ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PHILIPPE DROZ-VINCENT

Transformations infinitésimales et crochets de Poisson des deux types

Annales de l'I. H. P., section A, tome 5, n° 3 (1966), p. 257-271
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__5_3_257_0>

© Gauthier-Villars, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. V, n° 3, 1966, p. 257-271. *Physique théorique.*

Transformations infinitésimales et crochets de Poisson des deux types

par

Philippe DROZ-VINCENT
(Laboratoire de Physique théorique,
Institut Henri Poincaré).

SOMMAIRE. — Partant de la notion fondamentale de transformation infinitésimale locale, cet article s'intéresse plus spécialement aux transformations qui, en un sens généralisé, admettent une fonction génératrice.

On considère aussi bien les commutateurs et les anticommutateurs de ces transformations, non seulement pour retrouver le crochet de Poisson antisymétrique bien connu, mais surtout pour mettre en évidence son analogue symétrique. Ce « crochet de Poisson symétrique » se trouve engendré par un anticommutateur.

En vue d'être capable de traiter sur le même pied commutateurs et anticommutateurs, il est nécessaire de faire une restriction parmi les transformations infinitésimales. Une algèbre de transformations est ainsi définie.

On étudie pour ses propriétés algébriques l'application qui, aux fonctions génératrices, fait correspondre les transformations infinitésimales.

Comme application à la mécanique, on donne une nouvelle version des équations hamiltoniennes du mouvement, formulée avec des crochets symétriques.

Finalement, l'alternative permettant de construire aussi bien le crochet de Poisson que sa généralisation symétrique prend l'aspect d'une conséquence de l'apparition de structures presque complexes en dynamique analytique.

ABSTRACT. — Starting from the basic notion of local infinitesimal transformation, this paper is rather concerned with the transformations which, in a generalized sense, possess a generating function.

Both commutators and anticommutators of these transformations are considered, in order not only to restate the well known antisymmetric Poisson bracket, but more specially to exhibit a symmetric counterpart of it.

This « symmetric Poisson bracket » occurs to be generated by an anticommutator. In view of being able to treat commutators and anticommutators on the same footing, it is necessary to make a restriction among infinitesimal transformations. Thus an algebra of transformations is defined.

The mapping which relates the generating functions to infinitesimal transformations is studied for its algebraic properties.

As an application to mechanics, a new version of the hamiltonian equations of motion is given, involving symmetric brackets.

Finally, the alternative possibility of constructing both the usual Poisson bracket and its symmetric generalization is shown to result from the occurrence of almost complex structures in analytic dynamics.

INTRODUCTION

L'analogie entre commutateurs et crochets de Poisson est trop souvent traitée par les physiciens comme quelque chose d'assez vague qui donne une recette magique de quantification.

Pourtant cet usage empirique du Principe de Correspondance peut et doit être justifié par des développements mathématiques plus précis.

Différents travaux ont été effectués dans ce sens. La considération de transformations infinitésimales permet alors de rattacher le crochet de Poisson à des notions algébriques. Finalement tout s'éclaircit assez bien du point de vue mathématique lorsqu'on introduit l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux symplectiques d'une variété V_{2n} [*1*].

Bien que ces justifications perdent beaucoup de leur rigueur lorsqu'on les étend à des systèmes à un nombre infini de degrés de liberté [*2*], le formalisme canonique n'en reste pas moins le guide le plus naturel et le plus largement invoqué pour la quantification des champs.

Malheureusement, la théorie des champs associés aux fermions exige une quantification par *anticommutateurs.*

Or, le crochet de Poisson classique, étant antisymétrique par rapport aux variables dynamiques qui y figurent, conduit seulement à des relations de *commutation.* D'où le besoin de trouver un objet *symétrique* analogue au crochet de Poisson.

Le travail exposé ici met en évidence, sous réserve d'hypothèses très générales, l'existence et la construction explicite d'un analogue symétrique du crochet de Poisson, avec des propriétés algébriques le rattachant à un anticommutateur. Par esprit d'unité on étendra à ce nouvel objet le terme de crochet de Poisson et on s'efforcera de traiter de façon simultanée et comparée le crochet classique et le nouveau.

Le parallélisme entre les aspects symétrique et antisymétrique sera systématisé. En particulier on retrouvera au § 8 les équations canoniques hamiltoniennes classiques en même temps que les formules équivalentes écrites au moyen du crochet symétrique.

