GUY BOILLAT

Vitesses des ondes électrodynamiques et lagrangiens exceptionnels

Annales de l'I. H. P., section A, tome 5, nº 3 (1966), p. 217-225

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__5_3_217_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. V, n° 3, 1966, p. 217-225.

Section A :
Physique théorique.

Vitesses des ondes électrodynamiques et lagrangiens exceptionnels

par

Guy BOILLAT
(Département de Mathématiques, Université de Clermont).

SOMMAIRE. — Les vitesses de propagation sont déterminées dans le cas général ainsi que le domaine d'hyperbolicité des équations du champ. Le problème des lagrangiens exceptionnels est posé. Le lagrangien de Born-Infeld se singularise.

SUMMARY. — The speeds of non-linear electrodynamical waves are determined in the general case as well as the domain of hyperbolicity of the field equations and the weak perturbations. The problem of exceptional Lagrangians (i. e. for which shocks do not occur on the wave front) is settled. The Born-Infeld Lagrangian that is exceptional singles out : it is the only (non-linear) one giving birth to double characteristic speeds.

1. — INTRODUCTION

Les équations du champ de l'électrodynamique non linéaire dérivent du lagrangien

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(Q, R),$$

fonction des deux invariants

$$Q = \frac{1}{2}(\vec{H}^2 - \vec{E}^2), \qquad R = \vec{E}.\vec{H},$$

formés à l'aide des vecteurs champ électrique et champ magnétique.

La discontinuité faible $\delta\vec{E}$ du champ électrique en un point de la surface d'onde où la normale est $\vec{n}$, la vitesse de propagation λ, est solution de l'équation [1]

$$\{(\mathcal{L}_{QQ}\vec{u}+\mathcal{L}_{QR}\vec{v})\delta\vec{E}\}\vec{u}+\{(\mathcal{L}_{QR}\vec{u}+\mathcal{L}_{RR}\vec{v})\delta\vec{E}\}\vec{v}-\mathcal{L}_Q\{(\lambda^2-1)\delta\vec{E}+(\vec{n}.\delta\vec{E})\vec{n}\}=0 \tag{1.1}$$

où

$$\vec{u}=\vec{H}\times\vec{n}-\lambda\vec{E}, \qquad \vec{v}=\vec{E}\times\vec{n}+\lambda\vec{H}.$$

La propagation à la vitesse fondamentale spécialement étudiée [1], cette équation montre que l'on peut écrire si $\lambda^2 \neq 1$:

$$\delta\vec{E}=a^1\vec{u}+a^2\vec{v}+a^3\vec{n}.$$

Portant dans (1.1), on obtient

$$a^i\vec{V}_i(\lambda)=0 \tag{1.2}$$

avec

$$\begin{aligned}
\vec{V}_1&=\{\mathcal{L}_{QQ}u^2+\mathcal{L}_{QR}\vec{u}.\vec{v}-\mathcal{L}_Q(\lambda^2-1)\}\vec{u}+(\mathcal{L}_{QR}u^2+\mathcal{L}_{RR}\vec{u}.\vec{v})\vec{v}-\mathcal{L}_Q u_n\vec{n}\\
\vec{V}_2&=(\mathcal{L}_{QQ}\vec{u}.\vec{v}+\mathcal{L}_{QR}v^2)\vec{u}+\{\mathcal{L}_{QR}\vec{u}.\vec{v}+\mathcal{L}_{RR}v^2-\mathcal{L}_Q(\lambda^2-1)\}\vec{v}-\mathcal{L}_Q v_n\vec{n} \qquad (1.3)\\
\vec{V}_3&=(\mathcal{L}_{QQ}u_n+\mathcal{L}_{QR}v_n)\vec{u}+(\mathcal{L}_{QR}u_n+\mathcal{L}_{RR}v_n)\vec{v}-\mathcal{L}_Q\lambda^2\vec{n}
\end{aligned}$$

($u_n=\vec{u}.\vec{n}$, etc.).

2. — LE POLYNOME CARACTÉRISTIQUE

Il s'obtient en exprimant la nullité du produit mixte des vecteurs $\vec{V}_i$:

$$\mathcal{D}(\vec{V}_i)=0.$$

Supprimant les ondes stationnaires par les contraintes, le polynôme caractéristique [1] peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{P}=\varpi(a\lambda^2+2b\lambda+c)^2-(\lambda^2-1)(a\lambda^2+2b\lambda+c) + \{\omega-\varpi(Q^2+R^2)\}(\lambda^2-1)^2$$

avec

$$\varpi=\frac{\mathcal{L}_{QQ}\mathcal{L}_{RR}-\mathcal{L}_{QR}^2}{\mathcal{L}_Q(\mathcal{L}_{QQ}+\mathcal{L}_{RR})}, \qquad \omega=\frac{\mathcal{L}_Q+Q(\mathcal{L}_{QQ}-\mathcal{L}_{RR})+2R\mathcal{L}_{QR}}{\mathcal{L}_{QQ}+\mathcal{L}_{RR}}$$

et

$$a = \frac{1}{2}(E^2 + H^2), \qquad b = -S_n, \qquad c = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) - (E_n^2 + H_n^2).$$

(On suppose essentiellement $\mathcal{L}_Q(\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}) \neq 0$. $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$).

