

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PH. DENNERY

A. KRZYWICKI

## **Origine de certaines résonances à trois particules**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 3, n° 2 (1965), p. 175-181

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1965\\_\\_3\\_2\\_175\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1965__3_2_175_0)

© Gauthier-Villars, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Origine de certaines résonances à trois particules**

par

**Ph. DENNERY**

(Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies, Orsay)

et

**A. KRZYWICKI**

(Laboratoire de Physique, École Polytechnique, Paris)  
(Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies, Orsay).

---

**SOMMAIRE.** — Nous proposons un formalisme décrivant l'interaction entre une particule stable et une particule instable et pouvant mener à un état résonnant à trois particules.

**SUMMARY.** — We suggest a formalism which describes the interaction between a stable and an unstable particle which can lead to a resonant state of three particles.

---

### **I. — INTRODUCTION**

Il est très vraisemblable qu'un grand nombre des résonances que l'on découvre parmi les particules élémentaires proviennent d'une interaction entre une particule stable et une particule instable. De tels effets ont déjà été considérés par Peierls [1] et par Nauenberg et Pais [2].

Ici nous allons utiliser un formalisme qui permet de tenir compte de l'in-

teraction entre une particule stable et une particule instable et nous allons suggérer un mécanisme qui peut expliquer l'existence des résonances à trois particules.

Nous allons considérer la particule instable comme une superposition d'états propres de l'Hamiltonien, ayant une masse donnée. Nous supposons d'abord que ces états constituent un ensemble discret d'états, et nous ferons correspondre à chaque état une voie distincte dans les diffusions. Ensuite, nous passerons à la limite d'un nombre continu de voies. Nous allons montrer qu'une résonance à trois particules dans une région physique peut provenir de l'interaction de la particule stable avec une partie de la queue de la particule instable; notamment la partie qui se trouve dans les voies fermées, c'est-à-dire dans les voies qui sont énergiquement inaccessibles.

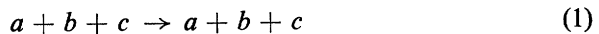
La queue de la particule instable joue sans doute un rôle très semblable au rôle que jouent les « états liés virtuels » qui ont été beaucoup discutés dans le cas des réactions à deux canaux, par Dalitz [4], Ross et Shaw [3] et d'autres auteurs.

Contrairement au mécanisme de Peierls, et surtout au mécanisme de Nauenberg-Pais, l'interaction que nous décrivons ici est une interaction à courte portée.

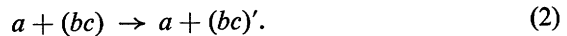
Le problème général à trois corps a été discuté récemment d'un point de vue fondamental par plusieurs auteurs [6]. Toutefois la théorie complète contient de sérieuses difficultés et nous avons cru bon de présenter un formalisme qui évite ces difficultés tout en donnant lieu à des équations exactement solubles.

## II. — LE FORMALISME

Nous considérerons la réaction :



comme une diffusion à deux corps entre la particule  $a$  et le système  $(bc)$  :



Puisque le mouvement interne du système  $(bc)$  dépend de l'interaction de ce système avec  $a$ , il est naturel d'utiliser le formalisme d'une diffusion à canaux multiples [3] [4]. Dans notre formalisme la matrice  $S$  sera automatiquement unitaire. Considérons d'abord le cas où les états de  $(bc)$  forment un ensemble discret. Supposons que pour une énergie  $E > E_0$ , tous les

canaux restent ouverts. Pour ces énergies, nous pouvons relier l'amplitude de diffusion T à la matrice hermitique et symétrique K :

$$T = (1 - iK)^{-1} \cdot K. \tag{3}$$

Comme Ross et Shaw [1], nous introduisons une matrice M :

$$M = q^{L+1/2} K^{-1} q^{L+1/2} \tag{4}$$

où q et L sont, respectivement, les matrices des impulsions et des moments angulaires. Nous utilisons une représentation où ces deux matrices sont diagonales. Avec la définition :

$$T = q^{L+1/2} \tau q^{L+1/2} \tag{5}$$

on obtient à partir de (3) le système d'équations suivant :

$$\sum_{\gamma} M_{\alpha\gamma} \tau_{\gamma\beta} - i q_{\alpha}^{2L_{\alpha}+1} \tau_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \tag{6}$$