Dans le formalisme symétrique, la notion d'anneau spécial de Jordan semble être la contrepartie de celle d'algèbre de Lie.

Toutefois, il faut faire, sur les transformations infinitésimales qui permettent d'engendrer le crochet symétrique, une restriction importante qui n'est pas du tout nécessaire à propos du crochet antisymétrique habituel.

Enfin, il faut noter que l'introduction en Mécanique analytique d'un crochet de Poisson symétrique est permise essentiellement par l'existence d'un espace des phases doué d'une structure géométrique plus riche que celle qu'on lui prête usuellement.

1. — CADRE GÉOMÉTRIQUE. NOTATIONS

On considère une variété différentiable V_m de classe C^∞ ; de dimension m. En tout point x on introduit l'espace tangent complexifié $T_m(x)$.

Les coordonnées locales sont notées x^I, $I = 1, 2, \ldots, m$.

La conjugaison complexe des nombres est indiquée par $*$, tandis que τ désigne la conjugaison complexe des tenseurs.

Dans le cas, assez spécial, où $m = 2n$ et où V_{2n} est munie d'une structure presque complexe on peut envisager des repères complexes. Lorsqu'il s'agit d'une structure analytique complexe on peut même utiliser des coordonnées complexes.

Elles sont alors notées z^I et vérifient

$$z^{I*} = z^{\underline{I}} \qquad \text{avec} \qquad i, j = 1, \ldots n \quad \underline{i}, \underline{j} = n, \ldots m \quad \underline{\underline{i}} = i$$

La plupart des calculs étant valables aussi bien en coordonnées réelles que (s'il y a lieu) complexes, on emploiera y^I quand on voudra éviter de spécifier si la variété V_m admet ou non une structure analytique complexe et si les coordonnées sont complexes ou réelles.

Le symbole ∂_I sera une abréviation de $\partial/\partial y^I$.

Il n'est pas inutile d'écrire dès maintenant l'identité

$$\partial_{I}A^{*} = \tau\partial_{I}^{*}A \tag{1}$$

valable pour toute fonction de point $A(x)$, obtenue en égalant dA^{*} et $(dA)^{*}$.

2. — TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES

On sait qu'un champ de vecteurs (défini sur un ouvert U de V_m) définit une transformation infinitésimale locale des fonctions de point à valeurs dans C.

Alors qu'une telle transformation est du premier ordre par rapport aux dérivées de la fonction $f(x)$ considérée, le produit de deux de ces transformations est en général du second ordre différentiel.

Cet inconvénient s'élimine lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux commutateurs des transformations, mais on se propose ici une plus grande généralité algébrique.

Pour se ramener au premier ordre différentiel, on est donc conduit à se limiter aux fonctions $f(x)$ telles que

$$D_{I}D_{J}f = 0 \tag{2}$$

les dérivées covariantes D_I étant prises dans une certaine connexion Γ supposée donnée.

Pour des raisons de fermeture algébrique on fera jouer un rôle particulier aux champs de vecteurs A^I tels que

$$D_{I}D_{J}A^{K} = 0 \tag{3}$$

N. B. — Lorsque Γ est une connexion plate, les conditions (2) et (3) imposent simplement à f et A^I d'être au plus linéaires par rapport aux coordonnées qui annulent les coefficients de Γ.

Définition. — Les transformations infinitésimales locales vérifiant (3) et astreintes à n'opérer que sur des fonctions vérifiant (2) seront dites *transformations infinitésimales restreintes* (t. i. r.).

Cette notion est manifestement relative au choix préalable d'une connexion. Lorsque V_m possède une structure riemannienne ou kählérienne il y a automatiquement une connexion riemannienne privilégiée.

THÉORÈME. — Soit $\mathfrak{T}$ l'ensemble des t. i. r. définies sur un ouvert U de V_m. $\mathfrak{T}$ est une algèbre sur C.

En effet, la seule chose non triviale à montrer est que, si $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{C}$ alors $AB \in \mathcal{C}$. Posons $C = AB$.

$$C^I = (AB)^I = A^K D_K B^I$$

Comme les B^I vérifient la condition (3), $D_J C^K$ se réduit à $D_J A^L D_L B^K$, donc

$$D_I D_J C^K = D_I D_J A^L D_L B^K + D_J A^L D_I D_L B^K = 0$$

et C vérifie (3).

3. — TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES ET CONJUGAISON COMPLEXE

Étant donné un champ $a^I(x)$ on connaît pour tout x le vecteur τa^I, ce qui définit de façon triviale le champ conjugué.

Si f est une fonction de x à valeurs dans C

$$\tau(af) = \tau a f^* \tag{4}$$

Si a et b sont des t. i. r.

$$\tau(abf) = \tau(a(bf)) = \tau a \tau(bf) = \tau a \tau b f^*$$

Par ailleurs

$$\tau(abf) = \tau((ab)f) = \tau(ab) f^*$$

Donc

$$\tau(ab) = \tau a \tau b \tag{5}$$

Ainsi, bien que

$$\tau^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \tau(\lambda a) = \lambda^* \tau a$$

τ *n'est pas une adjonction.* Il aurait fallu pour cela avoir $\tau(ab) = \tau(b)\tau(a)$ ce qui est impossible, $\mathcal{C}$ n'étant pas une algèbre commutative.

4. — GÉNÉRATION DE TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES

Étant donné un tenseur contravariant M (sans symétrie *a priori*) on dira que A^I *est engendré par la fonction* $A(x)$ *selon* M, lorsqu'il existe $A(x)$ telle que

$$A^I = D_J(M^{IJ} A) \tag{6}$$

N. B. — Dans le cas particulier où M est antisymétrique et si l'on dispose d'un élément de volume, cette notion peut être rendue indépendante de la connexion en utilisant des densités tensorielles au lieu de tenseurs.

Pour simplifier la suite on supposera toujours que M est à dérivée covariante nulle dans Γ :

$$\mathrm{DM} = 0 \tag{7}$$

Cette hypothèse n'est pas du tout aussi restrictive qu'il semblerait à première vue, car, jusqu'ici le choix de la connexion avait été laissé arbitraire. D'après (7) on aura

$$\mathrm{D_K D_L A^I} = \mathrm{M^{IJ} D_K D_L D_J A}$$

La condition

$$\mathrm{D_K D_L D_J A} = 0 \tag{8}$$

est suffisante pour que A engendre un élément de $\mathcal{C}$. Quand det M $\neq 0$, cette condition (8) est également nécessaire.

Enfin, on voit que dans le cas d'une connexion plate (8) impose simplement à A d'être au plus quadratique par rapport aux coordonnées qui annulent les coefficients de connexion.

Hypothèse de symétrie. — Dans la suite on supposera que M est soit symétrique, soit antisymétrique ($\pm$ symétrique), c'est-à-dire en notant $\sim$ la transposition ($\widetilde{\mathrm{M}}^{\mathrm{KL}} = \mathrm{M^{LK}}$)

$$\widetilde{\mathrm{M}} = \pm\,\mathrm{M} \tag{9}$$

Si alors on se sert de M pour élever les indices, il vient quels que soient $\mathrm{U_K}$ et $\mathrm{V_I}$ l'identité

$$\mathrm{U^K V_K} = \pm\,\mathrm{U_K V^K} \tag{10}$$

Enfin, il résulte de (7) qu'élévation d'indice et dérivation D sont des opérations permutables.

Étant donné deux transformations infinitésimales a et b on posera

$$[a, b]_\pm = ab \pm ba$$

Cette expression peut être appelée le $\pm$ commutateur (anticommutateur ou commutateur selon qu'on choisit le signe $+$ ou $-$).

On conviendra de prendre toujours le même signe que dans (9).

De plus, dans tout ce qui suit Γ est supposée symétrique (torsion nulle).

THÉORÈME DU CROCHET DE POISSON. — *Si* A *et* B *engendrent respectivement les t. i. r. a et b, alors la transformation* $[a, b]_{\pm}$ *est engendrée par* $D^K A D_K B$.

Ce résultat est classique lorsqu'on prend le signe —. Il définit alors le crochet de Poisson $\{A, B\} = D^K A D_K B$.

