

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

S. NIANG

Potentiel généralisé $U(\dot{q}^v, q^v; t)$. Existence et détermination

Annales de l'I. H. P., section A, tome 5, n° 4 (1966), p. 281-299

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__5_4_281_0

© Gauthier-Villars, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Potentiel généralisé $U(\dot{q}^\nu, q^\nu; t)$ Existence et détermination

par

S. NIANG

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Dakar.

RÉSUMÉ. — Lorsque l'état d'un système constant $\xi(t)$ dépend de t et de n paramètres q^ν [$\nu = (1, 2, \dots, n)$], nous déterminons d'abord des conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un potentiel généralisé $U(\dot{q}^\nu, q^\nu; t)$ — dépendant de t , des q^ν et des $\dot{q}^\nu = \frac{dq^\nu}{dt}$ — dont dérive éventuellement le système de toutes les forces appliquées à $\xi(t)$. Ces conditions concernent soit U (globalement), soit les coefficients de U .

Nous donnons ensuite une méthode générale de détermination de U , lorsqu'il existe. Nous envisageons alors le cas où les paramètres q^ν sont indépendants et le cas où ils sont soumis à des contraintes de la forme (A, 4).

L'exposé s'achève par trois exemples illustrant la méthode générale de détermination du potentiel U .

A. — GÉNÉRALITÉS

Nous nous proposons de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que le système des forces appliquées à un système constant $\xi(t)$ dérive d'un potentiel généralisé U dépendant de t , des paramètres q^ν fixant l'état de $\xi(t)$ et des seules dérivées de ces paramètres soit :

$$(A, 1) \quad \left[\begin{array}{l} U = U(\dot{q}^\nu, q^\nu; t) \\ \text{avec} \\ \nu = (1, 2, \dots, n) \\ \dot{q}^\nu = \frac{dq^\nu}{dt}. \end{array} \right.$$

Nous donnerons ensuite une méthode générale de détermination de U .

L'énergie cinétique d'un système constant est en général une fonction du second degré des \dot{q}^ν , de sorte qu'en général aussi le potentiel généralisé U , s'il existe, est une fonction du second degré des \dot{q}^ν .

Dès lors nous poserons :

$$(A, 2) \quad U = U_2 + U_1 + U_0$$

où U_s ($s = (1, 2)$) est une fonction homogène de degré s en \dot{q}^ν .

Rappelons que le travail virtuel δW du système de toutes les forces appliquées à $\xi(t)$ est, dans toute évolution virtuelle du système respectant t :

$$(A, 3) \quad \left[\begin{array}{l} \delta W = Q_\nu \delta q^\nu \\ \nu = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

où les Q_ν sont, en général, des fonctions de t , des q^ν , des \dot{q}^ν et des \ddot{q}^ν , les δq^ν étant les variations subies par les paramètres q^ν dans l'évolution virtuelle considérée.

Lorsque les q^ν ne sont pas tous indépendants, nous les supposons soumis aux contraintes :

$$(A, 4) \quad \left[\begin{array}{l} \dot{q}^\alpha = a_\beta^\alpha \dot{q}^\beta + b^\alpha \quad (\text{sommation sur } \beta) \\ \text{avec} \\ \beta = (1, 2, \dots, p) \\ \alpha = (p+1, \dots, n) \end{array} \right.$$

où les quantités a_β^α et b^α ne dépendent que de t et des paramètres q^ν .

Dès lors nous écrirons la relation (A, 3) sous la forme :

$$(A, 5) \quad \left[\begin{array}{l} \delta \bar{W} = \bar{Q}_\beta \delta q^\beta \\ \text{avec} \\ \delta q^\alpha = a_\beta^\alpha \delta q^\beta \\ \bar{Q}_\beta = Q_\beta + Q_\alpha a_\beta^\alpha \\ \beta = (1, 2, \dots, p); \quad \alpha = (p+1, \dots, n) \end{array} \right.$$

les \bar{Q}_β étant supposés exprimés [à l'aide des relations (A, 4) et de leurs dérivées] en fonction de t , des q^ν et des seules dérivées des paramètres q^β considérés comme indépendants.

Dans toute la suite, nous considérerons que toute quantité surlignée est supposée exprimée en fonction de t , des q^ν et des seules dérivées des paramètres indépendants q^β .

Si le système des forces appliquées à $\xi(t)$ dérive d'un potentiel généralisé $U(\dot{q}^v, q^v; t)$, on a :

$$(A, 6) \quad \left[\begin{array}{l} Q_v = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^v} \right) - \frac{\partial U}{\partial q^v} \\ v = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

les q^v étant indépendants.

Lorsque les q^v sont liés par les relations (A, 4), on a ⁽¹⁾

$$(A, 7) \quad \left[\begin{array}{l} \bar{Q}_\beta = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \dot{q}^\beta} \right) - \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial q^\alpha} a_\beta^\alpha \right) + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\alpha} \left(\frac{\partial \bar{q}^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} - 2\bar{a}_\beta^\alpha \right) \\ \beta = (1, 2, \dots, p); \quad \alpha = (p+1, \dots, n) \end{array} \right.$$

où l'on distinguera soigneusement les \bar{U} surlignés des U non surlignés.

**B. — CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES
D'EXISTENCE DE $U(\dot{q}^v, q^v; t)$.
DÉTERMINATION DE U**

B₁. — Les paramètres q^v sont indépendants.

