ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

G. C. MCVITTIE

Le décalage vers le rouge et la vitesse de récession

Annales de l'I. H. P., section A, tome 5, nº 4 (1966), p. 273-280
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__5_4_273_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. V, n° 4, 1966, p. 273-280.

Section A :
Physique théorique.

Le décalage vers le rouge et la vitesse de récession

par

G. C. McVITTIE
University of Illinois Observatory, Urbana, Illinois, U. S. A.

ABSTRACT. — It is shown that the formula connecting red-shift and velocity of recession in special relativity can be used in any model of the universe provided that the distance of the object and the time of emission of the radiation by which the object is seen are suitably defined. The theory is worked out in detail in the Einstein-de Sitter universe and in the de Sitter universe.

Les astronomes qui ne sont pas spécialistes en cosmologie, les journalistes, etc., demandent souvent : Si le décalage vers le rouge d'une galaxie est z combien vaut la vitesse de récession de cette galaxie ?

Si on répond en disant la vérité, c'est-à-dire : « Cela dépend de ce que vous appelez distance et de la manière dont vous définissez le mot « vitesse » », l'interrogateur n'est pas satisfait et, en effet, croit qu'on se moque de lui.

Les observateurs pour la plupart convertissent les z en vitesses V par la formule Doppler de la relativité spéciale. Mais on n'arrive pas par ce procédé à une définition de la distance dont le taux de variation avec le temps serait cette vitesse. Je voudrais présenter une solution plutôt incomplète de ce problème.

La métrique d'un modèle quelconque de l'univers est

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\{ dr^2 + \mathcal{S}_K^2(r) d\Omega^2 \}/c^2, \tag{1}$$

où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2,$$
$$\mathcal{S}_{+1} = \sin r, \qquad \mathcal{S}_0 = r, \qquad \mathcal{S}_{-1} = \sinh r.$$

Le décalage vers le rouge est donné par

$$1 + z = R(t_0)/R(t_e) = R_0/R_e, \tag{2}$$

où t_e, t_0 sont les instants d'émission par la source, et l'instant de réception par l'observateur, respectivement, de la radiation. Cette formule implique que les coordonnées (r, θ, Φ) de la source sont des constantes et que l'observateur est toujours à la position $r = 0$. Les lignes d'univers de la source et de l'observateur sont des géodésiques le long desquelles le temps propre (s) est égale au temps coordonné (t).

MODÈLE DE MILNE

On peut établir la formule de Doppler de la relativité spéciale de la façon suivante. Le modèle de Milne a la métrique de la relativité spéciale mais écrite en coordonnées non inertiales. En effet, le modèle est défini par

$$R(t) = ct, \qquad k = -1, \qquad \mathcal{S}_{-1} = \sinh r.$$

L'observateur à $r = 0$, au moment t_0, envoie un faisceau de radiation vers la source S. La radiation suit une géodésique nulle O'S et arrive à S au moment t_e. A son arrivée à S, la radiation est immédiatement réfléchie vers O. Celui-ci reçoit le signal de retour au moment t_0. Suivant Milne, l'observateur pourrait définir le moment de l'arrivée du signal à S par

$$T = \frac{1}{2}(t_0 + t_0'),$$

et la distance entre l'observateur et S par

$$u = \frac{c}{2}(t_0 - t_0').$$

Ces définitions remontent à définir la distance par la formule ordinaire du radar, et, en même temps, à remplacer l'instant t_e par T. L'observateur répète l'expérience en commençant au moment $t_0' + dt_0'$ et il résulte que

$$\frac{du}{dT} = c\,\frac{dt_0/dt_0' - 1}{dt_0/dt_0' + 1}.$$

Mais $(t_0', 0)$ et (t_e, r) se trouvent sur la même géodésique nulle O'S. Ainsi on déduit de (1) avec $R = ct$ que

