

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

KHAM DOEUN TOCH

Étude de l'équivalence des définitions de la distance spatiale en relativité générale

Annales de l'I. H. P., section A, tome 4, n° 2 (1966), p. 107-117

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__4_2_107_0

© Gauthier-Villars, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Étude de l'équivalence des définitions de la distance spatiale en relativité générale

par

TOCH Kham Doeun
(Institut Henri Poincaré).

SOMMAIRE. — En utilisant quelques propriétés de la congruence de géodésiques isotropes dans une variété riemannienne, on étudie l'équivalence de 4 types de définitions de la distance spatiale proposées par différents auteurs en Relativité générale.

SUMMARY. — Study of the equivalence of four different definitions of spatial distance in general Relativity by using characteristic properties of nullgeodesic congruences.

I. — INTRODUCTION

En Relativité générale, seule la distance spatiale entre deux points d'univers infiniment voisins a été définie d'une manière unique. Celle de deux points à distance finie a été examinée à plusieurs reprises et de différentes manières tant du point de vue astronomique que cosmologique. Les mesures effectives d'une telle distance spatiale sont des mesures photométriques de magnitude : ce qui explique le rôle des géodésiques isotropes dans les définitions proposées. En utilisant quelques propriétés des congruences de géodésiques isotropes dans une variété riemannienne, nous allons étudier l'équivalence de 4 types de définitions de la distance spatiale proposées par différents auteurs en Relativité générale.

II. — RAPPEL :
CONGRUENCES DE GÉODÉSIIQUES ISOTROPES
DANS UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE.
DÉFINITIONS DE LA DISTANCE SPATIALE
EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Considérons un espace-temps riemannien V_4 doué d'une métrique du type hyperbolique normal :

$$(2-1) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Soient L et L' deux lignes d'univers respectivement tangentes aux vitesses unitaires u^α et $u^{\alpha'}$ en A et B .

Soit $G(u, v)$ le 2-espace formé par les géodésiques isotropes $\Gamma(u)$ qui appliquent L sur L' et soient :

a) u un paramètre spécial sur chacune des $\Gamma(u)$ tel que $u = u_1$ sur L et $u = u_2$ sur L' , ce qui est toujours possible puisque ce paramètre n'est déterminé qu'à une transformation linéaire près (Nous prendrons $u_1 > u_2$).

b) v un second paramètre constant le long de chaque $\Gamma(u)$.

On sait que sur chaque $\Gamma(u)$, on a, en posant :

$$(2-2) \quad l^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \quad \eta^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial v} dv$$

$$\frac{\nabla l^\mu}{du} = \frac{dl^\mu}{du} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\rho \end{matrix} \right\} l^\rho = 0 \quad l^\mu l_\mu = 0$$

$$(2-3) \quad \frac{\nabla^2 \eta^\mu}{du^2} + R_{\nu\rho\sigma}^\mu l^{\nu\rho} l^\sigma = 0$$

(équation de la déviation géodésique).

$$(2-4) \quad \eta^\mu l_\mu = \text{constante indépendante de } u.$$

Pour plus de simplicité, nous supposerons que :

$$(2-5) \quad \eta^\mu(u_2) = 0$$

ce qui entraîne que :

$$(2-6) \quad \eta^\mu l_\mu = 0$$

(η^μ orthogonal à l^μ tout au long de chaque $\Gamma(u)$).

On remarque que sur chaque $\Gamma(u)$, la solution de (2-3), orthogonale à l^μ , n'est déterminée qu'à la transformation suivante près :

$$(2-7) \quad \eta^\mu = \eta_0^\mu + g(u)l^\mu$$

où $g(u)$ est une fonction linéaire quelconque de u et η_0^μ une solution quelconque de (2-3) orthogonale à l^μ et indépendante de u^α .

Donc sur chaque $\Gamma(u)$, quel que soit le vecteur unitaire u^α , il y a toujours une solution de (2-3) qui soit orthogonale à la fois à l^μ et à u^α .

Cependant, on a sur chaque $\Gamma(u)$:

$$(2-8) \quad \eta \equiv |\eta^\mu \eta_\mu|^{1/2} = |\eta_0^\mu \eta_{0\mu}|^{1/2} \equiv \eta_0.$$

Par suite, η est indépendant de u^α .