1. Conditions nécessaires et suffisantes pour que le système des forces appliquées à $\xi(t)$ dérive d'un potentiel généralisé U .

a) En remarquant que :

$$(B, 1) \quad \left[\begin{array}{l} \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^v} \right] - \frac{\partial U}{\partial q^v} \right] \dot{q}^v = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^v} \dot{q}^v \right) - \frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ v = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

et compte tenu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, il vient, d'après (A, 2) :

$$(B, 2) \quad \left[\begin{array}{l} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^v} \right) - \frac{\partial U}{\partial q^v} \right] \dot{q}^v = \frac{d}{dt} (U_2 - U_0) + \frac{\partial U}{\partial t} \\ \text{avec} \\ U = U_2 + U_1 + U_0 \\ v = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ S. NIANG, *Cours de Mécanique Analytique*. Faculté des Sciences, Dakar.

Il résulte alors de (B, 2) et en se référant à (A, 5) que l'on doit avoir :

$$(B, 3) \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{Q}_v \dot{q}^v = \frac{d}{dt} (U_2 - U_0) + \frac{\partial U^*}{\partial t} \\ \text{avec} \\ \left[\begin{array}{l} U = U_2 + U_1 + U_0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U^*}{\partial t} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

pour que le système des forces appliquées à $\xi(t)$ dérive d'un potentiel généralisé U [U^* , en général distincte de U , est une fonction de t , des q^v et des \dot{q}^v , assujettie seulement à vérifier (B, 3)].

b) *Réciproquement*, si l'on a (B, 3) il vient :

$$(B, 4) \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{Q}_v \dot{q}^v = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^v} \dot{q}^v - U \right] + \frac{\partial U^*}{\partial t} \\ v = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

soit, compte tenu de (B, 3₂) :

$$(B, 5) \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{Q}_v \dot{q}^v = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^v} \dot{q}^v \right] - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^v} \ddot{q}^v - \frac{\partial U}{\partial q^v} \dot{q}^v \\ \text{ou} \\ \mathcal{Q}_v \dot{q}^v = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^v} \right) - \frac{\partial U}{\partial q^v} \right] \dot{q}^v \\ \forall v = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

Les \dot{q}^v étant indépendants, la relation (B, 5₂) implique :

$$(B, 6) \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{Q}_v = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^v} \right) - \frac{\partial U}{\partial q^v} \\ \text{avec} \\ U = U_2 + U_1 + U_0 \\ v = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

Ainsi une condition nécessaire et suffisante, pour que le système des forces appliquées à $\xi(t)$ dérive d'un potentiel généralisé U , est que l'expression $\mathcal{Q}_v \dot{q}^v$ puisse se mettre sous la forme (B, 3).

2. Conditions nécessaires et suffisantes, concernant les coefficients des \mathcal{Q}_ν , pour que le système des forces appliquées à $\mathcal{E}(t)$ dérive d'un potentiel généralisé U.

S'il existe un potentiel généralisé U, les \mathcal{Q}_ν sont d'après (B, 6) de la forme :

$$(B, 7) \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{Q}_\nu = 2\alpha_{\nu\mu}\dot{q}^\mu + \beta_{\nu\mu k}\dot{q}^\mu\dot{q}^k + \gamma_{\nu\mu}\dot{q}^\mu + \delta_\nu \\ \left. \begin{array}{l} \mu \\ \nu \\ k \end{array} \right\} \in \{ 1, 2, \dots, n \} \end{array} \right.$$

a) Si le système des forces appliquées à $\mathcal{E}(t)$ dérive d'un potentiel généralisé U, il existe des fonctions $\chi_{\nu\mu}$, λ_ν et $\gamma_{\nu\mu}^*$ telles que :

$$(B, 8) \quad \left[\begin{array}{l} \beta_{\nu\mu k} - \frac{\partial \chi_{\nu\mu}}{\partial q^k} = \frac{\partial \chi_{\mu\nu}}{\partial q^k} - \frac{\partial \chi_{k\mu}}{\partial q^\nu} \\ \gamma_{\nu\mu} - 2 \frac{\partial \alpha_{\nu\mu}}{\partial t} = \gamma_{\nu\mu}^* \\ \delta_\nu - \frac{\partial}{\partial q^\nu} (\delta_\mu q^\mu) = \frac{\partial \lambda_\nu}{\partial t} \\ \text{avec} \\ \alpha_{\nu\mu} = \frac{1}{2} (\chi_{\nu\mu} + \chi_{\mu\nu}) = \alpha_{\mu\nu} \\ \gamma_{\nu\mu}^* = - \gamma_{\mu\nu}^* \\ \left. \begin{array}{l} \mu \\ \nu \\ k \end{array} \right\} \in \{ 1, 2, \dots, n \} \end{array} \right.$$

les fonctions $\chi_{\nu\mu}$, λ_ν et $\gamma_{\nu\mu}^*$ ne dépendant que de t et des q^ν .