$$\int_{t_0'}^{t_e} \frac{dt}{t} = \int_0^r dr,$$

et par conséquent

$$r = \ln(t_e/t_0').$$

Pour le signal de retour SO

$$r = \ln(t_0/t_e).$$

Donc

$$r^2 = \ln(t_0/t_0') \quad , \quad t_e^2 = t_0' t_0. \tag{3}$$

La coordonnée r de la source est constante. Donc la première des deux formules (3) donne

$$\frac{dt_0}{dt_0'} = \frac{t_0}{t_0'}.$$

Le décalage vers le rouge dans le modèle de Milne est

$$1 + z = t_0/t_e = (t_0/t_0')^{1/2}. \tag{4}$$

On a alors

$$V = \frac{du}{dT} = c\frac{dt_0/dt_0' - 1}{dt_0/dt_0' + 1} = c\frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

dont on déduit

$$1 + z = \left(\frac{1 + V/c}{1 - V/c}\right)^{1/2}, \tag{5}$$

la formule bien connue de Doppler en relativité spéciale.

Il est à remarquer que les définitions de T et de u qu'on a employées peuvent être modifiées en se rapportant à la seconde des deux formules (3). Elles sont

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(t_0 + t_e^2/t_0\right), \\ u &= \frac{c}{2}\left(t_0 - t_e^2/t_0\right) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ce qui montre que T et u sont aussi des fonctions de t_0 et de t_e.

MODÈLE QUELCONQUE

La formule (5) est très commode pour convertir le décalage vers le rouge en vitesse de récession. Elle a le grand mérite qu'une vitesse V égale à c correspond à un décalage z infiniment grand, donc à une source invisible à l'observateur au moment t_0. La question se pose : Est-il possible de définir dans un modèle quelconque une distance u, un temps T et une vitesse

$$V = \frac{du}{dT},$$

tels que V serait lié à z par la formule (5) ?

Rappelons qu'en relativité il n'y a pas de distance absolue et qu'en cosmologie il n'y a qu'un observateur, c'est-à-dire nous-mêmes. On peut admettre que cet observateur unique doit employer le temps propre de sa ligne d'univers. Mais rien n'empêche qu'il puisse assigner aux événements qu'il observe un temps arbitrairement défini. C'est le cas pour le temps T. Bien entendu la définition de T doit entraîner la conséquence que T et le temps propre de l'observateur sont identiques pour les événements situés sur la ligne d'univers de l'observateur.

On se guide par les définitions (6) dans le modèle de Milne et on pose

$$u = u(t_0, t_e) \quad , \quad T = T(t_0, t_e), \tag{7}$$

c'est-à-dire que u et T seront des fonctions encore arbitraires des moments d'émission et de réception. En plus on pose

$$V = \frac{du}{dT}. \tag{8}$$

Donc en se rapportant à (5) et à (2)

$$\frac{V}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} = \frac{R_0^2 - R_e^2}{R_0^2 + R_e^2}. \tag{9}$$

Il vient aussi de (7) et de (8) que V est donné alternativement par

$$V = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial t_0} + \dfrac{\partial u}{\partial t_e}\dfrac{dt_e}{dt_0}}{\dfrac{\partial T}{\partial t_0} + \dfrac{\partial T}{\partial t_e}\dfrac{dt_e}{dt_0}}. \tag{10}$$

Mais par le raisonnement par lequel on établit la formule (2) pour z, (c'est toujours la constance de r qui intervient)

$$\frac{dt_e}{dt_0} = \frac{R_e}{R_0}. \tag{11}$$

Compte rendu de (9), on obtient de (10) et de (11)

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial t_0} + \dfrac{\partial u}{\partial t_e}\dfrac{R_e}{R_0}}{\dfrac{\partial T}{\partial t_0} + \dfrac{\partial T}{\partial t_e}\dfrac{R_e}{R_0}} = c\,\frac{1 - R_e^2/R_0^2}{1 + R_e^2/R_0^2}. \tag{12}$$

C'est la formule de laquelle on doit déduire les fonctions u et T de t_0, t_e. Il est clair que la solution ne peut être unique car il y a deux fonctions contre une seule équation. Mais on réduit le nombre des solutions en posant en premier lieu,

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{c}{\mathrm{H}} z, \text{ quand } z \ll 1, \\ \mathrm{T} &= t_0, \text{ quand } t_e = t_0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

où H est la constante de Hubble ($\mathrm{H} = \dot{\mathrm{R}}_0/\mathrm{R}_0$).