Par la suite, nous désignerons par P et Q les 3-espaces orthogonaux respectivement à l^μ et u^α en A et par Σ leur intersection. Le mince faisceau de $\Gamma(u)$ coupe Σ suivant une section bidimensionnelle dont nous désignerons l'aire par S.

Cela étant posé, nous allons étudier l'équivalence des définitions suivantes de la distance spatiale $\Delta(A, B)$, observée en A :

Définition I (Whittaker, 1932 [1])

$$(2-9) \quad \Delta_I(A, B) = k(u_1 - u_2)$$

où par hypothèse, la constante k est telle que, quand A et B deviennent infiniment voisins l'un de l'autre, $\Delta_I(A, B) = |d\sigma|$ étant l'élément linéaire d'espace du 3-espace P.

Définition II (H. S. Ruse [2])

$$(2-10) \quad \Delta_{II}(A, B) = \left| \frac{\partial \Omega(A, B)}{\partial \tau_A} \right|$$

où $\Omega(A, B)$ est la « fonction d'univers » le long de la géodésique $\Gamma_0(u)$ joignant A et B :

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_B^A ds^2$$

τ_A = le temps propre sur L en A.

Définition III

$$(2-11) \quad \Delta_{III}(A, B) = K\sqrt{S}$$

la constante K étant définie avec la même hypothèse que celle utilisée pour k .

Cette définition s'inspire de celle de Whittaker (1931 [3]) et diffère de cette dernière par le fait que l'aire S considérée par Whittaker est celle engendrée par l'intersection du mince faisceau de $\Gamma(u)$ avec le 3-espace P et non avec $\Sigma = P \cap Q$.

Définition IV (Goldberg et Newmann [4])

$$(2-12) \quad \Delta_{IV}(A, B) = C\eta$$

C étant encore choisie avec la même hypothèse que celle utilisée pour k.

III. — ÉQUIVALENCE DES DÉFINITIONS I ET II

Les définitions I et II sont équivalentes dans tout espace-temps (Ruse [2]).

En effet, la solution de (2-2) pour $\mu = 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$(3-1) \quad l^0 = \frac{\partial x^0}{\partial u} = Y(x^\mu) \quad \text{ou} \quad du = \frac{\partial x^0}{Y(x^\mu)}$$

Y étant une certaine fonction connue de x^μ . Par suite :

$$(3-2) \quad \Delta_I(A, B) = k(u_1 - u_2) = k \int_B^A \frac{\partial x^0}{Y}$$

l'intégrale étant prise sur $\Gamma_0(u)$.

Or, par hypothèse sur k, on a :

$$(3-3) \quad k du = |d\sigma| = |u^\mu l_\mu|_{u=u_1} du \quad \text{ou} \quad k = |u^\mu l_\mu|_{u=u_1}.$$

Par suite, (3-2) s'écrit :

$$(3-4) \quad \Delta_I(A, B) = |u^\mu l_\mu|_{u=u_1} \int_B^A \frac{\partial x^0}{Y} = \left| u^\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^0} \right|_{u=u_1} |Y_1| \int_B^A \frac{\partial x^0}{Y}$$

Y_1 étant la valeur de Y en A.

Écrivant maintenant l'expression invariante (3-4) dans les coordonnées normales géodésiques :

$$y^\mu = a^\mu u \quad a^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u} \right)_{u=u_1}$$

on obtient :

$$(3-5) \quad \Delta_I(A, B) = |u_\mu y_1^\mu| \quad \text{avec} \quad y_1^\mu = a^\mu u_1.$$

Or, on sait d'autre part que [5] :

$$(3-6) \quad \frac{\partial \Omega(A, B)}{\partial v_1^\mu} = y_{\mu_1} \quad y_{\mu_1} = (g_{\mu\nu})_{u=u_1} y_1^\mu.$$

Comparant (3-5) et (3-6), on obtient :

$$(3-7) \quad \Delta^1(A, B) = \left| u^\mu \frac{\partial \Omega}{\partial x_1^\mu} \right| = \left| \frac{\partial x_1^\mu}{\partial \tau_A} \frac{\partial \Omega}{\partial x_1^\mu} \right| = \left| \frac{\partial \Omega}{\partial \tau_A} \right| \quad \text{c. q. f. d.}$$

IV. — ÉQUIVALENCE DES DÉFINITIONS III ET IV

Goldberg et Newmann [4] ont déjà vérifié l'équivalence des définitions III et IV dans les espaces-temps isotropes et homogènes au sens habituel. Nous allons essayer de l'établir dans le cas général.