Par extension nous emploierons ce terme aussi dans le cas du signe +. On posera

$$D^K A D_K B = \{A, M, B\} \tag{11}$$

ou encore $\{A, B\}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

Démonstration. — On pose

$$D^I = M^{IJ} D_J$$

Alors A engendre

$$D^I A = a^I$$

B engendre

$$D^J B = b^J$$

$$(ab)^J = a^K D_K b^J = D^K A D_K D^J B$$

Mais comme Γ est symétrique

$$D_K D^J B = M^{JI} D_K D_I B = M^{JI} D_I D_K B = D^J D_K B$$

$$(ab)^J = D^K A D^J D_K B$$

de même

$$(ba)^J = D^K B D^J D_K A$$

$$([a, b]_{\pm})^J = D^K A D^J D_K B \pm D^K B D^J D_K A$$

Mais il convient de remarquer

$$D^K B D^J D_K A = \pm D_K B D^J D^K A$$

Donc

$$(ab \pm ba)^J = D^K A D^J D_K B + D_K B D^J D^K A$$

soit

$$(ab \pm ba)^J = D^J (D^K A D_K B)$$

qui met en évidence la fonction génératrice $D^K A D_K B$.

Remarque. — L'algèbre $\mathcal{T}$ étant stable par produit, l'est *a fortiori* aussi par anticommutateur ou par commutateur.

Enfin, de $\mathcal{T}$ on peut extraire soit l'algèbre de Lie déduite des $ab - ba$, soit l'anneau spécial de Jordan déterminé par les $ab + ba$, où a et b parcourent $\mathcal{T}$.

Il est clair que lorsque V_m est l'espace des phases d'un problème régulier de Mécanique analytique on est conduit à prendre pour M le tenseur réciproque de la *2.forme canonique* usuelle qui donne à V sa structure de variété symplectique. Un choix convenable de Γ doit alors annuler DM.

Toutefois, quand l'espace de configuration possède une métrique riemannienne, l'espace des phases est muni d'une structure de *variété presque kählérienne* (Ce point a été établi par Ph. Tondeur [5]).

On pourrait alors choisir pour M non plus le tenseur antisymétrique indiqué plus haut, mais *aussi bien* l'inverse du tenseur métrique de V_m, c'est-à-dire maintenant un *tenseur symétrique* (On sait qu'une structure presque kälhérienne contient simultanément une 2.forme fermée et une métrique riemannienne). L'alternative correspond physiquement au choix entre une quantification par commutateurs ou une quantification par anticommutateurs. Il est curieux de la voir apparaître au niveau de la mécanique ponctuelle.

5. — PROPRIÉTÉS DU CROCHET DE POISSON

Les symétries sont manifestes et, dans le cas antisymétrique on a l'identité de Jacobi.

Par rapport à M la linéarité est évidente. De plus

$$\{B, M, A\} = \{A, \tilde{M}, B\} \tag{12}$$

Enfin, si quels que soient A et B générateurs de t. i. r., on a

$$\{A, M, B\} = \{A, N, B\}$$

alors naturellement $M = N$.

En ce qui concerne le comportement sous la conjugaison complexe, on trouve en coordonnées réelles

$$\begin{aligned}
\{A, B\} &= M^{KJ}\partial_J A \partial_K B \\
\{A, B\}^* &= M^{KJ*}(\partial_J A)^*(\partial_K B)^* \\
\{A, B\}^* &= M^{KJ*}\partial_J A^* \partial_K B^* = (\tau M)^{KJ}\partial_J A^* \partial_K B^*
\end{aligned}$$

D'où la formule

$$\{A, M, B\}^* = \{A^*, \tau M, B^*\} \tag{13}$$

indépendante des coordonnées.

6. — L'APPLICATION $\Phi(M, A)$

On appelle Φ_M l'application qui fait correspondre à toute fonction $A(x)$ la transformation infinitésimale a^I engendrée par A selon M.

D'où, en introduisant les vecteurs de base e_I, le schéma :

(14) $$A(x) \xrightarrow{\Phi_M} a^I e_I = \Phi(M, A)$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on se dispense d'écrire M. La « génération » $\Phi(M, A)$ est linéaire aussi bien par rapport à M que par rapport à A.

