ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

S. MIRACLE-SOLE

Traitement de la convolution gauche pour les systèmes infinis

Annales de l'I. H. P., section A, tome 6, nº 1 (1967), p. 59-71
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_1_59_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VI, n° 1, 1967, p. 59-71.

Section A :
Physique théorique.

Traitement de la convolution gauche pour les systèmes infinis

par

S. MIRACLE-SOLE
Physique Théorique, Faculté des Sciences, Marseille.

ABSTRACT. — The « twisted convolution » formalism of D. Kastler, associated with the Weyl form of the canonical commutation relations, is developed for the systems of infinite degrees of freedom. The Weyl correspondence is analysed and the Wigner-Moyal formalism indicated, as an adaptation of a previous work of G. Loupias and the author, for an infinite class of irreducible representations of the twisted convolution algebra, which includes the Fock representation. We obtain these representations, which are related to the direct product representations of J. McKenna and J. R. Klauder, as subrepresentations of a generalized regular representation, and we give the condition for their unitary equivalence. In the last paragraph we consider the case of the Weyl relations on a topological symplectic space.

INTRODUCTION

La construction des C*-algèbres associées aux relations de commutation canoniques a conduit D. Kastler [*1*] à la définition du « produit de convolution gauche » des mesures sur l'espace de phase. Avec G. Loupias nous avons considéré ce formalisme dans le cas d'un nombre fini de degrés de liberté ([*2*] et [*2 a*]) qui fournit la base pour le traitement mathématique de la correspondance de Weyl entre observables classiques et quantiques, et du formalisme de Wigner-Moyal. En particulier, nous avons montré que les fonctions de $\mathfrak{L}_2$ sur l'espace de phase s'appliquent sur les opérateurs de Hilbert-Schmidt de la représentation de Schrödinger.

Nous nous proposons d'abord ici de généraliser cette étude au cas d'un nombre infini de degrés de liberté. L'analogue de l'espace $\mathcal{L}_2$ des « fonctions » sur l'espace symplectique d'une infinité de dimensions peut être obtenu comme produit direct infini d'espaces de Hilbert; et permet de définir la représentation régulière de l'algèbre de convolution gauche, ainsi que de développer notre étude pour une classe infinie de ses sous-représentations irréductibles, parmi lesquelles se trouve la représentation de Fock.

Ces représentations sont liées aux représentations produit direct considérées par J. McKenna et J. R. Klauder [5], et du point de vue physique, peuvent être associées à l'état fondamental d'un système dynamique d'une infinité de degrés de liberté indépendants. Nous donnerons dans le paragraphe 3 une nouvelle démonstration de la condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence de deux de ces représentations, ainsi que la construction par la même méthode et associée aux partitions de l'ensemble d'indices, d'une infinité de nouvelles représentations.

Dans le paragraphe 4, nous nous intéresserons au cas des relations de commutation canoniques définies sur un espace topologique. Cet espace apparaît comme le complété de l'espace symplectique formel utilisé dans les trois premiers paragraphes.

§ 1. LA REPRÉSENTATION RÉGULIÈRE DE L'ALGÈBRE $\overline{\mathcal{M}_1(\mathrm{H}, \sigma)}$ ET UNE CLASSE DE SOUS-REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES

Soit H l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des vecteurs e_i, f_i, $i \in \mathrm{I}$, où I est un ensemble d'indices,

$$\psi_1 = \sum_{i \in \mathrm{J}_1} (x_1^i e_i + y_1^i f_i), \qquad \psi_2 = \sum_{i \in \mathrm{J}_2} (x_2^i e_i + y_2^i f_i) \qquad (\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2 \text{ parties finies de I})$$

deux éléments quelconques de H, posons

$$\sigma(\psi_1, \psi_2) = \sum_{i \in \mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_2} (x_1^i y_2^i - y_1^i x_2^i) \tag{1}$$

Alors (H, σ) est un espace symplectique dans lequel e_i, f_i, $i \in \mathrm{I}$ est une base symplectique.

On désignera par E_i l'espace bidimensionnel engendré par les deux vecteurs de base e_i, f_i, et par E_J la somme directe des E_i pour tout $i \in J$, ainsi que par $\mathfrak{L}_2(E_i, \sigma)$ et $\mathfrak{L}_2(E_J, \sigma)$ respectivement les espaces de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur les espaces E_i, E_J, munis des normes

$$\|f\|_2 = \sqrt{\pi} \left\{ \int |f(x^i, y^i)|^2 dx^i dy^i \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|g\|_2 = \pi^{N/2} \left\{ \int |g(x^{i_1}, y^{i_1}, \dots x^{i_N}, y^{i_N})| dx^{i_1} \dots dy^{i_N} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

où N est le nombre d'éléments de J. Ce sont d'après [2] des algèbres hilbertiennes pour le produit de convolution gauche.