En posant

$$\mu = \frac{a\lambda^2 + 2b\lambda + c}{1 - \lambda^2},$$

on détermine d'abord les racines de

$$\varpi\mu^2 + \mu + \omega - \varpi(Q^2 + R^2) = 0$$

dont le discriminant

$$\Delta = 1 - 4\omega\varpi + 4\varpi^2(Q^2 + R^2)$$

qui se note également

$$\Delta = \left(\frac{\mathcal{L}_{QQ} - \mathcal{L}_{RR}}{\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}} - 2Q\varpi\right)^2 + 4\left(\frac{\mathcal{L}_{QR}}{\mathcal{L}_{QQ} + \mathcal{L}_{RR}} - R\varpi\right)^2 \qquad (2.1)$$

n'est jamais négatif ; soient

$$\mu(Q, R) = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2\varpi}.$$

Les vitesses de propagation sont alors solutions de

$$(a + \mu)\lambda^2 + 2b\lambda + c - \mu = 0. \qquad (2.2)$$

Si

$$\varpi = 0 \qquad (2.3)$$

on a simplement

$$\mu = -\omega,$$

cependant qu'existent les vitesses

$$\lambda = \pm 1.$$

3. — DOMAINE D'HYPERBOLICITÉ

Pour que le système des équations du champ soit hyperbolique il est nécessaire que les valeurs propres λ soient réelles, donc que :

$$\Delta' = \mu^2 + \mu(a - c) + b^2 - ac \geqslant 0.$$

C'est dire que μ doit être extérieur à l'intervalle compris entre les racines

$$\nu = \frac{1}{2}(c - a \pm \sqrt{\Delta''}),$$

$$\Delta'' = \{ E^2 + H^2 - (E_n^2 + H_n^2) \}^2 - 4S_n^2,$$

de Δ' qui existent toujours (Δ'' s'annule seulement dans les deux directions pour lesquelles la vitesse de la lumière est atteinte [*1*]). Les valeurs de ν dépendent de $\vec{n}$ par l'intermédiaire de

$$E_n^2 + H_n^2\,; \tag{3.1}$$

on calculera leurs valeurs extrêmes : borne inférieure pour la plus petite ν_1, supérieure pour la plus grande ν_2. Faisons d'abord varier $\vec{n}$ sur un cône d'axe $\vec{S}$: $S_n =$ cte. La recherche du domaine des valeurs possibles de (3.1) équivaut à celle des axes de l'ellipse centrée :

$$E^2H_n^2 + H^2E_n^2 - 2RE_nH_n = S^2 - S_n^2.$$

On trouve ainsi que (3.1) est comprise entre les limites

$$\left(1 - \frac{S_n^2}{S^2}\right) \left\{ \frac{1}{2}(E^2 + H^2) \mp \sqrt{Q^2 + R^2} \right\}.$$

Finalement, S_n prenant toutes les valeurs possibles ($0 \leqslant S_n^2 \leqslant S^2$),

$$\nu_{1m} \leqslant \nu \leqslant \nu_{2M}$$

et

$$\nu_{1m} = -\frac{1}{2}(E^2 + H^2), \qquad \nu_{2M} = \sqrt{Q^2 + R^2}.$$

Pour Q et R donnés, $E^2 + H^2$ peut encore prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut et l'on ne peut être assuré d'avoir $\mu < \nu_{1m}$. En outre, cette condition s'écrit $a + \mu < 0$; elle entraîne (voir ci-dessous) $\lambda^2 > 1$. Pour ces raisons, on imposera la condition

$$\mu \geqslant \sqrt{Q^2 + R^2}, \tag{3.2}$$

c'est-à-dire

$$\pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2\varpi} \geqslant \sqrt{Q^2 + R^2} + \frac{1}{2\varpi}.$$

On doit supposer

$$\varpi < 0. \tag{3.3}$$

Alors

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \leqslant \varpi\sqrt{Q^2 + R^2} + \frac{1}{2},$$

ce qui implique déjà

$$\varpi\sqrt{Q^2 + R^2} + \frac{1}{2} \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Enfin

$$\omega + \sqrt{Q^2 + R^2} \leqslant 0. \tag{3.5}$$

(Cette condition est encore valable si $\varpi = 0$). L'existence des racines est assurée dans le domaine déterminé par les inégalités (3.3-5).