Comportement sous conjugaison complexe. — En utilisant des coordonnées réelles

$$e_I^* = e_I, \qquad \tau\Phi(M, A) = a^{I*} e_I$$

Comme DM est nul

$$a^I = M^{IJ}\partial_J A, \qquad a^{I*} = M^{IJ*}\partial_J A^*$$

D'où, indépendamment des coordonnées,

(15) $$\tau\Phi(M, A) = \Phi(\tau M, A^*)$$

Incompatibilité avec le produit des t. i. r. — Généralement

$$\Phi(A)\Phi(B) \neq \Phi(AB)$$

D'ailleurs si $\Phi(A)$ et $\Phi(B)$ sont des t. i. r. leur produit l'est aussi, mais $\Phi(AB)$ n'est généralement pas une t. i. r.

Compatibilité avec le $\pm$ commutateur. — Supposant toujours $\widetilde{M} = \pm M$, le théorème du crochet de Poisson s'écrit

(16) $$[\Phi(A), \Phi(B)]_\pm = \Phi(\{A, B\})$$

pourvu que $\Phi(A)$ et $\Phi(B) \in \mathcal{T}$.

7. — REPRÉSENTATION DE LA CONJUGAISON COMPLEXE

Sur l'ensemble des transformations infinitésimales locales admettant un générateur, définissons l'opération θ comme l'image de $*$ par Φ_M, c'est-à-dire

(17) $$\theta\Phi(M, A) = \Phi(M, A^*)$$

Alors que * est une adjonction sur l'ensemble des générateurs muni de la multiplication usuelle (commutative) des fonctions, θ n'est pas une adjonction. D'ailleurs θ n'est définie par (17) que pour les transformations admettant un générateur et en général le produit $\Phi(A)\Phi(B)$ n'admet pas de générateurs. Cependant, il est intéressant de chercher :

i) Dans quel cas θ (lorsqu'il existe) coïncide avec τ (τ est défini pour toute transformation infinitésimale, sans restriction) ou $-\tau$.

ii) Dans quels cas θ, ou τ, ou $-\tau$, possèdent les propriétés d'une adjonction restreinte au $\pm$ commutateur, c'est-à-dire respectivement

$$\theta[\Phi(A), \Phi(B)] = [\theta\Phi(B), \theta\Phi(A)] \tag{18}$$

ou bien

$$\tau[\Phi(A), \Phi(B)] = [\tau\Phi(B), \tau\Phi(A)] \tag{19}$$

ou encore

$$-\tau[\Phi(A), \Phi(B)] = [\tau\Phi(B), \tau\Phi(A)] \tag{19'}$$

suivant qu'il s'agit de θ, τ ou $-\tau$.

Pour résoudre ce problème, explicitons θ à partir de (17), en coordonnées réelles

$$\Phi(M, A^*) = M^{IJ}\partial_J A^* e_I = (M^{IJ*}\partial_J A)^* e_I$$

Mais

$$M^{IJ*}\partial_J A e_I = \Phi(\tau M, A)$$

Donc, quelles que soient les coordonnées

$$\Phi(M, A^*) = \tau\Phi(\tau M, A)$$

c'est-à-dire

$$\theta\Phi(M, A) = \tau\Phi(\tau M, A) \tag{20}$$

Par conséquent :

7.1 θ coïncide avec τ si et seulement si $\tau M = M$
θ coïncide avec $-\tau$ si et seulement si $\tau M = -M$

(ceci n'ayant un sens que pour les transformations admettant un générateur).

Cherchons maintenant la condition pour que (18) soit vérifiée. On sait que

$$\{A, B\} \overset{\Phi}{\rightarrow} [\Phi(A), \Phi(B)]$$

donc

$$\{A, B\}^* \overset{\Phi}{\rightarrow} \theta[\Phi(A), \Phi(B)]$$

D'autre part

$$A^* \overset{\Phi}{\rightarrow} \theta\Phi(A)$$

$$B^* \overset{\Phi}{\rightarrow} \theta\Phi(B)$$

Il en résulte

$$\{B^*, A^*\} \overset{\Phi}{\rightarrow} [\theta\Phi(B), \theta\Phi(A)]$$

La condition (18) se réduit à

$$\Phi(\{A, B\}^*) = \Phi(\{B^*, A^*\})$$

Et d'après (13) et (12)

$$\{A^*, \tau M, B^*\} = \{B^*, M, A^*\} = \{A^*, \widetilde{M}, B^*\}$$

ceci quels que soient les générateurs.