A cet effet, nous allons comparer l'expression de \sqrt{S} avec celle de η .

Considérons d'abord en A un repère orthonormé constitué par les vecteurs de base $\lambda_{(\alpha)}^\mu$ $\alpha = 0, 1, 2, 3$ tels que :

- a) $\lambda_{(0)}^\mu = u^\mu$
- b) $\lambda_{(2)}^\mu$ et $\lambda_{(3)}^\mu$ orthogonaux tous les deux à l^μ .

Tout point de S est l'intersection avec Σ d'une géodésique $\Gamma(u)$ très voisine de $\Gamma_0(u)$. Soit ξ_α les coordonnées de ce point relatives au repère $\lambda_{(\alpha)}^\mu$.

On a :

$$(4-1) \quad \xi_\alpha = \eta^\mu \lambda_{(\alpha)\mu}$$

S étant orthogonal à la fois à l^μ et à u^μ , on a :

$$(4-2) \quad \xi_0 = 0 \quad \xi_1 = 0 \quad \text{donc} \quad dS = d\xi_2 \wedge d\xi_3$$

S est donc dans l'hyperplan engendré par $\lambda_{(2)}^\mu$ et $\lambda_{(3)}^\mu$.

D'autre part, on a en fonction de ξ_2 et de ξ_3 :

$$(4-3) \quad \eta = (\xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}.$$

Introduisant une variable Θ indépendante de η telle que :

$$(4-4) \quad \begin{cases} \xi_2 = \eta \cos \Theta \\ \xi_3 = \eta \sin \Theta \end{cases}$$

on peut écrire (4-2) en fonction de η :

$$(4-5) \quad dS = \eta d\eta d\Theta \quad \text{ou} \quad S = \frac{1}{2} \eta^2 (\Theta_2 - \Theta_1)$$

Θ_1, Θ_2 étant 2 valeurs de Θ limitant l'aire S qu'il est inutile de préciser ici.

(4-5) montre d'abord que S est indépendante de u^α .

En effet, imaginons que A décrive une autre ligne d'univers $\bar{L} \neq L$. Et soient $\bar{u}^\alpha, \bar{S}, \bar{\eta}, \bar{\xi}_\alpha, \bar{\Theta}$ respectivement $u^\alpha, S, \eta, \xi_\alpha, \Theta$ correspondants à \bar{L} .

Le même raisonnement que celui utilisé pour S montre que :

$$(4-6) \quad \bar{\eta} = (\bar{\xi}_2^2 - \bar{\xi}_3^2)^{1/2} \quad \bar{S} = \frac{1}{2} \bar{\eta} (\bar{\Theta}_2 - \bar{\Theta}_1).$$

Or, on a vu que η est indépendant de u^α :

$$(4-7) \quad \bar{\eta} = (\bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_3^2)^{1/2} = \eta = (\xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}.$$

Par suite :

$$(4-8) \quad \bar{\Theta} = \Theta + \Theta_0,$$

Θ_0 étant une valeur fixe quelconque de Θ .

Alors la deuxième relation de (4-6) s'écrit :

$$(4-9) \quad \bar{S} = \frac{1}{2} \eta (\Theta_2 - \Theta_1) = S \quad \text{c. q. f. d.}$$

Cette dernière propriété des géodésiques isotropes dans une variété riemannienne sera utilisé dans le paragraphe qui va suivre.

(4-5) montre aussi que S est proportionnelle à η^2 c'est-à-dire \sqrt{S} proportionnelle à η .

Par suite, Δ_{III} est proportionnelle à Δ_{IV} :

$$(4-10) \quad \Delta_{III}(A, B) = \mu \Delta_{IV}(A, B);$$

$\mu = \text{const. de proportionnalité.}$

Or, en admettant que, quand A et B deviennent infiniment voisins l'un de l'autre, Δ_{III} et Δ_{IV} sont égaux tous les deux à la même quantité $|d\sigma|$, on aura nécessairement $\mu = 1$: ce qui établit l'équivalence des définitions III et IV.