Posons :

$$M_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - (A_{\alpha} + B_{\alpha\alpha}) \delta_{\alpha\beta} \tag{7}$$

B étant une matrice symétrique et réelle (tout du moins pour  $E > E_0$ ) qui induit les couplages entre les canaux. Il vient :

$$f_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} B_{\alpha\gamma} \tau_{\gamma\beta} - \delta_{\alpha\beta} \tag{8}$$

$$f_{\alpha} \equiv i q_{\alpha}^{2L_{\alpha}+1} + A_{\alpha} + B_{\alpha\alpha} \tag{9}$$

(8) a une solution itérative :

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{f_{\alpha}} - \frac{1}{f_{\alpha}^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{B_{\alpha\beta}}{(f_{\alpha} f_{\beta})^{\frac{1}{2}}} + \sum_{\gamma} \frac{B_{\alpha\gamma}}{(f_{\alpha} f_{\gamma})^{\frac{1}{2}}} \frac{B_{\gamma\beta}}{(f_{\gamma} f_{\beta})^{\frac{1}{2}}} + \dots \right\} \frac{1}{f_{\beta}^{\frac{1}{2}}}. \tag{10}$$

Nous cherchons une théorie qui mène à une résonance et donc à un  $\tau_{\alpha\beta}$  factorisable. Nous proposons un modèle basé sur l'hypothèse suivante :

$$B_{\alpha\beta} = g_{\alpha} g_{\beta}. \tag{11}$$

La condition (11) est suffisante pour assurer la factorisation de la matrice T et en même temps elles nous permettra d'obtenir une solution exacte du problème de diffusion avec plusieurs canaux. Nous voyons d'après (10) que la signification de (11) est que les états virtuels successifs du système sont atteints d'une manière indépendante; d'ailleurs le  $n^{i\text{ème}}$  terme de la série (10)

peut être interprété comme la probabilité que le système fera  $n$  transitions virtuelles.

En faisant la supposition (11), on peut résoudre exactement le système d'équations (8) :

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{f_\alpha} - \frac{g_\alpha g_\beta}{f_\alpha D f_\beta} \quad (12)$$

$$D \equiv 1 - \sum_\gamma \frac{B_{\gamma\gamma}}{f_\gamma}$$

$q_\gamma$  est donné par l'équation :

$$E = \sqrt{q_\gamma^2 + \mu^2} + \sqrt{q_\gamma^2 + m_\gamma^2}$$

où  $\mu$  et  $m_\gamma$  sont respectivement les masses de  $a$  et du système ( $bc$ ) (dans la voie  $\gamma$ ).  $q_\gamma$  a deux points de branchement à  $m_\gamma = E \pm \mu$ . Le point de branchement à  $m_\gamma = E - \mu$  correspond à la masse  $m_\gamma$  au-dessus de laquelle les voies sont fermées et les impulsions  $q_\gamma$  deviennent imaginaires. Au-dessus du deuxième point de branchement  $m_\gamma = E + \mu$ , les impulsions  $q_\gamma$  deviendraient à nouveau réelles. Ceci correspondrait à des ondes non atténuées se propageant dans une région non physique. Nous devons donc imposer la condition supplémentaire :

$$B_{\alpha\gamma}(E) = 0 \quad \text{pour} \quad E < m - \mu. \quad (13a)$$

En résumé, nous avons la condition (13a) et aussi la condition habituelle suivante :

$$q_\gamma = i |q_\gamma| \quad \text{pour} \quad E - \mu < m_\gamma < E + \mu. \quad (13b)$$

La transition au cas continu se fait en remplaçant la somme sur les masses dans (12) par une intégrale avec un poids convenable  $w(m)$ .  $w(m)$  représente la distribution de masse de la particule instable ( $bc$ ). Nous supposons que cette fonction est connue. Par exemple elle pourrait être connue soit expérimentalement soit d'après un calcul sur la diffusion à deux corps entre les particules  $b$  et  $c$ . De cette manière nous évitons la difficulté qu'entraînerait une tentative de résoudre généralement le problème à trois corps. Il est vrai que la fonction de distribution de la masse du ( $bc$ ) que l'on obtiendrait à partir d'un calcul très général différerait quelque peu de notre fonction  $w(m)$  ; mais sans doute cette différence ne serait pas très prononcée pour des énergies grandes par rapport à l'énergie du pic de la distribution du ( $bc$ ).