Donc la condition cherchée s'écrit

(21) $$M = \tau\widetilde{M}.$$

7.2. — La condition nécessaire et suffisante pour que θ se comporte comme une adjonction à l'égard du $\pm$ commutateur est une condition d'hermiticité sur M.

D'autre part, on sait, d'après (5), que si a et $b \in \mathcal{C}$

$$\tau[a, b] = \tau a \tau b \pm \tau b \tau a$$

c'est-à-dire

(22) $$\tau[a, b] = [\tau a, \tau b]$$

Par conséquent (19) est vérifiée par τ lorsque M est symétrique. Au contraire, lorsque M est antisymétrique, (19′) est vérifiée par $-\tau$. Soit :

7.3. — $\pm\,\tau$ se comporte comme une adjonction à l'égard du $\pm$ commutateur si et seulement si $\widetilde{M} = \pm M$.

En confrontant les résultats 7.1, 7.2, 7.3, on voit que dans le cas intéressant où θ se comporte comme une adjonction (devant le $\pm$ commutateur), θ coïncide avec τ (resp. $-\tau$) quand M est réel symétrique (resp. imaginaire pur antisymétrique).

En mécanique analytique l'écriture des équations d'évolution du système fournit généralement un tenseur antisymétrique réel ε (2.forme fondamentale de l'espace des phases). Le crochet de Poisson classique est le crochet $\{A, B\} = \{A, \varepsilon, B\}$ défini selon ε.

Mais ε n'étant pas hermitien il est naturel d'introduire $\varepsilon' = i\varepsilon$ qui l'est. Aux fonctions A et B il correspond par Φ les transformations infinitésimales

$$a = \Phi(\varepsilon, \mathrm{A}) \qquad \text{et} \quad b = \Phi(\varepsilon, \mathrm{B})$$

et par $\Phi' = \Phi\varepsilon'$

$$a' = \Phi(\varepsilon', \mathrm{A}) = ia \quad \text{et} \quad b' = \Phi(\varepsilon', \mathrm{B}) = ib$$

Mais l'application Φ' est privilégiée par rapport à Φ en ce sens que l'image θ' de $*$ par Φ' est équivalente à une adjonction sur $\mathcal{C}$ devant le commutateur.

De plus, il existe entre Φ' et le crochet classique de Poisson une relation simple :

Considérons les commutateurs

$$[a', b']_- = [ia, ib]_- = -[a, b]_-.$$

En vertu du théorème du crochet de Poisson l'on peut dire que $[a, b]_-$ est l'image par Φ du crochet $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$. Alors

$$[a', b']_- = -\Phi(\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}) = -\frac{1}{i}\Phi'(\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\})$$

Soit, plus explicitement,

$$[\Phi'(\mathrm{A}), \Phi'(\mathrm{B})]_- = i\Phi'(\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}). \tag{23}$$

Cette formule met en évidence le facteur i du procédé de quantification canonique. L'application Φ' apparaît étroitement analogue à la correspondance qui introduit d'habitude les opérateurs quantiques.

8. — LE CROCHET DE POISSON DANS LES ÉQUATIONS HAMILTONIENNES

Considérons, dans une variété symplectique V_{2n} les solutions (γ) du système différentiel

$$dx^{\mathrm{I}}/dt \equiv = \dot{x}^{\mathrm{I}} = \varepsilon^{\mathrm{IJ}}\partial_{\mathrm{J}}\mathrm{H} \tag{24}$$

où t est un paramètre, $\mathrm{H}(x)$ une certaine fonction de point à valeurs réelles, ε le tenseur réciproque de la 2.forme fermée F qui détermine sur V la structure symplectique.

Une telle situation se rencontre dans tout problème régulier de Mécanique analytique. Les courbes (γ) sont alors les trajectoires du système dans son espace des phases, H est l'hamiltonien, t représente le temps.

Le crochet de Poisson $\{ A, \varepsilon, B \}$ étant ici noté $\{ A, B \}_-$, on peut évaluer les $\{ x^I, H \}_-$ en considérant les quantités x^I comme $2n$ fonctions de point (Pour rester dans le cadre qu'on s'est fixé au début de ce travail il faudrait se restreindre au cas où H engendre des t. i. r. En fait, cette précaution n'est pas nécessaire tant qu'on ne manipule que des *commutateurs* de transformations infinitésimales, c'est-à-dire tant que le crochet de Poisson est défini selon un tenseur *anti*symétrique. C'est pourquoi on ne trouve pas cette réserve dans la littérature).