Ainsi on exige que u, comme toutes les autres distances employées en cosmologie, soit proportionnelle à z quand z est petit en comparaison avec l'unité. En second lieu, on posera dans chaque modèle de l'univers des conditions supplémentaires sur u et sur T.

Par exemple, s'il y a un horizon pour l'observateur, c'est-à-dire des sources dont la coordonnée r est finie mais pour lesquelles z est infinie, on pourrait prescrire les valeurs de u et de T à l'horizon. On voudrait aussi demander que, pour deux instants d'émission $(t_e)_1$ et $(t_e)_2$ tels que $(t_e)_2 > (t_e)_1$, les valeurs correspondantes de T devraient aussi satisfaire à $\mathrm{T}_2 > \mathrm{T}_1$. Les temps t et T donc croissent ou décroissent ensemble.

J'avoue que je n'ai pas encore pu résoudre le problème de la solution de (12) en général, c'est-à-dire pour une fonction $\mathrm{R}(t)$ quelconque. Donc je présente deux exemples seulement.

MODÈLE DE EINSTEIN-DE SITTER

La définition du modèle — on écrit aussi $t = x^3$ — est la suivante

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_0(t/t_0)^{2/3} = \mathrm{R}_0(x/x_0)^2, \qquad k = 0, \qquad \mathcal{S}_0 = r.$$

La constante de Hubble est

$$\mathrm{H} = \frac{2}{3}\frac{1}{t_0} = \frac{2}{3}\frac{1}{x_0^3},$$

et le décalage vers le rouge est

$$1 + z = (t_0/t_e)^{2/3} = (x_0/x_e)^2.$$

La formule (12) devient

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_0} + \dfrac{\partial u}{\partial x_e}}{\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_0} + \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_e}} = c\,\frac{1 - (x_e/x_0)^4}{1 + (x_e/x_0)^4}. \tag{14}$$

Posons

$$v = x_e/x_0, \qquad u = \frac{3}{2} x_0^3 \mathrm{F}(v), \qquad \mathrm{T} = x_0^3 f(v), \tag{15}$$

et on obtient de (14)

$$\frac{3\mathrm{F} + (1 - v)d\mathrm{F}/dv}{\frac{2}{3}\{ 3f + (1 - v)df/dv \}} = c\,\frac{1 - v^4}{1 + v^4}.$$

Posons encore arbitrairement

$$3\mathrm{F} + (1 - v)\frac{d\mathrm{F}}{dv} = c(1 - v^4),$$

$$3f + (1 - v)\frac{df}{dv} = \frac{3}{2}(1 + v^4).$$

Donc en écrivant $y = 1 - v$ et en tenant compte de (15), les solutions de ces équations sont

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{3}{2} x_0^3 c \,\{ 2y - 6y^2 - 4y^3 \ln y + \mathrm{A}y^3 + y^4 \}, \\ \mathrm{T} &= x_0^3 \left\{ 1 - 3y + 9y^2 + 6y^3 \ln y + \mathrm{B}y^3 - \frac{3}{2} y^4 \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

où A, B sont les constantes d'intégration.

On constate facilement que $u = (c/\mathrm{H})z$ quand $z \ll 1$, et que $\mathrm{T} = t_0$ quand $t_e = t_0$. Les approximations sont valables pour toutes valeurs de A et de B. On détermine ces constantes en constatant que, pour z infiniment grand,

$$u = \frac{c}{\mathrm{H}}(\mathrm{A} - 3), \qquad \mathrm{T} = t_0\left(\mathrm{B} + \frac{11}{2}\right).$$