En effet, en posant :

$$(B, 9) \quad \left[\begin{array}{l} U_2 = a_{k\mu}\dot{q}^k\dot{q}^\mu \\ U_1 = b_\nu\dot{q}^\nu \\ \text{avec} \\ U = U_2 + U_1 + U_0 \end{array} \right.$$

$a_{k\mu}$, b_ν et U_0 n'étant fonction que de t et des q^ν , il vient :

$$(B, 10) \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\nu} = (a_{\nu\mu} + a_{\mu\nu})\dot{q}^\mu + b_\nu$$

d'où :

$$(B, 11) \quad \left[\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\nu} \right) - \frac{\partial U}{\partial q^\nu} &= (a_{\nu\mu} + a_{\mu\nu}) \ddot{q}^\mu + \left[\frac{\partial}{\partial q^k} (a_{\nu\mu} + a_{\mu\nu}) - \frac{\partial a_{k\mu}}{\partial q^\nu} \right] \dot{q}^k \dot{q}^\mu \\ &+ \left[\frac{\partial b_\nu}{\partial q^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial q^\nu} + \frac{\partial}{\partial t} (a_{\nu\mu} + a_{\mu\nu}) \right] \dot{q}^\mu + \left(\frac{\partial b_\nu}{\partial t} + \frac{\partial U_0}{\partial q^\nu} \right) \end{aligned} \right]$$

En rapprochant alors (B, 11) et (B, 7) on a (B, 8) avec

$$(B, 12) \quad \left[\begin{aligned} a_{\nu\mu} &= \chi_{\nu\mu} \\ \gamma_{\nu\mu}^* &= \frac{\partial b_\nu}{\partial q^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial q^\nu} \\ \lambda_\nu &= b_\nu \end{aligned} \right. \quad \left(\text{avec } \frac{\partial}{\partial q^\mu} (\partial_\nu q^\nu) = - \frac{\partial U_0}{\partial q^\mu} \right)$$

b) *Réciproquement*, s'il existe des fonctions $\chi_{\nu\mu}$, λ_ν et $\gamma_{\nu\mu}^*$ telles que l'on ait (B, 8), le système des forces appliquées à $\xi(t)$ dérive d'un potentiel U. En effet, on a, à partir de (B, 7) :

$$(B, 13) \quad \left[\begin{aligned} Q_\nu \dot{q}^\nu &= 2\alpha_{\nu\mu} \dot{q}^\nu \ddot{q}^\mu + \beta_{\nu\mu k} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu \dot{q}^k + \gamma_{\nu\mu} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu + \delta_\nu \dot{q}^\nu \\ &\left. \begin{array}{c} \mu \\ \nu \\ k \end{array} \right\} \in \{ 1, 2, \dots, n \} \end{aligned} \right]$$

En considérant les relations :

$$(B, 14) \quad \left[\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\chi_{\nu\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu] &= 2\alpha_{\nu\mu} \dot{q}^\nu \ddot{q}^\mu + \frac{\partial \chi_{\nu\mu}}{\partial q^k} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \dot{q}^k + \frac{\partial}{\partial t} (\chi_{\nu\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu) \\ \frac{d}{dt} (\gamma_\nu q^\nu) &= \gamma_\nu \dot{q}^\nu + \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial q^\mu} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu + \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_\nu q^\nu) \\ &\left. \begin{array}{c} \mu \\ \nu \\ k \end{array} \right\} \in \{ 1, 2, \dots, n \} \end{aligned} \right]$$

il vient

$$(B, 15) \quad \left[\begin{aligned} Q_\nu \dot{q}^\nu &= \frac{d}{dt} [\chi_{\nu\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \gamma_\nu q^\nu] + \left(\beta_{\nu\mu k} - \frac{\partial \chi_{\nu\mu}}{\partial q^k} \right) \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \dot{q}^k + \gamma_{\nu\mu} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu \\ &- \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial q^\mu} \dot{q}^\nu \dot{q}^\mu + \frac{\partial}{\partial t} [-\chi_{\nu\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - \gamma_\nu q^\nu] \\ &\text{avec} \\ &2\alpha_{\nu\mu} = \chi_{\nu\mu} + \chi_{\mu\nu} \end{aligned} \right]$$

d'où, compte tenu de (B, 8) :

$$(B, 16) \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{Q}_\nu \dot{q}^\nu = \frac{d}{dt} [\chi_{\nu\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \gamma_\nu q^\nu] + \frac{\partial}{\partial t} [\chi_{\nu\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \lambda_\nu \dot{q}^\nu - \gamma_\nu q^\nu] \\ \left. \begin{array}{c} \mu \\ \nu \\ k \end{array} \right\} \in \{ 1, 2, \dots, n \} \end{array} \right.$$

Le système des forces appliquées à $\mathcal{E}(t)$ dérive donc du potentiel U tel que

$$(B, 17) \quad \left[\begin{array}{l} U = U_2 + U_1 + U_0 \\ \text{avec} \\ U_2 = \chi_{\nu\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \\ U_0 = - \gamma_\nu q^\nu \\ \frac{\partial U}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} (\chi_{\nu\mu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu + \lambda_\nu \dot{q}^\nu - \gamma_\nu q^\nu) = \frac{\partial U^*}{\partial t} \\ \text{avec} \\ U^* = U_2 + U_1^* + U_0 \end{array} \right.$$

Pour que le système des forces appliquées à un système constant $\mathcal{E}(t)$ dérive d'un potentiel généralisé U, il faut et il suffit qu'existent des fonctions $\chi_{\nu\mu}$, λ_ν et $\gamma_{\nu\mu}^*$ [ne dépendant que de t et des paramètres q^ν définissant l'état de $\mathcal{E}(t)$] telles que les coefficients $\alpha_{\nu\mu}$, $\beta_{\nu\mu k}$, $\gamma_{\nu\mu}$ et δ_ν des coordonnées \mathcal{Q}_ν données par (B, 7), soient liés par les relations (B, 8).