La construction décrite par D. Kastler dans [1] permet d'obtenir l'algèbre de Banach $\mathcal{M}_1(H, \sigma)$ et la C*-algèbre $\overline{\mathcal{M}_1(H, \sigma)}$, limites inductives des algèbres de convolution gauche des mesures bornées sur les sous-espaces de dimension finie de H.

L'analogue de la représentation régulière gauche π_2 de ces algèbres dans le cas d'un nombre infini de dimensions peut être obtenue avec la notion de produit tensoriel infini d'espaces de Hilbert [3]. Nous appellerons $\mathfrak{L}_2(H)$ le produit complet $\prod_{i \in I} \otimes \mathfrak{L}_2(E_i, \sigma)$ et $\mathfrak{L}_2(H, \Phi)$ le produit incomplet caractérisé par la c_0-suite $\Phi = \prod_{i \in I} \otimes \varphi_i$ où $\varphi_i \in \mathfrak{L}_2(E_i, \sigma)$, $i \in I$. Ces notations sont justifiées par le fait que si J est une partie finie de I, on a

$$\mathfrak{L}_2(E_J, \sigma) = \prod_{i \in J} \otimes \mathfrak{L}_2(E_i, \sigma)$$

et si $\Phi = \prod_{i \in I} \otimes \varphi_i$, $X = \prod_{i \in I} \otimes \chi_i$ sont deux c_0-suites équivalentes, leur produit scalaire s'écrit

$$(\Phi \mid X) = \prod_{i \in I} \left\{ \sqrt{\pi} \int \overline{\varphi_i(x^i, y^i)} \chi_i(x^i, y^i) dx^i dy^i \right\} \tag{2}$$

Le lemme suivant [3] fournit une deuxième construction de $\mathfrak{L}_2(H, \Phi)$.

LEMME 1 : $\mathfrak{L}_2(H, \Phi)$ *est la complétion de l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de la forme* $\prod_{i \in I} \otimes \lambda_i$, *où* $\lambda_i = \varphi_i$ *sauf pour un nombre fini d'indices i.*

Étant donné une mesure bornée μ sur l'espace E_J, où J est une partie finie de I, on obtient un opérateur borné $\pi_2(\mu)$ sur $\mathcal{L}_2(H)$ en définissant son action sur les c_0-suites par

$$\pi_2(\mu)\left\{\prod_{i\in I}\otimes\varphi_i\right\}=\left\{\mu\times\left(\prod_{i\in J}\varphi_i\right)\right\}\otimes\left\{\prod_{i\in I-J}\otimes\varphi_i\right\} \tag{3}$$

ce qu'on écrira aussi $\mu\times\Phi$. Le lemme antérieur permet d'étendre cet opérateur à un opérateur linéaire sur $\mathcal{L}_2(H)$. D'après [*1*] (théorème 15) la norme de $\pi_2(\mu)$ considéré comme opérateur sur $\mathcal{L}_2(E_J, \sigma)$ coïncide avec la « norme de Schrödinger » de μ, d'où

$$\|\pi_2(\mu)\|=\|\mu\|. \tag{4}$$

On obtient ainsi une représentation de la C*-algèbre $\overline{\mathcal{M}_1(H,\sigma)}$ sur $\mathcal{L}_2(H)$ qu'on désignera par π_2.

De sa définition il vient que la représentation π_2 laisse invariant chacun des produits incomplets. Désignons par $\pi_{(\Phi)}$ la restriction de π_2 au produit incomplet $\mathcal{L}_2(H, \Phi)$. π_2 est la somme directe des représentations $\pi_{(\Phi)}$ lorsque Φ parcourt les classes d'équivalence des c_0-suites. On dit que deux c_0-suites $\Phi=\prod_{i\in I}\otimes\varphi_i$ et $X=\prod_{i\in I}\otimes\chi_i$ sont quasi équivalents s'il existe une famille $\{r_i\}$, $i\in I$ de nombres réels tels que les c_0-suites $\prod_{i\in I}\otimes\varphi_i$ et $\prod_{i\in I}\otimes\{e^{ir_i}\varphi_i\}$ soient équivalentes. Ceci fournit alors une application unitaire de $\mathcal{L}_2(H, \Phi)$ sur $\mathcal{L}_2(H, X)$, ce qui montre que les représentations $\pi_{(\Phi)}$ et $\pi_{(X)}$ sont unitairement équivalentes.