V. — ÉQUIVALENCE DES 4 DÉFINITIONS I, II, III ET IV

Il nous reste à voir si l'une des définitions I et II est équivalente à l'une des définitions III et IV.

Par exemple, essayons de comparer les définitions I et III.

Pour cela, considérons d'abord en A un repère orthonormé $X_{(\alpha)}^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ ($X_{(0)}^\mu$ orienté dans le temps; $X_{(i)}^\mu$, $i = 1, 2, 3$ orienté dans l'espace) tel que :

- a) $X_{(2)}^\mu$ se transporte parallèlement le long de $\Gamma_0(u)$ et est orthogonal à l^μ .
- b) $X_{(3)}^\mu$ est orthogonal à l^μ ⁽¹⁾.

En plus des relations issues du caractère orthonormé du repère, les $X_{(\alpha)}^\mu$ vérifient donc sur $\Gamma_0(u)$ les relations suivantes :

$$(5-1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \frac{\nabla X_{(2)}^\mu}{du} = 0 & X_{(2)}^\mu l_\mu = 0 & X_{(2)}^\mu \frac{\nabla^2 X_{(2)\mu}}{du^2} = 0 \\ X_{(3)}^\mu l_\mu = 0 & l_\mu \frac{\nabla X_{(3)}^\mu}{du} = 0 & X_{(2)}^\mu \frac{\nabla X_{(3)\mu}}{du} = 0 \\ X_{(3)}^\mu \frac{\nabla X_{(3)\mu}}{du} = 0 & X_{(2)}^\mu \frac{\nabla^2 X_{(3)\mu}}{du^2} = 0 & X_{(3)}^\mu \frac{\nabla^2 X_{(3)\mu}}{du^2} = 0. \end{array} \right.$$

Par rapport au repère $X_{(\alpha)}^\mu$, le vecteur u^α a une direction absolument quelconque. En particulier $X_{(0)}^\mu$ n'est pas nécessairement confondu avec u^α . Cependant comme la valeur de l'aire S est indépendante de u^α , on ne changera rien à cette valeur en procédant comme si $X_{(0)}^\mu$ est confondu avec u^α . Ce que nous allons faire.

Or, dans le cas où $X_{(0)}^\mu = u^\mu$, on a vu que S est dans l'hyperplan $X_{(2)}^\mu$, $X_{(3)}^\mu$ ($X_{(\alpha)}^\mu$ dans ce cas joue le rôle de $\lambda_{(\alpha)}^\mu$).

Et à partir de (4-1) où l'on remplace $\lambda_{(\alpha)}^\mu$ par $X_{(\alpha)}^\mu$, on tire :

$$(5-2) \quad \eta^\mu = - (\xi_2 X_{(2)}^\mu + \xi_3 X_{(3)}^\mu).$$

En portant cette expression de η^μ dans l'équation de la déviation géodésique (2-3) et en tenant compte des relations de (5-1), on obtient :

$$(5-3) \quad X_{(2)}^\mu \frac{d^2 \xi_2}{du^2} + \xi_3 \frac{\nabla^2 X_{(3)}^\mu}{du^2} + 2 \frac{d \xi_3}{du} \frac{\nabla X_{(3)}^\mu}{du} + X_{(3)}^\mu \frac{d^2 \xi_3}{du^2} + R_{\nu\rho\sigma}^\mu l^\nu l^\sigma X_{(2)}^\rho \xi_2 + R_{\nu\rho\sigma}^\mu l^\nu l^\sigma X_{(3)}^\rho \xi_3 = 0.$$

(¹) On pourra aussi imposer que $X_{(3)}^\mu$ se transporte parallèlement le long de Γ_0 . On ne changera rien aux équations (5-4) et (5-5).