REMARQUE. — On notera que les conditions (B, 8), intéressantes du point de vue théorique, sont [lorsqu'il y a un problème concret à résoudre] d'une application souvent difficile. On observera aussi qu'en mettant $\mathcal{Q}_\nu \dot{q}^\nu$ sous la forme (B, 3), on ne détermine, en général, que U_2 et U_0 , U^* et le potentiel à déterminer n'étant liés que par la relation :

$$(B, 18) \quad \frac{\partial}{\partial t} (U^* - U) = 0$$

c'est-à-dire que la différence $U - U^*$ ne contient pas explicitement le temps.

Nous allons donner une méthode pratique de détermination du potentiel généralisé [dans le cas d'existence de ce potentiel].

3. Méthode générale de détermination du potentiel généralisé U.

a) *Détermination de U₂ et de U₀.*

Si le système des forces appliquées à $\delta(t)$ dérive d'un potentiel généralisé U le calcul de $Q_v \dot{q}^v$ au moyen des transformations indiquées, par (B, 14), doit conduire à (B, 3), qui fournit alors U₂ et U₀.

Reste à déterminer U₁, que ce mode de calcul ne permet pas en général d'obtenir.

b) *Détermination de U₁.* U₂ et U₀ étant ainsi déterminés, les relations (B, 6) fournissent :

$$(B, 19) \quad \left[\begin{array}{l} Q_v^* = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \dot{q}^v} \right) - \frac{\partial U_1}{\partial q^v} \\ \text{ou} \\ Q_v^* = Q_v - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^v} (U_2 + U_0) \right] + \frac{\partial}{\partial q^v} (U_2 + U_0) \\ \text{avec} \\ v = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

Les Q_v^* sont linéaires en \dot{q}^v , d'où :

$$(B, 20) \quad \left[\begin{array}{l} Q_v^* = f_{v\mu} \dot{q}^\mu + g_v \\ \left. \begin{array}{l} \mu \\ v \end{array} \right\} \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right.$$

les $f_{v\mu}$ étant déterminés, en fonction de t et des q^μ , par (B, 19₂) (U₂ et U₀ sont connus).

En posant :

$$(B, 21) \quad \left[\begin{array}{l} U_1 = b_v \dot{q}^v \\ v = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

on a, en identifiant (B, 19) et (B, 21) :

$$(B, 22) \quad \left[\begin{array}{l} f_{v\mu} = \frac{\partial b_v}{\partial q^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial q^v} \\ g_v = \frac{\partial b_v}{\partial t} \\ \left. \begin{array}{l} \mu \\ v \end{array} \right\} \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right.$$

les $f_{\nu\mu}$ sont donc, dans un espace à n dimensions $E^n(q^j)$ [$j = (1, 2, \dots, n)$], les composantes du rotationnel de \vec{b} , \vec{b} étant le vecteur de composantes b_ν dans cet espace.

Les $f_{\nu\mu}$ doivent être antisymétriques d'où :

$$(B, 23) \quad \left[\begin{array}{l} f_{\nu\mu} = -f_{\mu\nu} \\ \mathbf{V}_\nu^\mu \in \{ 1, 2, \dots, n \} \end{array} \right.$$

Introduisons la fonction $\varphi(\dot{q}^\nu; t)$, linéaire et homogène en \dot{q}^ν , définie par :

$$(B, 24) \quad \left[\begin{array}{l} \varphi = \mathcal{Q}_l^* q^l - g_l q^l \\ \text{ou} \\ \varphi = f_{l\mu} \dot{q}^\mu q^l \\ \text{avec} \\ \left. \begin{array}{l} \mu \\ l \end{array} \right\} \in \{ 1, 2, \dots, n \} \\ \mathcal{Q}_l^* = f_{l\mu} \dot{q}^\mu + g_l \end{array} \right.$$

on a, compte tenu de (B, 23) et de (B, 24) :

$$(B, 25) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}^\nu} = f_{l\nu} q^l = -f_{\nu l} q^l \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q^\nu} = \mathcal{Q}_\nu^* - g_\nu + \frac{\partial f_{l\mu}}{\partial q^\nu} \dot{q}^\mu q^l \end{array} \right.$$

D'où :

$$(B, 26) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}^\nu} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial q^\nu} = -f_{\nu l} \dot{q}^l - \mathcal{Q}_\nu^* + g_\nu + \left[\left(\frac{\partial f_{l\nu}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial f_{l\mu}}{\partial q^\nu} \right) \dot{q}^\mu + \frac{\partial f_{l\nu}}{\partial t} \right] q^l$$

ou

$$(B, 27) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}^\nu} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial q^\nu} = -2\mathcal{Q}_\nu^* + 2g_\nu + \left[\left(\frac{\partial f_{l\nu}}{\partial q^\mu} - \frac{\partial f_{l\mu}}{\partial q^\nu} \right) \dot{q}^\mu + \frac{\partial f_{l\nu}}{\partial t} \right] q^l \\ \left. \begin{array}{l} \mu \\ \nu \\ l \end{array} \right\} \in \{ 1, 2, \dots, n \} \end{array} \right.$$

Soient alors n fonctions $a_\nu(q^\mu; t)$ ne dépendant que des q^ν et éventuellement de t . Posons

$$(B, 28) \quad \left[\begin{array}{l} \Phi = \varphi + a_\nu \dot{q}^\nu \\ \nu = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

et déterminons les a_ν de manière que

$$(B, 29) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}^\nu} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial q^\nu} = -2Q_\nu^* \\ \nu = (1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