Nous obtenons comme sous-représentations de π_2 une infinité continue de représentations irréductibles de la C*-algèbre $\overline{\mathcal{M}_1(H,\sigma)}$.

DÉFINITION 1 : *Soit* $\Phi=\prod_{i\in I}\otimes\varphi_i$ *une* c_0*-suite d'éléments* φ_i *auto-adjoints indempotents et normalisés des algèbres* $\mathcal{L}_2(E_i, \sigma)$, i. e.

$$\varphi_i\times\varphi_i=\varphi_i,\qquad \varphi_i^*=\varphi_i,\qquad \|\varphi_i\|_2=\sqrt{\pi\varphi_i(0)}=1 \tag{5}$$

On appellera $\mathcal{H}_{\pi_\Phi}$ *le sous-espace hilbertien de* $\mathcal{L}_2(H,\sigma)$ *formé des éléments de la forme* $\mu\times\Phi$, $\mu\in\overline{\mathcal{M}_1(H,\sigma)}$ *et* μ_Φ *la restriction de la représentation* π_2 *à* $\mathcal{H}_{\pi_\Phi}$.

On obtient aussi la représentation π_Φ par la construction de Gelfand-Segal à partir de la forme positive $\varphi(\mu)=(\Phi\mid\pi_2(\mu)\Phi)$, que lorsque $\mu\in\overline{\mathcal{M}_1(E_J,\sigma)}$ nous pouvons écrire $\varphi(\mu)=\mu\left(\prod_{i\in J}\check{\varphi}_i\right)$.

La c_0-suite $\Omega = \prod_{i \in I} \otimes \Omega_i$, formée des fonctions de Gauss

$$\Omega_i(x^i, y^i) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^i)^2 - \frac{1}{2}(y^i)^2} \tag{6}$$

satisfait les conditions (5), on peut donc définir la représentation π_Ω, qui coïncide avec la représentation de Fock ([*1*], § 5). Les résultats que nous obtiendrons concernant les représentations π_Φ seront ainsi valables pour la représentation de Fock. Etant donné (3), un traitement analogue à celui de ([*2*], Ch. IV) permet d'obtenir la description détaillée de l'espace $\mathcal{H}_{\pi_\Omega}$ de la représentation de Fock, qui apparaît comme un espace de fonctions analytiques d'un nombre indéfini de variables complexes.

THÉORÈME 1 : π_Φ *est une représentation irréductible fidèle de la C^*-algèbre* $\overline{\mathcal{M}_1(H, \sigma)}$.

Démonstration : une représentation est irréductible si tout vecteur est cyclique. Il est évident que $\Phi \in \mathcal{H}_{\pi_\Phi}$ est un vecteur cyclique. Soit maintenant (3) un vecteur quelconque de $\mathcal{H}_{\pi_\Phi}$, alors ([*2*], formule (50))

$$\pi_2\Big(\prod_{i \in J} \varphi_i\Big) \Big[\Big\{ \mu \times \Big(\prod_{i \in J} \varphi_i\Big) \Big\} \otimes \Big\{ \prod_{i \in I-J} \otimes \varphi_i \Big\}\Big] = \varphi(\mu)\Phi \tag{7}$$

ce qui démontre qu'il s'agit aussi d'un vecteur cyclique. D'autre part $\| \pi_\Phi(\mu) \| = \| \mu \|$, donc la représentation π_Φ est fidèle.

§ 2. L'ALGÈBRE DE VON NEUMANN ENGENDRÉE

La représentation π_Φ étant irréductible, l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\Phi(\overline{\mathcal{M}_1(H, \sigma)})$ est $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\pi_\Phi})$. L'interprétation des différentes classes d'opérateurs de cette algèbre est très différente de celle que nous avons obtenue dans [*2*] pour un espace symplectique de dimension finie.