La solution (12) est suffisamment générale pour qu'elle permette de décrire un grand nombre de situations physiques. Nous allons considérer un cas simplifié où le nombre de paramètres est réduit à un minimum. Ceci nous permettra de voir sous quelles conditions on peut avoir une résonance à trois particules dans la région physique. Nous verrons que même ce cas simple peut correspondre à une situation physique.

### III. — UN EXEMPLE

Nous allons supposer qu'il existe une résonance dans le système  $(bc)$  ayant une masse  $m^* \gg \mu$  et une largeur  $\Gamma^*$ . Nous négligerons les effets spin-orbite, ce qui implique que le moment angulaire relatif de  $a$  par rapport à  $bc$  ainsi que le spin de  $(bc)$  sont conservés. Nous supposerons, pour simplifier les calculs, que  $a$  et  $(bc)$  sont dans un état de moment angulaire relatif  $l = 0$  et que  $A$  et  $B$  sont approximativement constants, sauf au voisinage de  $m = E_0 - \mu$  où  $B(m)$  doit s'annuler et sauf pour la condition (13). L'indépendance de  $A$  et de  $B$  par rapport à l'énergie implique que ces constantes sont réelles.

Posons :

$$0 < B/\mu \equiv \kappa \ll 1 \quad (14)$$

$$0 < (B + A - \mu)/\mu \equiv \varepsilon \ll 1. \quad (15)$$

Pour  $E > m^* + \mu$ , c'est-à-dire au-dessus du « seuil », on a, approximativement, tenant compte de (13a) et (13b) :

$$\text{Re}D(E) \approx 1 - \int_{E-\mu}^{E+\mu} \omega(m) \frac{\kappa}{|q|/\mu + 1 + \varepsilon} dm \approx 1 - \frac{\sqrt{2}\pi\kappa\mu}{\varepsilon} \omega(E) \quad (16)$$

$$\text{Im}D(E) \approx \int_{m < E-\mu} \omega(m) \frac{q\kappa\mu}{q^2 + \mu^2} dm \approx \frac{q^*\kappa\mu}{(q^*)^2 + \mu^2}. \quad (17)$$

Au voisinage de la résonance  $(abc)$  dont la position est déterminée par le zéro de (16), (12) devient :

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{f_\alpha} - \frac{\Gamma_r[(q^*)^2 + \mu^2]/q^*}{f_\alpha[E - E_r + i\Gamma_r]f_\beta} \quad (18)$$

où  $(d\omega(m)/dm < 0$  pour  $m > m^*$ ) :

$$\Gamma_r = \frac{\varepsilon q^*}{\sqrt{2} |\omega(E_r)| [(q^*)^2 + \mu^2]}.$$

Il est facile de voir que, pour qu'il y ait une résonance, l'intégrale dans (16) qui représente la contribution des voies fermées, doit être appréciable. A des énergies  $E > (m^* + \mu)$  et pour des valeurs de  $m$  telles que  $E - \mu < m < E + \mu$ , l'intégrale dans (16) reçoit des contributions qui proviennent essentiellement de la queue de  $\omega(m)$ . Le fait que  $\omega(m)$  a un petit poids dans l'intégrale n'est aucunement gênant car il suffit d'avoir  $\kappa/\varepsilon \gg 1$ . Ainsi la résonance à trois corps provient d'une forte interaction attractive entre  $a$  et la queue de  $(bc)$ . Puisqu'il est nécessaire, afin que la résonance ne soit pas atténuée que  $\varepsilon$ , c'est-à-dire que  $(A_\gamma + B_{\gamma\gamma})$  ne dépende que faiblement de l'énergie, ceci implique, selon la théorie de Ross et Shaw (3), que l'interaction est de courte portée.

Enfin, puisqu'il est aussi nécessaire que la résonance à trois particules ait une largeur raisonnable, la fonction de poids  $\omega(m)$  doit décroître suffisamment rapidement, bien que pas dans un trop petit intervalle de son argument. Cette dernière condition doit assurer que  $\text{Re}D$  ne restera pas petit loin de la résonance. On peut voir que, parce que les limites d'intégration dans (16) dépendent de l'énergie, une forte décroissance de  $\omega(m)$  donnera presque toujours lieu à une résonance, même dans des cas plus généraux que ceux que nous avons considérés. Au-dessus d'une résonance à deux particules il y a presque toujours une forte atténuation de l'onde résonnante, et puisque, dans notre formalisme, ceci correspond à une forte décroissance de  $\omega(m)$ , on peut supposer qu'au-dessus du seuil pour la production de résonances à deux particules dans des états finaux à trois particules, ces conditions seront souvent satisfaites.