Compte tenu de (B, 27) et de (B, 28), les relations (B, 29) fournissent la condition :

$$(B, 30) \quad \left[\begin{array}{l} \left[\left(\frac{\partial f_{l\nu}}{\partial q^\mu} q^l + \frac{\partial a_\nu}{\partial q^\mu} \right) - \left(\frac{\partial f_{l\mu}}{\partial q^\nu} q^l + \frac{\partial a_\mu}{\partial q^\nu} \right) \right] \dot{q}^\mu + \frac{\partial f_{l\nu}}{\partial t} q^l + \frac{\partial a_\nu}{\partial t} + 2g_\nu = 0 \\ \left. \begin{array}{l} \mu \\ \nu \\ l \end{array} \right\} \in \{ 1, 2, \dots, n \} \end{array} \right.$$

La relation (B, 30) est vérifiée si l'on définit les a_ν par :

$$(B, 31) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial a_\nu}{\partial q^\mu} = -\frac{\partial f_{l\nu}}{\partial q^\mu} q^l \\ \frac{\partial a_\nu}{\partial t} = -\frac{\partial f_{l\nu}}{\partial t} q^l - 2g_\nu \end{array} \right.$$

ou

$$(B, 32) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial a_\nu}{\partial q^\mu} = -\frac{\partial}{\partial q^\mu} (f_{l\nu} q^l) + f_{l\nu} \\ \frac{\partial a_\nu}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (f_{l\nu} q^l) - 2g_\nu \end{array} \right.$$

Comme

$$\left[\begin{array}{l} \dot{a}_\nu = \frac{\partial a_\nu}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial a_\nu}{\partial t} \\ \left. \begin{array}{l} \mu \\ \nu \end{array} \right\} \in \{ 1, 2, \dots, n \} \end{array} \right.$$

on a :

$$(B, 33) \quad \dot{a}_\nu = - \left[\frac{\partial}{\partial q^\mu} (f_{l\nu} q^l) \right] \dot{q}^\mu - \frac{\partial}{\partial t} (f_{l\nu} q^l) - (f_{\nu\mu} \dot{q}^\mu + g_\nu) - g_\nu$$

relation qui fournit, compte tenu de (B, 20)

$$(B, 34) \quad \left[\begin{array}{l} a_\nu = -f_{l\nu} q^l - \int [Q_\nu^* + g_\nu] dt \\ \left. \begin{array}{l} \nu \\ l \end{array} \right\} \in \{ 1, 2, \dots, n \} \end{array} \right.$$

En posant :

$$(B, 35) \quad \left[\begin{array}{l} \Lambda_\nu(q^\mu ; t) = \int \mathcal{Q}_\nu^* dt \\ G_\nu(q^\mu ; t) = \int g_\nu dt \end{array} \right.$$

la relation (B, 28) s'écrit, compte tenu de (B, 34) et de (B, 35) :

$$(B, 36) \quad \left[\begin{array}{l} \Phi = -\dot{q}^\nu [\Lambda_\nu + G_\nu] \\ \text{ou} \\ \Phi = -\dot{q}^\nu \int (\mathcal{Q}_\nu^* + g_\nu) dt \end{array} \right.$$

En remarquant que

$$(B, 37) \quad \dot{G}_\nu = \frac{\partial G_\nu}{\partial q^\mu} \dot{q}^\mu + \frac{\partial G_\nu}{\partial t} = g_\nu$$

il vient :

$$(B, 38) \quad \frac{\partial G_\nu}{\partial q^\mu} = 0 \Rightarrow G_\nu = G_\nu(t)$$

Dès lors G_ν est indépendant des q^ν ; d'où :

$$(B, 39) \quad g_\nu = \frac{\partial G_\nu}{\partial t} (= \dot{G}_\nu)$$

De (B, 19) et de (B, 36) on déduit donc, par identification :

$$(B, 40) \quad \left[\begin{array}{l} U_1 = \frac{1}{2} \dot{q}^\nu (\Lambda_\nu + G_\nu) \\ \text{ou} \\ U_1 = \frac{1}{2} \dot{q}^\nu \int (\mathcal{Q}_\nu^* + g_\nu) dt \\ \nu = (1, 2, 3, \dots, n) \end{array} \right.$$

Les relations (B, 31) et (B, 40) déterminent complètement le potentiel U, s'il existe.

REMARQUE 1. — Si les \mathcal{Q}_ν sont des fonctions de t et des seuls paramètres q^ν , le potentiel U est indépendant des vitesses \dot{q}^ν et se réduit à U_0 , fonction de t et des seuls paramètres définissant l'état de $\mathcal{E}(t)$.

REMARQUE 2. — Le potentiel U, s'il existe, est une fonction du second degré des vitesses \dot{q}^ν si et seulement si les \mathcal{Q}_ν sont linéaires en \dot{q}^ν . Cela résulte immédiatement de (B, 6).

Lorsque les \mathcal{Q}_ν sont seulement linéaires en \dot{q}^ν , U est une fonction linéaire des \dot{q}^ν .