THÉORÈME 2 : $\pi_\Phi(\overline{\mathcal{M}_1(H, \sigma)})$ *ne contient aucun opérateur complètement continu sur l'espace de la représentation.*

Démonstration : ceci résultera du fait que $\pi_\Phi(\overline{\mathcal{M}_1(H, \sigma)})$ est située à une distance finie de tout projecteur. En effet soit $\mu \in \mathcal{M}_1(E_J, \sigma)$ et $f \in \mathcal{H}_{\pi_\Phi}$, alors

$$\| \,|f)(f| - \pi_\Phi(\mu) \,\| = \sup_{g \in \mathcal{H}_{\pi_\Phi}, \|g\|_2 = 1} \| (f|g)f - \pi_\Phi(\mu)g \|_2$$

Choisissons g orthogonal à f et à $\mathcal{H}_{\pi_\Phi} \cap \mathcal{L}_2(E_J, \sigma)$, alors

$$\| \, |f)(f| - \pi_\Phi(\mu) \, \| \geqq \| \pi_\Phi(\mu) g \|_2 = \| g + \text{vect. orthog. à } g \|_2 \geqq \| g \|_2 = 1.$$

Malgré cette différence, il est possible d'adapter l'étude faite dans [*2*] (Chap.II) concernant les opérateurs de Hilbert-Schmidt de la représentation de Schrödinger. Nous indiquons, sans le faire explicitement, que ceci permettrait alors d'obtenir ([1]) le formalisme de Wigner-Moyal pour les représentations π_Φ, et en particulier donc pour la représentation de Fock.

THÈORÈME 3 : *Soit* $\Phi = \prod_{i \in I} \otimes \varphi_i$ *une* c_0*-suite satisfaisant les conditions de la définition 1. Nous définissons alors la convolution gauche des deux* c_0*-suites de* $\mathcal{L}_2(H, \Phi)$ *par*

$$\left\{ \prod_{i \in I} \otimes \xi_i \right\} \times \left\{ \prod_{i \in I} \otimes \chi_i \right\} = \prod_{i \in I} \otimes \{ \xi_i \times \chi_i \} \tag{8}$$

et l'involution par

$$\left\{ \prod_{i \in I} \otimes \xi_i \right\}^* = \prod_{i \in I} \otimes \xi_i^* \tag{9}$$

Ceci définit le produit de convolution gauche et l'involution dans $\mathcal{L}_2(H, \Phi)$, *qui devient une algèbre hilbertienne.*

Démonstration : vérifions d'abord que les c_0-suites

$$\prod_{i \in I} \otimes \xi_i^* \qquad \text{et} \qquad \prod_{i \in I} \otimes \{ \xi_i \times \chi_i \}$$

sont encore équivalentes à Φ. En effet, dans $\mathcal{L}_2(H, \Phi)$, compte tenu de (5) on a :

$$(\varphi_i \mid \xi_i^*) = (\xi_i \mid \varphi_i) \tag{10}$$

$$(\varphi_i \mid \varphi_i \times \xi_i^*) = (\varphi_i \mid \xi_i^*) \tag{11}$$

$$(\varphi_i \mid \xi_i \times \chi_i) = (\varphi_i \times \xi_i^* \mid \chi_i) \tag{12}$$

([1]) Voir [2], Ch. III. Nous pouvons définir la transformation de Fourier symplectique sur $\mathcal{L}_2(H, \Phi)$ à partir des c_0-suites par :

$$\mathcal{F}\left(\prod_{i \in I} \otimes \varphi_i \right) = \prod_{i \in I} \otimes \{ \mathcal{F} \varphi_i \}$$

En sachant que $\prod_{i\in I} \otimes \varphi_i \approx \prod_{i\in I} \otimes \chi_i \approx \prod_{i\in I} \otimes \xi_i$, (10) montre que $\prod_{i\in I} \otimes \xi_i^* \approx \prod_{i\in I} \otimes \varphi_i$, et (11) montre que $\prod_{i\in I} \otimes \{ \varphi_i \times \xi_i^* \} \approx \prod_{i\in I} \otimes \varphi_i$, ce qui permet de déduire de (12) que $\prod_{i\in I} \otimes \{ \xi_i \times \chi_i \} \approx \prod_{i\in I} \otimes \varphi_i$. On peut alors étendre la convolution gauche aux combinaisons linéaires finies de c_0-suites. Soit f et g deux d'entre elles, on a d'après [2] (théorème 3).

$$\| f \times g \|_2 \leqq \| f \|_2 \| g \|_2$$
$$(f \mid g \times h) = (g^* \times f \mid h)$$
$$\| f^* \|_2 = \| f \|_2$$

ce qui permet d'étendre la convolution gauche par continuité à tout $\mathcal{L}_2(\mathrm{H}, \Phi)$, qui devient une algèbre hilbertienne (qu'on pourrait noter $\mathcal{L}_2(\mathrm{H}, \Phi, \sigma)$, pour indiquer que ce produit dépend de la structure symplectique de H).