Si on choisit $u = c/\mathrm{H}$ et $\mathrm{T} = 0$ pour une source pour laquelle z est infiniment grand, on obtient

$$\mathrm{A} = 4, \qquad \mathrm{B} = -\frac{11}{2}.$$

On calcule alors pour $z = 99$, par exemple, que

$$u = 0{,}82\ (c/\mathrm{H}), \qquad \mathrm{T} = 0{,}09\ (1/\mathrm{H})$$

tandis que, en se rapportant à (9)

$$\frac{\mathrm{V}}{c} = 1 - 2 \times 10^{-4}.$$

MODÈLE DE DE SITTER

La définition du modèle (τ étant une constante) est

$$R = R_0 e^{t/\tau}, \qquad k = 0, \qquad \mathcal{S}_0 = r.$$

La constante de Hubble est $H = 1/\tau$ et le décalage vers le rouge est

$$1 + z = e^{(t_0 - t_e)/\tau}.$$

La formule (12) devient

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial t_0} + \dfrac{\partial u}{\partial t_e} e^{(t_e - t_0)/\tau}}{\dfrac{\partial T}{\partial t_0} + \dfrac{\partial T}{\partial t_e} e^{(t_e - t_0)/\tau}} = c \frac{1 - e^{2(t_e - t_0)/\tau}}{1 + e^{2(t_e - t_0)/\tau}}. \tag{17}$$

La solution la plus simple que j'ai pu trouver est obtenue en posant

$$v = \frac{(t_0 - t_e)}{\tau}, \qquad u = cF(v), \qquad T = \frac{1}{2}(t_0 + t_e). \tag{18}$$

La condition $T = t_0$ quand $t_e = t_0$ est évidemment satisfaite. En portant (18) dans (17) on obtient

$$\frac{dF}{dv} = \frac{\tau}{2} \frac{(1 + e^v)^2}{1 + e^{2v}},$$

dont il vient

$$u = cF = c\tau\left(A + \frac{1}{2} v + \arctan e^v\right),$$

A étant la constante d'intégration. La formule pour z est

$$1 + z = e^v,$$

ce qui montre que $e^v = 1$, ou $v = 0$, lorsque $z = 0$. Évidemment on doit aussi avoir $u = 0$ lorsque $z = 0$. Donc

$$A = -\pi/4,$$

et avec $H = 1/\tau$,

$$u = \frac{c}{H}\left\{\frac{1}{2}\ln(1 + z) + \arctan(1 + z) - \pi/4\right\}. \tag{19}$$

On constate aisément que, lorsque $z \ll 1$, $u = (c/H)z$. D'ailleurs les formules pour z et T donnent

$$T = t_0 - \frac{1}{2H}\ln(1 + z). \tag{20}$$

Dans le modèle de de Sitter, R $= 0$ quand $t = -\infty$. Donc une source à l'horizon de l'observateur, pour laquelle $z = \infty$, a émis sa lumière au moment $T = -\infty$ et sa distance u est aussi infinie.

Le moment t_0 est arbitraire. On pourrait donc choisir $T = 0$ pour les sources dont z égale 99, par exemple. C'est-à-dire qu'on choisirait

$$t_0 = \frac{1}{H} \ln 10 = 2{,}3\ (1/H).$$

Les sources se trouvent à une distance

$$u = 3{,}1\ (c/H)$$

tandis qu'on a, comme auparavant,

$$\frac{V}{c} = 1 - 2 \times 10^{-4}.$$

CONCLUSIONS

Ces deux exemples montrent qu'on peut arriver à des solutions de l'équation (12). Mais le calcul devient de plus en plus difficile au fur et à mesure qu'on choisit des fonctions R(t) d'une complication croissante. Par exemple, dans les modèles d'univers à courbure positive et avec une valeur nulle de la constante cosmique on a

$$R \propto (1 - \cos 2x),$$
$$t \propto (2x - \sin 2x),$$

x étant un paramètre intermédiaire.

Le problème de la résolution de (12) dans ce cas n'est pas encore achevé. Néanmoins il n'y a ici que des difficultés de calcul et non pas des questions de principe.

Manuscrit reçu le 28 juin 1966.