REMARQUE 3. — Si l'on a :

$$(B, 41) \quad \left[\begin{array}{l} f_{\nu\mu} = \text{Cte} \\ \text{et} \\ g_\nu = \text{Cte} \\ \nabla_{\dot{q}^\nu}^{\mu} \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire si les coefficients (B, 23) sont constants, la relation (B, 40₂) fournit, compte tenu de (B, 20)

$$(B, 42) \quad \left[\begin{array}{l} U_1 = \frac{1}{2} \dot{q}^\nu \int (f_{\nu\mu} \dot{q}^\mu + 2g_\nu) dt \\ \text{ou} \\ U_1 = \frac{1}{2} f_{\nu\mu} \dot{q}^\nu q^\mu + t g_\nu \dot{q}^\nu + \text{Cte} \end{array} \right.$$

B₂. — Les q^ν ne sont pas indépendants.

En les supposant liés par les contraintes (A, 3) on a les relations (A, 7) où l'on utilise à la fois le potentiel généralisé sous les formes U et \bar{U} , U étant donné par les relations indiquées ci-dessus.

C. — EXEMPLES

1. Considérons le point matériel $[1, M(t), \vec{V}(t)]$, libre et soumis à la seule force :

$$(C, 1) \quad \vec{f} = \left[\frac{\dot{\tau}^2 - 2\ddot{\tau}\tau}{C^2} - 1 \right] \frac{\overrightarrow{OM}}{\tau^3}; \quad |\overrightarrow{OM}| = \tau$$

où O est un point fixe.

Montrons que \vec{f} dérive d'un potentiel généralisé U fonction du second degré de $\dot{\tau}$.

Le mouvement de $[1, M, \vec{V}]_t$ s'effectue dans un plan (Π) contenant O. Si τ et θ sont les coordonnées polaires de M dans ce plan, il vient en posant :

$$(C, 2) \quad \begin{cases} q^1 = \tau \\ q^2 = \theta \end{cases}$$

$$(C, 3) \quad \begin{cases} Q_1 = Q_\tau = \vec{f} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau^2} \left(\dot{\tau}^2 - 2\tau\ddot{\tau} - 1 \right) \\ Q_2 = Q_\theta = \vec{f} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

on a :

$$(C, 4) \quad \begin{cases} Q_1 \dot{q}^1 = \frac{\dot{\tau}}{C^2 \tau^2} (\dot{\tau}^2 - 2\tau\ddot{\tau}) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\tau} \right) \\ \text{ou} \\ Q_1 \dot{q}^1 = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\tau} - \frac{\dot{\tau}^2}{C^2 \tau} \right] \end{cases}$$

Il résulte de (C, 4), compte tenu de (B, 3) que

$$(C, 5) \quad \begin{cases} U_0 = -\frac{1}{\tau} \\ U_2 = -\frac{\dot{\tau}^2}{C^2 \tau} \end{cases}$$

Comme

$$(C, 6) \quad Q_1^* = Q_\tau^* = Q_1 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(U_2 + U_0)}{\partial \dot{\tau}} \right) + \frac{\partial(U_2 + U_0)}{\partial \tau} \equiv 0$$

on a d'après (B, 40),

$$(C, 7) \quad U_1 \equiv 0$$

\vec{f} dérive donc du potentiel

$$(C, 8) \quad \begin{cases} U = -\frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{\dot{\tau}^2}{C^2} \right) \\ \text{avec} \\ U = U_2 + U_0 \end{cases}$$

2. Un disque $\mathcal{E}(t)$, pesant, de masse m , de rayon a , est mobile sans frottement dans un plan vertical le long de la ligne de pente (ox) d'un plan

incliné (II). $\xi(t)$, constant, est obtenu en pratiquant dans un disque circulaire et homogène un trou circulaire de rayon $\frac{a}{\sqrt{2}}$ dont le centre K est à la distance $\frac{a}{4}$ du centre géométrique C de $\xi(t)$. (II) tourne uniformément autour de son horizontale oz . On désigne par $(\mathcal{C}) = \overset{\curvearrowright}{oxyz}$ le trièdre orthonormal direct, d'origine fixe O, $\vec{o}y$ étant normal à (II) et on pose [voir fig. (C, 1)] :

$$(C, 9) \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = (\vec{o}y_1, \vec{o}y) \\ \vec{g} = -g\vec{j}_1; \quad g > 0 \dots \\ \text{avec} \\ \left[\begin{array}{l} \dot{\alpha}k_1 = \vec{\omega} = \text{Cte} \\ \omega = \text{Cte} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où \vec{j}_1 est le vecteur unitaire de la verticale ascendante $\vec{O}y_1$, k_1 celui de $\vec{o}z$, g étant l'intensité de la pesanteur.

Montrons que par rapport à $\overset{\curvearrowright}{oxyz}$ le système des forces appliquées à $\xi(t)$ dérive d'un potentiel généralisé U.

Désignons par

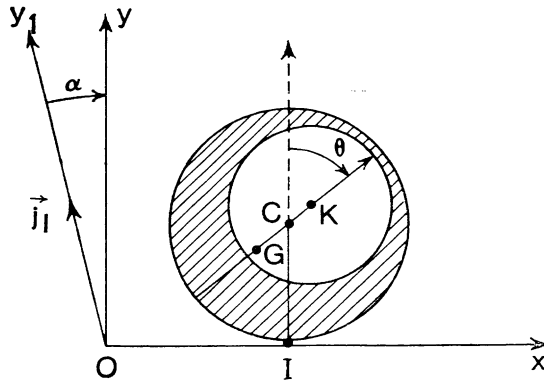


Fig. (C, 1).