Nous pouvons alors écrire la formule

$$\Phi \times \mu \times \Phi = \varphi(\mu)\Phi \tag{13}$$

qui est analogue à l'expression (50) de [2].

On définit de façon évidente $\pi_\Phi(f)$ pour $f \in \mathcal{L}_2(\mathrm{H}, \Phi)$ comme l'application $g \in \mathcal{H}_{\pi_\Phi} \to f \times g \in \mathcal{H}_{\pi_\Phi}$, le produit étant effectué dans $\mathcal{L}_2(\mathrm{H}, \Phi)$.

THÉORÈME 4 : *La représentation π_Φ applique isomorphiquement et isométriquement l'algèbre hilbertienne $\mathcal{L}_2(\mathrm{H}, \Phi)$ sur l'algèbre hilbertienne des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur l'espace $\mathcal{H}_{\pi_\Phi}$.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Si $\mathrm{P}_{\mathrm{E}_J}$ est le projecteur de $\mathcal{H}_{\pi_\Phi}$ sur $\mathcal{H}_{\mathrm{E}_J} = \mathcal{H}_{\pi_\Phi} \cap \mathcal{L}_2(\mathrm{E}_J, \sigma)$ (J partie finie de I), l'ensemble $\mathrm{P}_{\mathrm{E}_J} \mathfrak{A} \mathrm{P}_{\mathrm{E}_J}$ est formé des opérateurs qui annulent le complémentaire orthogonal du sous-espace $\mathcal{H}_{\mathrm{E}_J}$, laissent $\mathcal{H}_{\mathrm{E}_J}$ invariant et dont la restriction à $\mathcal{H}_{\mathrm{E}_J}$ consiste en les opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $\mathcal{H}_{\mathrm{E}_J}$. D'autre part l'opérateur $\pi_\Phi(g)$ où $g = g_0 \otimes \left\{ \prod_{i\in \mathrm{I}-\mathrm{J}} \otimes \varphi_i \right\}$, avec $g_0 \in \mathcal{L}_2(\mathrm{E}_J, \sigma)$ laisse invariant $\mathcal{H}_{\mathrm{E}_J}$ et annule son complément orthogonal. D'après le théorème 3 de [2] les algèbres hilbertiennes $\mathrm{P}_{\mathrm{E}_J} \mathfrak{A} \mathrm{P}_{\mathrm{E}_J}$ et

$$\mathcal{L}_2(\mathrm{E}_J, \sigma) \otimes \left\{ \prod_{i\in \mathrm{I}-\mathrm{J}} \otimes \varphi_i \right\}$$

sont isométriquement isomorphes. Et de même leur union pour toutes les parties finies de I. Puisque la première est dense dans $\mathfrak{A}$ du fait qu'elle contient les opérateurs de rang fini, et la deuxième dans $\mathfrak{L}_2(\mathrm{H}, \Phi)$, d'après le lemme 1, nous en déduisons l'isomorphisme isométrique de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{L}_2(\mathrm{H}, \Phi)$.

§ 3. COMPARAISON DES REPRÉSENTATIONS

Les deux théorèmes suivants concernent la relation entre les représentations que nous avons définies.

THÉORÈME 5 : *La représentation* $\pi_{(\Phi)}$ *de* $\overline{\mathcal{M}_1(\mathrm{H}, \sigma)}$ *dans* $\mathfrak{L}_2(\mathrm{H}, \sigma)$ *est un multiple de la représentation* π_Φ *(*Φ *satisfaisant les conditions de la définition 1).*

La démonstration est obtenue à partir de (13) de manière analogue à celle du corollaire du théorème 15 *a* de [*1*].

THÉORÈME 6 : *Les représentations* π_Φ *et* π_X *sont unitairement équivalentes si et seulement si les* c_0*-suites* $\Phi = \prod_{i \in \mathrm{I}} \otimes \varphi_i$ *et* $\mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \otimes \chi_i$ *sont équivalentes.*

Démonstration : Notons d'abord que Φ et X satisfaisant (5), on a $(\varphi_i \mid \chi_i) \geqq 0$ et les notions d'équivalence et quasi-équivalence de c_0-suites coïncident.