4. — GRANDEUR DES VITESSES

Il suffit [*1*] de considérer le cas $S_n = 0$.

$$(a + \mu)(\lambda^2 - 1) + a + c = 0,$$
$$a + \mu > 0, \qquad a + c > 0,$$

car $\mu \geqslant 0$ (3.2). Nécessairement $\lambda^2 < 1$ et par suite

$$\lambda^2 \leqslant 1$$

dans toutes les directions de l'espace.

5. — RACINES DOUBLES

De façon générale elles existeront si $\Delta \equiv 0$. D'après (2.1) on est conduit à chercher les solutions communes à deux équations de Monge-Ampère. On trouve aisément

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-R^2 + k(2Q + k)}, \qquad (k = \text{cte}).$$

C'est (avec $k > 0$) le lagrangien de Born-Infeld [*2*]. Avec cette expression

$$\mu = Q + k, \tag{5.1}$$

les vecteurs $\vec{V}_i$ (1.3) sont colinéaires

$$\lambda\vec{V}_2 = H_n\vec{V}_3, \qquad \lambda\vec{V}_1 = -E_n\vec{V}_3,$$

(1.2) devient

$$-a^1E_n + a^2H_n + a^3\lambda = 0$$

et

$$\begin{aligned} \delta\vec{E} &= \pi^1(\lambda\vec{u} + E_n\vec{n}) + \pi^2(\lambda\vec{v} - H_n\vec{n}), \\ \delta\vec{H} &= \pi^1 \{ \lambda\vec{v} - H_n\vec{n} - (\lambda^2 - 1)\vec{H} \} - \pi^2 \{ \lambda\vec{u} + E_n\vec{n} + (\lambda^2 - 1)\vec{E} \} \end{aligned} \tag{5.2}$$

dépendent de deux paramètres; le système est hyperbolique. On trouve encore :

$$\delta Q = -(\lambda^2 - 1)\{(2Q + k)\pi^1 + R\pi^2\},$$
$$\delta R = -(\lambda^2 - 1)\{R\pi^1 + k\pi^2\}.$$

D'autre part, quel que soit $\mathcal{L}$, la vitesse de la lumière est atteinte dans deux directions [*1*], les valeurs propres

$$\lambda = \pm 1$$

sont doubles, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{n}$ colinéaires, les discontinuités

$$\delta\vec{E} = \pi^1\vec{E} \times \vec{n} + \pi^2\vec{H} \times \vec{n},$$

$$\pm\,\delta\vec{H} = \pi^1(\vec{E} - E_n\vec{n}) + \pi^2(\vec{H} - H_n\vec{n})$$

transversales et

$$\delta Q = \delta R = 0.$$

6. — PERTURBATIONS

Les vecteurs $\vec{V}_i$ étant coplanaires lorsque λ est valeur propre, la solution de (1.2) s'écrit

$$a^1 = \vec{V}(\vec{V}_2 \times \vec{V}_3), \qquad a^2 = \vec{V}(\vec{V}_3 \times \vec{V}_1), \qquad a^3 = \vec{V}(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2),$$

$\vec{V}$ étant un vecteur quelconque (en supposant que les trois vecteurs $\vec{V}_i$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire que les valeurs propres sont simples, ce qui est le cas, sauf pour le lagrangien de Born-Infeld, pour lequel les perturbations ont été déterminées spécialement (5.2)). Choisissant, par exemple, $\vec{V}$ colinéaire à $\vec{v}$ et tenant compte de (2.2), on peut prendre :

$$a^1 = -\pi\lambda A, \quad a^2 = \pi\lambda B, \quad a^3 = -\pi(AE_n + BH_n),$$
$$A = R\eta_Q + (\mu - Q)\eta_R, \ B = (\mu + Q)\eta_Q + R\eta_R + 1, \ \eta = \mathrm{Log}\,|\,\mathcal{L}_Q\,|,$$

tandis que

$$\lambda\delta Q = \vec{u}.\delta\vec{E}, \qquad \lambda\delta R = \vec{v}.\delta\vec{E}$$

donnent

$$\begin{aligned} \delta Q &= -\pi(\lambda^2 - 1)\{R - (\mu^2 - Q^2 - R^2)\eta_R\}, \\ \delta R &= -\pi(\lambda^2 - 1)\{\mu - Q + (\mu^2 - Q^2 - R^2)\eta_Q\}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ces expressions restent valables tant que les a^i ne sont pas nuls simultanément.