En multipliant les deux membres de (5-3) successivement par $X_{(2)\mu}$ et par $X_{(3)\mu}$, en sommant ensuite par rapport à μ et en tenant compte de (5-1), on obtient un système de deux équations différentielles qui donnera ξ_2 et ξ_3 en fonction de u :

$$(5-4) \quad \frac{d^2 \xi_r}{du^2} - \Gamma_{rs} \xi_s = 0$$

(avec sommation sur s ; $r, s = 2, 3$)

$$(5-5) \quad \Gamma_{rs} = \Gamma_{sr} = R_{\mu\nu\sigma\tau} l^\nu l^\sigma X_{(r)}^\mu X_{(s)}^\rho.$$

Connaissant ξ_2 et ξ_3 en fonction de u , on calculera $dS = d\xi_2 \wedge d\xi_3$ qui, par intégration, donnera S en fonction de u .

Nous ne nous intéresserons qu'aux espace-temps particuliers dans lesquels on aura :

$$(5-6) \quad \Gamma_{rs} = 0 \quad \text{quels que soient } r \text{ et } s = 2, 3.$$

Dans de tels espace-temps, le système (5-4) se réduira simplement à :

$$(5-7) \quad \frac{d^2 \xi_r}{du^2} = 0 \quad r = 2, 3 \quad \text{ou } \xi_r = \alpha_r u + \beta_r; \quad \alpha_r, \beta_r = \text{const. d'intégration.}$$

Soit avec l'hypothèse : $\eta^\mu(u_2) = 0$

$$(5-9) \quad \xi_r = \alpha_r (u_1 - u_2) \quad r = 2, 3.$$

Par suite :

$$(5-10) \quad dS = (u_1 - u_2)^2 d\alpha_2 \wedge d\alpha_3$$

$$(5-11) \quad \sqrt{S} = \lambda (u_1 - u_2); \quad \lambda = \text{const. de proportionnalité}$$

$$(5-12) \quad \Delta_1(A, B) = \mu \Delta_{III}(A, B); \quad \mu = \text{const. de proportionnalité.}$$

Or, $\mu = 1$ du fait que quand A et B deviennent infiniment voisins l'un de l'autre, Δ_I et Δ_{III} tendent par hypothèse vers une même quantité $|d\sigma|$: ce qui établit l'équivalence des définitions I et III dans ces espace-temps particuliers.

VI. — APPLICATIONS

Dans la suite, nous essaierons de voir si les définitions I et III sont équivalentes dans les espace-temps de Schwarzschild extérieurs, les espace-temps isotropes et homogènes au sens habituel et dans les espace-temps isotropes et homogènes au sens de la méthode des transformées. Ce qui revient à voir si les espace-temps précédents satisfont à la condition (5-6).

a) Espace-temps de Schwarzschild extérieurs

On sait que relativement aux coordonnées de Jordan (r, θ, φ, t) le ds^2 des espace-temps de Schwarzschild extérieurs s'écrit [4] :

$$(6-1) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + 2\left(\frac{2m}{r}\right)^{1/2} dt dr - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$m =$ rayon gravitationnel; on a fait $c = 1$.

Nous considérons B au point où $r = 0$.

On peut vérifier que sur $\Gamma_0(u)$, l^μ est tel que :

$$(6-2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} l^0 = \frac{h}{1 - \left(\frac{2m}{r}\right)^{1/2}} & l^1 = h \\ l^2 = l^3 = 0 & h = \text{constante} = \neq 0 \end{array} \right.$$

et que $X_{(2)}^\mu$ et $X_{(3)}^\mu$ sont tels que :

$$(6-3) \quad X_{(2)}^\mu = \frac{1}{r} \delta_2^\mu \quad X_{(3)}^\mu = \frac{1}{r \sin \theta} \delta_3^\mu.$$

Tenant compte de (6-3) et de l'expression de $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ obtenue à partir de (6-1), on vérifiera que la condition (5-6) est vérifiée : les définitions I et III sont donc équivalentes dans les espace-temps de Schwarzschild extérieurs.