Supposons Φ et X non équivalentes et soient $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}} = \mathcal{H}_{\pi_\Phi} + \mathcal{H}_{\pi_\mathrm{X}}$ $\pi_{\mathrm{tot}} = \pi_\Phi + \pi_\mathrm{X}$ (i. e., la restriction de π_2 à $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$), $\mathcal{B}$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_{\mathrm{tot}}(\overline{\mathcal{M}_1(\mathrm{H}, \sigma)})$ et P le projecteur de $\mathcal{H}_{\mathrm{tot}}$ sur $\mathcal{H}_{\pi_\Phi}$. D'après [*4*] (proposition 5.2.4), π_Φ et π_X seront disjointes, donc inéquivalentes, si et seulement si P appartient au centre de $\mathcal{B}$, i. e., si $\mathrm{P} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$. Ceci montrera la condition nécessaire, la condition suffisante est immédiate.

Il est évident que $\mathrm{P} \in \mathcal{B}'$, il reste à voir que $\mathrm{P} \in \mathcal{B}$. Montrons d'abord que P_Φ, projecteur sur le vecteur $\Phi \in \mathcal{H}_{\pi_\Phi}$, appartient à $\mathcal{B}$. Ceci résultera du fait que P_Φ est fortement adhérent à l'ensemble d'opérateurs de la forme $\pi_{\mathrm{tot}}\left(\prod_{i \in \mathrm{J}} \varphi_i\right)$, où J est une partie finie quelconque de I. En effet, si $\mu \times \Phi$, avec $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathrm{E}_{\mathrm{J}'}, \sigma)$ est un vecteur de $\mathcal{H}_{\pi_\Phi}$, d'après (7) il suffit que $\mathrm{J} \supset \mathrm{J}'$ pour que $\left\{ \pi_{\mathrm{tot}}\left(\prod_{i \in \mathrm{J}} \varphi_i\right) - \mathrm{P}_\Phi \right\} (\mu \times \Phi) = 0$. Deuxièmement, si $\mu \times X$, avec $\mu \in \mathcal{M}_1(E_{J'}, \sigma)$ est un vecteur de $\mathcal{H}_{\pi_X}$, on peut rendre la norme

$$\left\| \pi_{tot}\Big(\prod_{i\in J}\varphi_i\Big)(\mu \times X)\right\|_2 = \left\| \Big\{\prod_{i\in J'}\varphi_i\Big\} \times \mu \times \Big\{\prod_{i\in J'}\chi_i\Big\}\right\|_2 \cdot \prod_{i\in J-J'} \| \varphi_i \times \chi_i \|_2$$

arbitrairement petite, car

$$\prod_{i\in I-J'} \| \varphi_i \times \chi_i \|_2 = \prod_{i\in I}(\varphi_i \mid \chi_i)^{\frac{1}{2}} = 0$$

puisque les deux c_0-suites sont inéquivalentes. Le projecteur P_f, sur un vecteur quelconque $f = \mu \times \Phi$ de $\mathcal{H}_{\pi_\Phi}$ appartient aussi à $\mathcal{B}$ puisque

$$P_f = \pi_{tot}(\mu)P_\Phi\pi_{tot}(\mu)$$

D'où $P \in \mathcal{B}$.

COROLLAIRE : *Si* $\Phi = \prod_{i\in I} \otimes \varphi_i$, $X = \prod_{i\in I} \otimes \chi_i$ *sont deux* c_0*-suites de vecteurs égaux* $\varphi_i = \varphi_0$, $\chi_i = \chi_0$, $i \in I$, *les représentations* π_Φ *et* π_X *seront équivalentes seulement si* $\varphi_0 = \chi_0$.

Nous considérons dans la définition 1 une c_0-suite $\Phi = \prod_{i\in I} \otimes \varphi_i$ d'éléments satisfaisant (5), ce qui d'après [2], Chap. II, entraîne $\pi^{-\frac{1}{2}}\varphi_i = f_i \times f_i^*$ où $f_i = f_i \times \Omega_i$ appartient à l'espace de Hilbert $\mathfrak{I}_{\Omega_i}$, et a pour norme $\omega(f_i^* \times f_i)^{\frac{1}{2}} = 1$. On construit donc une c_0-suite Φ à partir d'une c_0-suite $\prod_{i\in I} \otimes f_i$ quelconque d'éléments normalisés. C'est cette c_0-suite-ci qui correspond à celle utilisée par Klauder et McKenna dans [5]. La condition nécessaire et suffisante du théorème 6 s'écrit en utilisant ces c_0-suites

$$\sum_{i\in I} \big|\, | \omega(f_i^* \times g_i) | - 1 \,\big| < +\infty \qquad \text{où} \qquad \pi^{-\frac{1}{2}}\varphi_i = f_i \times f_i^*,\ \pi^{-\frac{1}{2}}\chi_i = g_i \times g_i^*$$