#### IV. — CONCLUSIONS

Le mécanisme que l'on vient de décrire peut être considéré comme une généralisation du mécanisme menant à un état lié virtuel [4]. En effet, si  $f$  est petit pour certaines voies fermées, on peut facilement obtenir un comportement résonnant dans (12). Sans couplage entre les voies, on aurait des états liés ou presque liés (e. g. pour  $\kappa > \varepsilon$ , on a  $A/\mu > 1$  et  $\tau_{\alpha\beta}$  a un pôle à  $g = iA$  si  $B \rightarrow 0$ ).

La solution (12) a certaines propriétés que nous voudrions souligner. :  
(i) le rapport de branchement :

$$R = \frac{(abc) \rightarrow a + (bc)^*}{(abc) \rightarrow \text{toutes les voies } a + b + c}$$

sont en général de l'ordre de 1 s'il y a une résonance  $(bc)^*$ . D'ailleurs :

$$R = \int_{m(bc)^*} \omega(m) |g/f|^2 dm / \int \omega(m) |g/f|^2 dm \approx 1$$

si  $\omega(m)$  a un maximum à  $m^*$ .

Ce résultat n'est pas trivial, car en supposant qu'il y a seulement une forte interaction entre  $a$  et la queue de  $(bc)^*$  nous trouvons néanmoins que  $(abc)$  se désintègre surtout en  $a + (bc)$ .

(ii) Nous pouvons prendre  $\omega(m)$  proportionnel à la section efficace de la réaction  $b + c \rightarrow b + c$ . Toutefois, le pic de la distribution de masse du  $(bc)$  qui correspond au  $(bc)^*$  observé dans la désintégration du  $(abc)$ , sera en général déplacé par rapport à sa valeur  $m = m^*$ , en raison du facteur  $|gf|^2$  qui, en quelque sorte, renormalise le poids  $\omega(m)$ . Cet effet a déjà été observé expérimentalement.

(iii) Il semblerait que la théorie simplifiée que nous avons développée peut expliquer la résonance  $A_1$ , si l'on néglige les effets de symétrie qui sont sans importance, et si l'on considère les régions du diagramme de Dalitz qui sont loin de l'intersection des deux bandes des mésons  $\rho$ . En prenant :

$$\omega(m) = \frac{\Gamma^*}{\pi} / [(m^* - m)^2 + (\Gamma^*)^2]$$

on peut reproduire le  $A_1$  avec des paramètres  $\kappa - \varepsilon$  qui satisfont à (14) et (15). Le  $A_1$  aurait un spin 1, une parité +, et la distribution angulaire du  $\rho$  dans le système de repos du  $3\pi$  serait  $\cos^2 \alpha d\Omega$ , où  $\alpha$  est l'angle entre le  $\rho$  et le  $\pi$  incident.

Puisque les forces sont de courtes portées, on ne peut pas exclure la possibilité des désintégrations :

$$A_1^{(\pm)} \rightarrow \rho^{(\pm)} + \pi^0.$$

## RÉFÉRENCES

- [1] R. F. PEIERLS, *Phys. Rev. Letters*, t. 6, 1961, p. 641.
- [2] M. NAUENBERG and A. PAIS, *Phys. Rev.*, t. 126, 1962, p. 360.
- [3] M. ROSS and G. SHAW, *Annals of physics*, t. 13, 1961, p. 147.
- [4] R. H. DALITZ, *Rev. Mod. Phys.*, t. 33, 1961, p. 471.
- [5] M. NAUENBERG and A. PAIS, *Phys. Rev. Letters*, t. 8, 1962, p. 862.
- [6] R. OMNÈS, *Phys. Rev.*, t. 134 B, 1964, p. 1358.
- R. OMNÈS and V. ALESSANDRINI, *Phys. Rev.*, t. 136 B, 1964, p. 1137.

On peut trouver bien d'autres références dans ces articles, notamment en ce qui concerne les travaux importants de L. FADEEV et C. LOVELACE (*P. R.*, t. 135, 1964, p. 1225).

(Manuscrit reçu le 19 juillet 1965).