Un calcul immédiat donne

$$\{ x^I, H \}_- = - \varepsilon^{IJ} \partial_J H$$

ce qui permet d'écrire (24) sous la forme canonique hamiltonienne bien connue :

$$\dot{x}^I + \{ x^I, H \}_- = 0 \tag{25}$$

Dans le cas où V est une variété *presque kählérienne* on dispose d'autres éléments géométriques que la 2.forme F.

En plus de la 2.forme fondamentale F, est donnée une métrique riemannienne G *échangeable* avec elle, c'est-à-dire que l'on a

$$\varepsilon G \varepsilon = - G^{-1} \tag{26}$$

si G^{-1} est le tenseur réciproque de G.

La structure considérée est subordonnée à la structure *presque complexe* déterminée par le produit

$$\mathfrak{J} = \varepsilon G.$$

En introduisant $\mathfrak{J}$ dans (26) il vient entre les trois éléments géométriques fondamentaux

$$\mathfrak{J} \varepsilon = - G^{-1}$$

soit, en notant G^{IJ} les composantes de G^{-1}

$$\mathfrak{J}^I{}_K \varepsilon^{KJ} = - G^{IJ} \tag{27}$$

L'apparition d'un tenseur symétrique suggère assez naturellement de construire une variante de (25) en utilisant maintenant le crochet de Poisson selon G autrement dit

$$\{ A, B \}_+ = \{ A, G^{-1}, B \}. \tag{28}$$

On va voir plus loin que $\mathfrak{J}$ joue un rôle dans cette nouvelle formulation. Pour l'instant notons que l'usage du crochet (28) est pleinement justifié du point de vue des applications à la Mécanique analytique.

En effet, il résulte d'un théorème de Ph. Tondeur que si l'espace de configuration d'un problème de Mécanique analytique régulier possède une métrique riemannienne g, alors l'espace des phases est doué d'une structure de variété presque kählérienne canoniquement associée (La métrique g induisant une métrique $2n$.dimensionnelle G échangeable avec la 2.forme symplectique).

Ainsi l'hypothèse presque kälhérienne correspond à des situations dynamiques très naturelles.

Par analogie avec la méthode qui a permis d'établir (25), on est conduit à calculer $\{ x^{\mathrm{I}}, \mathrm{H} \}_{+}$ ce qui implique une restriction sur H afin que la transformation infinitésimale que H engendre selon G soit une t. i. r. Cette restriction s'écrit simplement

$$\nabla_{\mathrm{I}} \nabla_{\mathrm{J}} \nabla_{\mathrm{K}} \mathrm{H} = 0 \tag{29}$$

en utilisant la connexion riemannienne associée à G. Le calcul donne

$$\{ x^{\mathrm{I}}, \mathrm{H} \}_{+} = \{ x^{\mathrm{I}}, \mathrm{G}^{-1}, \mathrm{H} \} = \mathrm{G}^{\mathrm{IK}} \partial_{\mathrm{K}} \mathrm{H}$$

soit, d'après (27)

$$\{ x^{\mathrm{I}}, \mathrm{H} \}_{+} = - \mathfrak{J}^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{J}} \varepsilon^{\mathrm{JK}} \partial_{\mathrm{K}} \mathrm{H}$$

Ainsi apparaît le second membre des équations (24). Alors (24) prendra la forme

$$\mathfrak{J}^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{J}} \dot{x}^{\mathrm{J}} + \{ x^{\mathrm{I}}, \mathrm{H} \}_{+} = 0 \tag{30}$$

qui est la contrepartie symétrique de (25).

Mais, encore une fois, l'expression ici entre crochets ne représente un crochet de Poisson selon la définition du § 4 que si H vérifie (29).

A cette réserve près, on peut dire qu'il existe une double possibilité de mettre (24) sous forme canonique dès que V_{2n} est à structure presque kählérienne (comme c'est le plus souvent le cas en Mécanique analytique).

Cette situation évoque de façon assez frappante l'alternative entre quantification par commutateurs et quantification par anticommutateurs, que l'on rencontre habituellement en théorie des champs (et qui correspond au choix entre bosons et fermions).

On voit clairement maintenant qu'un système à n degrés de liberté peut très bien présenter la même alternative.