C'est la condition de quasi-équivalence des c_0-suites $\prod_{i\in I} \otimes f_i$ et $\prod_{i\in I} \otimes g_i$ puisque

$$\begin{aligned}(\varphi_i \mid \chi_i) &= \{ \varphi_i^* \times \chi_i \}(0) = \pi \{ f_i \times f_i^* \times g_i \times g_i^* \}(0) \\ &= \pi\omega(f_i^* \times g_i) \{ f_i \times g_i^* \}(0) = | \omega(f_i^* \times g_i) |^2\end{aligned}$$

La nécessité de cette condition pour l'équivalence des représentations est en accord avec le résultat de Klauder, McKenna et Woods, prouvé dans [*6*].

Ainsi à chaque classe de quasi-équivalence du produit tensoriel $\prod_{i\in I} \otimes \bar{\mathfrak{J}}_{\Omega_i}$ nous faisons correspondre une représentation irréductible essentiellement différente; leur ensemble a une puissance supérieure à celle du continu. On pourrait se demander si on a construit ainsi toutes les représentations irréductibles de la C*-algèbre $\overline{\mathcal{M}_1(H, \sigma)}$. Ceci n'est pas le cas, en fait nous pouvons construire par la même méthode une infinité de nouvelles représentations non équivalentes.

Considérons un ensemble J_k, $k \in K$ de parties finies disjointes de I telles que $\bigcup_{k\in K} J_k = I$. Dans chaque $\mathfrak{L}_2(E_{J_k}, \sigma)$ considérons un élément idempotent auto-adjoint normalisé ζ_k. En suivant la définition 1 on construit une représentation de $\overline{\mathcal{M}_1(H, \sigma)}$ dans un sous-espace de $\prod_{k\in K} \otimes \mathfrak{L}_2(E_{J_k}, \sigma)$. En faisant varier la c_0-suite $\prod_{k\in K} \otimes \zeta_k$ nous obtenons un ensemble de représentations irréductibles, qui inclut les représentations π_Φ et pour lesquelles un critère d'équivalence analogue au théorème 6 est encore valable. On voit facilement qu'on obtient des représentations réellement nouvelles, déjà par exemple avec les c_0-suites formées d'éléments égaux.

§ 4. EXTENSION DES REPRÉSENTATIONS A L'ESPACE COMPLÉTÉ

On s'intéressera aux représentations des relations de commutation canoniques sur un espace topologique $(\overline{H}, \sigma)$, par exemple, l'espace de Hilbert mono-particulaire pour les champs libres, l'espace des fonctions d'essai des distributions en théorie axiomatique, etc. Cet espace $(\overline{H}, \sigma)$ apparaît comme le complété de l'espace symplectique formel (H, σ) du paragraphe 1, et nous nous proposons d'étendre à $(\overline{H}, \sigma)$ les représentations définies sur (H, σ).

Considérons un vecteur $\mu \times \Phi = g \otimes \left\{ \prod_{i\in I-J} \otimes \varphi_i \right\}$, où $g \in \mathfrak{L}_2(E_J, \sigma)$, de $\mathcal{H}_{\pi_\Phi}$ et supposons $\psi = \sum_{i\in I} (x^i e_i + y^i f_i) \in \overline{H}$, cette somme peut être maintenant infinie, par exemple si $\overline{\mathrm{H}}$ est hilbertien nous considérons tous les ψ tels que $\sum_{i\in\mathrm{I}}[(x^i)^2 + (y^i)^2] < +\infty$. Appelons

$$\psi_{\mathrm{J}} = \sum_{i\in\mathrm{J}}(x^i e_i + y^i f_i) \qquad \psi_{\mathrm{I-J}} = \sum_{i\in\mathrm{I-J}}(x^i e_i + y^i f_i)$$

alors, formellement

$$(14) \qquad \delta_{\psi} \times \{ \mu \times \Phi \} = \{ \delta_{\psi_{\mathrm{J}}} \times g \} \otimes \Big\{ \prod_{i\in\mathrm{I-J}} \otimes \left[\delta_{x^i e_i + y^i f_i} \times \varphi_i\right] \Big\}$$

Pour que (14) soit une c_0-suite équivalente à Φ il faut que

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \left| \left(\varphi_i \,|\, \delta_{x^i e_i + y^i f_i} \times \varphi_i\right) - 1 \right| = \sum_{i\in\mathrm{I}} \left| \pi \left\{ \delta_{x^i e_i + y^i f_i} \times \varphi_i \times \varphi_i^* \right\} (0) - 1 \right|$$

$$= \sum_{i\in\mathrm{I}} | \pi\varphi_i(-x^i, -y^i) - 1 | = \sum_{i\in\mathrm{I}} | \pi\overline{\varphi_i(x^i, y^i)} - 1 | = \sum_{i\in\mathrm{I}} | \pi\varphi_i(x^i, y^i) - 1 | < +\infty$$

pour tout $\psi \in \overline{\mathrm{H}}$.

