a*) et *c*).

que nous venons de discuter et qui a pour effet d'affaiblir le déplacement vers le rouge habituel.

Nous allons finalement considérer le cas où la source S est un atome de l'étoile centrale tout près de sa surface et nous supposerons que, l'étoile étant par exemple en état d'expansion, la source S a une vitesse radiale :

$$ {}_{S}u^{\alpha} = \left(\frac{dt}{ds}\,;\frac{dr}{ds},\,0,\,0\right). \tag{4.12} $$

Nous supposerons enfin que la direction d'émission du photon soit radiale et que l'observateur soit très éloigné, de telle sorte que ${}_{O}g_{00} = 1$. Le mouvement du photon étant radial, on a d'après (4.5 *a*)

$$ {}_{S}p_0 = {}_{O}p_0 \equiv p_0. $$

Or, d'après (2.3) et (2.4)

$$ \varepsilon = p_0\frac{dt}{ds} + p_1\frac{dr}{ds} = p_0\left(\frac{dt}{ds} - \frac{dr}{ds}\right), \qquad \mathrm{E} = p_0. $$

Par conséquent

$$ \mathrm{E}/\varepsilon = \left(\frac{dt}{ds} - \frac{dr}{ds}\right)^{-1}. \tag{4.13} $$

En faisant usage de $u^{\alpha}u_{\alpha} = 1$ ainsi que de la forme (4.1) de la métrique, on peut mettre cette relation sous la forme

$$ \mathrm{E}/\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m}{r} + \mathrm{U}^2} + \mathrm{U}, \qquad \mathrm{U} \equiv \frac{dr}{ds}. \tag{4.13a} $$

Lindquist, etc. [*6*] ont trouvé une relation équivalente, à cause de (1.1), à (4.13*a*) par un calcul direct de fréquences.

5. — CORPS CENTRAL ENTOURÉ D'UN NUAGE DE GAZ EN EXPANSION OU EN CONTRACTION

Comme dernier exemple, nous discuterons le champ gravitationnel d'une étoile entourée d'un nuage de gaz en état d'expansion rapide, le tout ayant la symétrie sphérique. La vitesse v d'expansion sera supposée petite par rapport à c, mais grande par rapport à la vitesse parabolique de l'étoile centrale : nous avons alors la simplification que v ne change que très peu avec le temps. Nous ne chercherons à déterminer que l'ordre de grandeur de l'effet et par conséquent, il sera suffisant de traiter le champ en première approximation. Avec

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + {}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu} + \ldots \tag{5.1}$$

et les conditions supplémentaires

$${}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \qquad {}_0\mathfrak{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0,$$

l'équation du champ en première approximation est

$$\Box {}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu} \equiv \eta^{\alpha\beta}{}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4}\,{}_0\mathfrak{T}^{\mu\nu}. \tag{5.2}$$

Dans le cas présent, nous aurons

$${}_0\mathfrak{T}^{44} = \rho c^2, \qquad \text{les autres } {}_0\mathfrak{T}^{\mu\nu} = 0, \tag{5.3}$$

et l'équation du champ devient

$$\Delta {}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}\,{}_0\mathfrak{T}^{\mu\nu}. \tag{5.2a}$$

La solution de cette équation s'écrit

$${}_1\mathfrak{g}^{44} = \frac{4G}{c^2}\,\varphi, \quad \text{les autres} \quad {}_1\mathfrak{g}^{\mu\nu} = 0, \tag{5.4}$$

φ étant le potentiel de gravitation newtonien :

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{5.5}$$

De (5.1) et (5.4) on tire les valeurs des $g^{\mu\nu}$ en première approximation :

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1 + \frac{2G}{c^2}\,\varphi, \quad g^{44} = 1 + \frac{2G}{c^2}\,\varphi, \quad \text{les autres} \quad g^{\mu\nu} = 0. \tag{5.6}$$

Avec (5.6) la composante $\alpha = 0$ de l'équation (2.9) devient

$$p^0 \frac{dp_0}{dt} = -\frac{G}{c^2}\left(p_0^2 + p_i^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{5.7}$$

Les coordonnées utilisées étant quasi-cartésiennes, nous aurons $p^0 \approx p_0$, $p_i^2 \approx p_0^2$ et par conséquent

$$\frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dt} = -\frac{2G}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{5.8}$$

Soit δM la masse totale du nuage, et supposons que ce nuage forme une couche sphérique de petite épaisseur et de rayon moyen a. En choisissant convenablement l'instant $t = 0$ nous aurons entre a et la vitesse d'expansion v la relation

(5.9) $$a = vt$$

avec $v \approx$ const. Remarquons que seule la masse δM donne un $\delta\varphi$ dépendant de t : la masse M de l'étoile centrale donne un φ indépendant de t, qui par conséquent n'intervient pas dans (5.8). Nous avons donc

(5.10) $$\delta\varphi \approx \frac{\delta M}{a}, \qquad \frac{\partial\delta\varphi}{\partial t} \approx -\frac{\delta M}{a^2}\, v.$$

Considérons d'abord une source S et un observateur O qui sont au repos à très grandes distances de l'étoile de telle sorte que

(5.11) $${}_sg_{00} = {}_og_{00} = 1, \qquad {}_su^\alpha = (1\,;\, 0, 0, 0) = {}_ou^\alpha.$$

Supposons aussi que le photon émis par S et se dirigeant vers O traverse le nuage et que sa trajectoire ait un segment de longueur l à l'intérieur de la sphère de rayon a. (Le rayon a du nuage ne varie pas sensiblement pendant que le photon parcourt le segment l, à cause de $v \ll c$.) Dans ce cas la relation (5.8) nous donne

(5.12) $$\delta p_0/p_0 \approx \frac{\delta m}{a}\frac{v}{c}\frac{l}{a}\,; \qquad \delta m = \frac{2G}{c^2}\,\delta M.$$

D'autre part, nous avons, à cause de (5.11),

(5.13) $$\varepsilon = p_0, \qquad E = p_0 + \delta p_0, \quad \text{donc} \quad E/\varepsilon = 1 + \frac{\delta p_0}{p_0}.$$

Autrement dit, nous aurons dans ce cas aussi, comme dans le cas où l'étoile était entourée par une couche de rayonnement en expansion, un déplacement vers le violet. Mais ce déplacement sera ici encore plus petit, à cause du facteur $\frac{v}{c}$ entrant dans (5.12).

Considérons finalement le cas où la source est un atome de l'étoile centrale au repos. Nous avons alors (l'observateur étant au repos et très loin)

(5.14) $$\varepsilon = p_0({}_sg_{00})^{-1/2}, \quad E = p_0 + \delta p_0\,; \quad E/\varepsilon = \sqrt{{}_sg_{00}}\left(1 + \frac{\delta p_0}{p_0}\right).$$

La quantité δp_0 est donnée par (5.12) avec $l = a$:

(5.15) $$\delta p_0/p_0 \approx \frac{\delta m}{a}\cdot\frac{v}{c}.$$