$\mathcal{D}(t)$ le disque homogène de centre C de rayon a et de masse $2m$.

$\mathcal{D}(t)$ le disque homogène de centre K de rayon $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et de masse m

on a :

$$(C, 10) \quad \mathcal{D}(t) = \xi(t) + \mathcal{D}(t)$$

Dès lors, il vient sans difficulté

$$(C, 11) \quad \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CK} = 0$$

où G désigne le centre de gravité de $\mathcal{E}(t)$.

$\mathcal{E}(t)$ étant défini à chaque instant par les coordonnées ξ et η de G et sa rotation propre θ [(par rapport à (\mathcal{C}))] posons :

$$(C, 12) \quad \left[\begin{array}{l} \overrightarrow{OG} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} \\ \text{avec} \\ q^1 = \xi ; \quad q^2 = \eta ; \quad q^3 = \theta ; \quad q^0 = t \end{array} \right.$$

où \vec{i} et \vec{j} sont respectivement les vecteurs unitaires de \vec{ox} et de \vec{oy} .

La vitesse d'une particule de position M de $\mathcal{E}(t)$ étant :

$$(C, 13) \quad \vec{V}_i = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt} \right)_{\mathcal{C}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}_i$$

on vérifiera sans peine que (\mathcal{C}) peut être considérée comme inertial à condition d'adjoindre à la force

$$(C, 14) \quad \vec{f}_1 = m\vec{g} = -mg\vec{j}_1 = -mg(\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha)$$

la force

$$(C, 15) \quad \left[\begin{array}{l} \vec{f}_2 = -2m(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_G) + m\omega^2 \overrightarrow{OG} \\ \text{avec} \\ \vec{V}_G = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right)_{\mathcal{C}} \end{array} \right.$$

\vec{f}_1 et \vec{f}_2 étant appliquées en G.

On a, compte tenu des notations (C, 12) :

$$(C, 16) \quad \left[\begin{array}{l} Q_1 = \vec{f} \frac{\partial \vec{G}}{\partial \xi} = m[2\omega \dot{\eta} + \omega^2 \xi - g \sin \omega t] \\ Q_2 = \vec{f} \frac{\partial \vec{G}}{\partial \eta} = m[-2\omega \dot{\xi} + \omega^2 \eta - g \cos \omega t] \end{array} \right.$$

d'où :

$$(C, 17) \quad \left[\begin{array}{l} Q_1 \dot{q}^1 + Q_2 \dot{q}^2 = m \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) - g(\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t) \right] \\ + \frac{\partial}{\partial t} [g(\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t)] \end{array} \right.$$

relation qui fournit, en se référant à (B, 3) :

$$(C, 18) \quad \left[\begin{array}{l} U_2 = 0 \\ U_0 = m \left[-\frac{\omega^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) + g(\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t) \right] \end{array} \right]$$

Les relations (B, 19) donnent alors :

$$(C, 19) \quad \left[\begin{array}{l} Q_1^* = 2m\omega\dot{\eta} \\ Q_2^* = -2m\omega\dot{\xi} \end{array} \right]$$

Compte tenu de (B, 40) il vient :

$$(C, 20) \quad U_1 = m\omega(\eta\dot{\xi} - \dot{\eta}\xi)$$

Le potentiel généralisé U est alors compte tenu de (C, 18) :

$$(C, 21) \quad \left[\begin{array}{l} U = U_1 + U_0 \\ \text{ou} \\ U = m\omega(\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi) - \frac{m\omega^2}{2} (\xi^2 + \eta^2) + mg(\xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t) \\ \text{ou} \\ U = m\vec{\omega}(\vec{V}_G \wedge \vec{OG}) - \frac{m\omega^2}{2} \vec{OG}^2 + m\vec{g} \cdot \vec{OG} \end{array} \right]$$

3. Potentiel généralisé créé par un champ électromagnétique.

— Soit $[m, M(t), \vec{V}(t)]$ un point matériel que nous assimilerons à une particule électrique de charge q placée dans un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) ; \vec{E} et \vec{B} désignant respectivement le vecteur champ électrique et le vecteur induction magnétique. La particule est alors sollicitée, dans le système Georgi, par la force.

$$(C, 22) \quad \left[\begin{array}{l} \vec{f} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \\ \text{avec} \\ \vec{E} = \vec{E}(M, t); \quad \vec{B} = \vec{B}(M, t) \end{array} \right]$$

où \vec{f} , appliquée en M, est due aux champs considérés.

Nous supposons en négligeant éventuellement les interactions existant entre la particule et les champs (\vec{E}, \vec{B}) et toutes les autres forces que $[m, M, \vec{V}]$ se meut sous l'action de la seule force \vec{f} .

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont liés par les équations de Maxwell dont seules les deux suivantes :

$$(C, 23) \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \vec{E} \end{array} \right.$$

seront utilisées ici.