b) Espace-temps isotropes et homogènes au sens habituel

On sait que relativement aux coordonnées $(\chi, \theta, \varphi, \tau)$ définies à partir du système de coordonnées entraînées habituelles (r, θ, φ, t) par les transformations :

$$(6-4) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = R \sin \chi \\ \theta = \theta; \varphi = \varphi \\ C dt = R d\tau \end{array} \right. \quad R = \text{rayon de courbure de l'espace}$$

le ds^2 des espace-temps s'écrit :

$$(6-5) \quad ds^2 = R^2(\tau)[d\tau^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Sur $\Gamma_0(u)$, on a :

$$(6-6) \quad \begin{aligned} l^0 &= -l^1 = \frac{\lambda}{R^2} & \lambda &= \text{const.} \neq 0 \\ l^2 &= l^3 = 0 \\ X_{(2)}^\mu &= \frac{1}{R \sin \chi} \delta_2^\mu & X_{(3)}^\mu &= \frac{1}{R \sin \chi \sin \theta} \delta_3^\mu. \end{aligned}$$

Par suite :

$$(6-7) \quad \Gamma_{rs} = \left(1 + \frac{2\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R}\right) \frac{\lambda^2}{R^4} \delta_{rs}; \quad \dot{R} = \frac{dR}{d\tau}; \quad \ddot{R} = \frac{d^2R}{d\tau^2}.$$

On peut alors vérifier à partir de l'expression de R du modèle de de Sitter (cas statique) ou du modèle d'Einstein-Friedmann (cas non statique) que :

$$(6-8) \quad \Gamma_{rs} \neq 0$$

c'est-à-dire que les solutions de (5-4) ne sont pas proportionnelles à $(u_1 - u_2)$. Les définitions I et III ne sont donc pas équivalentes dans les espace-temps isotropes et homogènes au sens habituel.

c) Espace-temps isotropes et homogènes au sens de la méthode des transformées

On sait que relativement aux coordonnées adaptées de la méthode des transformées (x^μ) , le ds^2 des espace-temps isotropes et homogènes s'écrit [6] :

$$(6-9) \quad ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - \frac{(x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 - x^0 dx^0)^2}{a^2 - \rho^2}$$

$$a = \text{const.}$$

$$\rho^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^0)^2.$$

On en déduit que :

$$(6-10) \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{a^2} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}).$$

Par suite, quel que soit le repère $X_{(\alpha)}^\mu$ considéré, on a :

$$(6-11) \quad \Gamma_{rs} = \frac{1}{a^2} \left[\underbrace{(l^\sigma X_{(r)\sigma})}_{\text{O}} (l^\rho X_{(s)\rho}) - \underbrace{(X_{(r)}^\rho X_{(s)\rho})}_{\text{O}} (l^\sigma l_\sigma) \right] = 0.$$

Les définitions I et III sont donc équivalentes dans de tels espace-temps.

Il en sera de même pour les espace-temps isotropes et homogènes au sens géométrique de Riemann dont :

$$(6-12) \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = K(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}); \quad K = \text{const.}$$

VII. — CONCLUSIONS

Il ressort de l'étude précédente que dans tout espace-temps de la Relativité générale :

- a) les définitions I et II sont équivalentes entre elles;
- b) il en est de même pour les définitions III et IV.

Toutes les 4 définitions I, II, III et IV semblent être équivalentes entre elles dans les espace-temps particuliers satisfaisant à la condition (5-6). Il en est ainsi pour les espace-temps de Schwarzschild extérieurs et les espaces-temps isotropes et homogènes au sens de la méthode des transformées (ou au sens géométrique de Riemann). Cependant, il n'en est pas ainsi pour les espace-temps isotropes et homogènes au sens habituel. Cela est dû, semble-t-il, essentiellement à la définition de l'isotropie et de l'homogénéité adoptée habituellement.

L'auteur adresse ses remerciements à M. Kichenassamy dans le groupe d'études de qui cet article a été préparé.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WHITTAKER, *Proc. Roy. Soc.*, Edinburgh, t. A53, 1932-1933, p. 31.
- [2] H. S. RUSE, *Proc. Roy. Soc.*, Edinburgh, t. A53, 1932-1933, p. 79.
- [3] WHITTAKER, *Proc. Roy. Soc.*, London, t. A113, 1931, p. 93.
- [4] GOLDBERG et NEWMANN, *Phys. Rev.*, t. 114, 1959, p. 1391.
- [5] H. S. RUSE, *Proc. Lond. Math. Soc.*, t. 32, 1931, p. 90.
- [6] S. KICHENASSAMY, *Thèse Sc. Math.*, Paris, 1958.

(Manuscrit reçu le 10 décembre 1965).