7. — LAGRANGIENS EXCEPTIONNELS

Ce sont ceux qui donnent naissance à des systèmes d'équations du champ complètement exceptionnels. Aucun choc (non linéaire) n'apparaît alors sur le front d'onde. Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir [*1*]

$$\delta\lambda \equiv 0$$

pour toutes les valeurs propres, soit, d'après (2.2) :

$$\lambda^2\delta a + 2\lambda\delta b + \delta c + (\lambda^2 - 1)\delta\mu \equiv 0.$$

Cependant [*1*]

$$\lambda^2\delta a + 2\lambda\delta b + \delta c \equiv -(\lambda^2 - 1)\delta Q;$$

posant

$$\zeta = \mu - Q,$$

il vient simplement

$$\delta\zeta = 0$$

ou

$$\zeta_Q\,\delta Q + \zeta_R\,\delta R = 0. \tag{7.1}$$

En particulier (5.1) montre que le lagrangien de Born-Infeld satisfait cette équation.

En vertu de (6.1), (7.1) les lagrangiens exceptionnels vérifieront :

$$\zeta_Q\{R - (\zeta^2 + 2Q\zeta - R^2)\eta_R\} + \zeta_R\{\zeta + (\zeta^2 + 2Q\zeta - R^2)\eta_Q\} = 0. \tag{7.2}$$

En faisant apparaître le jacobien

$$\mathcal{J} = \zeta_Q\,\eta_R - \zeta_R\,\eta_Q\,,$$

(7.2) devient

$$(\zeta^2 + 2Q\zeta - R^2)\mathfrak{J} = R\zeta_Q + \zeta\zeta_R\,. \tag{7.3}$$

1° $\mathfrak{J} = 0$.

On trouve immédiatement

$$\zeta = k = \text{cte} \tag{7.4}$$

qui est la seule possibilité (On montre, en effet, que les solutions du système

$$R\zeta_Q + \zeta\zeta_R = 0,$$
$$R\eta_Q + \zeta\eta_R = 0,$$

entrent également dans cette catégorie).

2° $\mathfrak{J} \neq 0$.

Alors

$$\zeta_Q = \mathfrak{J}R_\eta, \qquad \zeta_R = -\,\mathfrak{J}Q_\eta,$$

(7.3) se transforme selon

$$\zeta^2 + 2Q\zeta - R^2 = -\frac{1}{2}(\zeta^2 + 2Q\zeta - R^2)_\eta$$

et s'intègre en donnant

$$L_Q^2(\zeta^2 + 2Q\zeta - R^2) = \text{fonct}\ (\zeta) \tag{7.5}$$

où le second membre représente une fonction arbitraire — mais positive d'après (3.2) — de l'argument ζ.

Les lagrangiens exceptionnels seront solutions de l'un des cinq systèmes formés par l'association de deux équations du type (2.3), (7.4) et (7.5). Ils ont été déterminés, au moins implicitement, dépendent au plus de quatre constantes et se réduisent, en règle générale, au lagrangien de Born-Infeld quand une de leurs constantes s'annule [*3*]. Mentionnons seulement ici trois formes explicites sans préjuger de leur intérêt physique :

$$\mathfrak{L} = f(Q, R\,;\,k) = \sqrt{-R^2 + k(2Q + k)}, \qquad \zeta_1 = \zeta_2 = k,$$

est déjà connu;

$$\mathfrak{L} = \sqrt{f^2 + hk}, \qquad \zeta_1 = k, \qquad \zeta_2 = k + h\,;$$

$$\mathfrak{L} = \sqrt{f^2 + h(R + a)^2}, \qquad \zeta_1 = k, \qquad \zeta_2 = k + \frac{h(a^2 + k^2)}{k(1 - h)}\,;$$

$$\mathfrak{L} = f(Q, R\,;k) + h\sqrt{2k(Q+k+f)}, \quad \zeta_1 = k, \quad \zeta_2 = k + \frac{hf}{h + \sqrt{2(Q+k+f)/k}}.$$

(a, h, k sont des constantes).

Enfin, l'écriture tensorielle a permis d'étudier commodément les rayons d'onde (trajectoires de particules) et a fourni l'interprétation physique de la quantité $\sqrt{\zeta}$ (champ électrique interne de ces particules) [*3*].

REMERCIEMENTS

Nous exprimons notre gratitude à M. André Lichnerowicz. Nous sommes reconnaissant à M. Jean-Louis Destouches, Mme Y. Choquet ainsi qu'à M. E. Blanc et Mme F. Hennequin.

RÉFÉRENCES

[*1*] G. Boillat, *La propagation des ondes*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.
[*2*] M. Born et L. Infeld, *Proc. Roy. Soc. London*, série A, t. 144, 1934, p. 425.
[*3*] G. Boillat, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 5477; t. 262, série A, 1966, pp. 539, 884, 1285, 1364.

Manuscrit reçu le 18 avril 1966.