Les relations (C, 23) montrent alors qu'il existe un vecteur $\vec{A}(M, t)$ (potentiel vecteur) et un scalaire $\psi(M, t)$ (potentiel scalaire) tels que :

$$(C, 24) \quad \left[\begin{array}{l} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \\ \vec{E} = - \operatorname{grad} \psi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array} \right.$$

En nous plaçant ici en dynamique *newtonienne des systèmes constants*, on a :

$$(C, 25) \quad \vec{f} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont respectivement les vecteurs unitaires des axes \vec{ox}, \vec{oy} et \vec{oz} d'un référentiel inertial $\overset{\curvearrowright}{oxyz}$ orthonormal direct, il vient :

$$(C, 26) \quad \left[\begin{array}{l} \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \text{ou} \\ \vec{OM} = q^1\vec{i} + q^2\vec{j} + q^3\vec{k} \end{array} \right.$$

Dès lors on obtient :

$$(C, 27) \quad \left[\begin{array}{l} Q_1 = \vec{f} \frac{\partial \vec{M}}{\partial x} = q(E_1 + B_3\dot{y} - B_2\dot{z}) \\ Q_2 = \vec{f} \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = q(E_2 + B_1\dot{z} - B_3\dot{x}) \\ Q_3 = \vec{f} \frac{\partial \vec{M}}{\partial z} = q(E_3 + B_2\dot{x} - B_1\dot{y}) \end{array} \right.$$

d'où, d'après (C, 24) et (C, 27) :

$$(C, 28) \quad \left[\begin{array}{l} Q_v \dot{q}^v = \vec{f} \frac{d\vec{M}}{dt} = q\vec{E} \frac{d\vec{M}}{dt} = -q \left[\operatorname{grad} \psi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] \frac{d\vec{M}}{dt} \\ \text{avec} \\ v = (1, 2, 3) \end{array} \right.$$

Comme

$$(C, 29) \quad \overrightarrow{\text{grad}} \psi \overrightarrow{dM} = d\psi - \frac{\partial \psi}{\partial t} dt$$

la relation (C, 76) s'écrit :

$$(C, 30) \quad \mathcal{Q}_i \dot{q}^i = \frac{d}{dt} [-q\psi] + \frac{\partial}{\partial t} [\overrightarrow{VA} - \psi]q$$

Dès lors, on a :

$$(C, 31) \quad \begin{cases} U_2 \equiv 0 \\ U_0 = q\psi \end{cases}$$

on sait d'ailleurs que le potentiel U, s'il existe, est linéaire en \dot{q}^i . En se référant à (C, 24) on obtient :

$$(C, 32) \quad \begin{cases} \mathcal{Q}_1^* = q \left[B_3 \dot{y} - B_2 \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] \\ \mathcal{Q}_2^* = q \left[B_1 \dot{z} - B_3 \dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial t} \right] \\ \mathcal{Q}_3^* = q \left[B_2 \dot{x} - B_1 \dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right] \end{cases}$$

En utilisant (B, 20) et (B, 39) il vient :

$$(C, 33) \quad U_1 = \frac{q}{2} \overrightarrow{V} \int \left[\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right] dt$$

Si \overrightarrow{f} dérive d'un potentiel généralisé, on doit avoir :

$$(C, 34) \quad \begin{cases} \int \left[\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right] dt = 2\overrightarrow{\chi} \\ \text{avec} \\ \overrightarrow{\chi} = \overrightarrow{\chi}(x, y, z, t) = \chi_1 \overrightarrow{i} + \chi_2 \overrightarrow{j} + \chi_3 \overrightarrow{k} \end{cases}$$

Dès lors :

$$(C, 35) \quad \begin{cases} U = q(\psi + \overrightarrow{V}\overrightarrow{\chi}) \\ \text{ou} \\ U = q[\psi + \dot{x}\chi_1 + \dot{y}\chi_2 + \dot{z}\chi_3] \end{cases}$$

Montrons que U existe et déterminons χ .

De (C, 35) on déduit :

$$(C, 36) \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{Q}_1 = q \left[E_1 + \dot{y} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial y} - \frac{\partial \chi_2}{\partial x} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial \chi_3}{\partial x} - \frac{\partial \chi_1}{\partial z} \right) \right] \\ \mathcal{Q}_2 = q \left[E_2 + \dot{z} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial z} - \frac{\partial \chi_3}{\partial y} \right) - \dot{x} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial y} - \frac{\partial \chi_2}{\partial x} \right) \right] \\ \mathcal{Q}_3 = q \left[E_3 + \dot{x} \left(\frac{\partial \chi_3}{\partial x} - \frac{\partial \chi_1}{\partial z} \right) - \dot{y} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial z} - \frac{\partial \chi_3}{\partial y} \right) \right] \end{array} \right]$$

En rapprochant (C, 27) et (C, 36) il vient :

$$(C, 37) \quad \vec{B} = - \text{rot } \vec{\chi}$$

On en déduit, compte tenu de (C, 24₁)

$$(C, 38) \quad \vec{\chi} = - (\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad } \Theta})$$

où Θ est une fonction continue et pourvue de dérivées continues.

Comme dans (C, 27) ou dans (C, 36) n'entrent que les composantes de \vec{B} ou de $\text{rot } \vec{\chi}$, on peut prendre

$$(C, 39) \quad \vec{\chi} = - \vec{A}$$

et (C, 35) s'écrit :

$$(C, 40) \quad U = q(\psi - \vec{V} \cdot \vec{A})$$

REMARQUE. — On aurait pu, vu la forme de (C, 30), essayer la fonction $-q(\vec{V} \cdot \vec{A} - \psi)$ et constater qu'elle vérifie (C, 27). Le calcul que nous avons indiqué est général et a l'avantage de montrer que

$$\frac{1}{2} \int \left[(\vec{V} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] dt = - (\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad } \Theta}) + C^{\text{te}}$$

(Manuscrit reçu le 20 juin 1966).