Cette condition entraîne la convergence du produit

$$(15) \qquad \varphi(\psi) = \prod_{i\in\mathrm{I}} \varphi(x^i, y^i)$$

pour tout $\psi \in \overline{\mathrm{H}}$, ce qui définit une fonctionnelle sur $\overline{\mathrm{H}}$ (de même aux autres c_0-suites de $\mathfrak{L}_2(\mathrm{H}, \Phi)$ correspondent des fonctionnelles sur $\overline{\mathrm{H}}$). Elle est satisfaite pour la représentation de Fock, car $\sum_{i\in\mathrm{I}}[(x^i)^2 + (y^i)^2] < +\infty$ entraîne $\sum_{i\in\mathrm{I}} | \pi\Omega_i(x^i, y^i) - 1 | < +\infty$.

La représentation unitaire de la droite $\pi_\Phi(\delta_{\lambda\psi})$, $-\infty < \lambda < +\infty$ est alors continue pour tout $\psi \in \overline{\mathrm{H}}$, ce qui permet de définir l'opérateur de champ $\mathrm{A}\{\psi\}$. En effet, il suffit de vérifier la continuité de la fonction

$$(\mu \times \Phi \,|\, \pi_\Phi(\delta_{\lambda\psi}) \,|\, \nu \times \Phi) = \{ f^* \times \delta_{\lambda\psi_{\mathrm{J}}} \times g \} (0) \Big\{ \prod_{i\in\mathrm{I-J}} \varphi_i(\lambda x^i, \lambda y^i) \Big\}$$

$$= \{ f^* \times g \} (\lambda\psi_{\mathrm{J}}) \Big\{ \prod_{i\in\mathrm{I-J}} \varphi_i(\lambda x^i, \lambda y^i) \Big\}$$

au point $\lambda = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J' de I telle que

$$\left| \prod_{i \in I-J} \varphi_i(\lambda x^i, \lambda y^i) - \prod_{i \in J'-J} \varphi_i(\lambda x^i, \lambda y^i) \right| < \varepsilon$$

et un nombre $\lambda_0 > 0$ tel que $|\lambda| < \lambda_0$ implique

$$\left| \{ f^* \times g \} (\lambda\psi_J) \left\{ \prod_{i \in J'-J} \varphi_i(\lambda x^i, \lambda y^i) - \{ f^* \times g \} (0) \right| < \varepsilon$$

puisque $f^* \times g$ et φ_i, $i \in I$, sont des fonctions continues, d'où

$$\left| \{ f^* \times g \} (\lambda\psi_J) \left\{ \prod_{i \in I-J} \varphi_i(\lambda x^i, \lambda y^i) \right\} - \{ f^* \times g \} (0) \right|$$
$$\leqq | \{ f^* \times g \} (\lambda\psi_J) | \cdot \left| \prod_{i \in I-J} \varphi_i(\lambda x^i, \lambda y^i) - \prod_{i \in J'-J} \varphi_i(\lambda x^i, \lambda y^i) \right|$$
$$+ \left| \{ f^* \times g \} (\lambda\psi_J) \left\{ \prod_{i \in J'-J} \varphi_i(\lambda x^i, \lambda y^i) \right\} - \{ f^* \times g \} (0) \right| < \| f \|_2 \, \| g \|_2 \, \varepsilon + \varepsilon$$

ce qui démontre la continuité.

$\Phi(\psi)$ étant défini sur tout $\overline{H}$, on considère alors comme dans [*1*] la C*-algèbre $\overline{\mathcal{M}_1(\overline{H}, \sigma)}$ et la forme définie par

$$\varphi(\mu) = \mu(\Phi \mid E) = \mu\left(\left\{ \prod_{i \in I} \varphi \right\} \middle| E \right)$$

si $\mu \in \mathcal{M}_1(E, \sigma)$ où maintenant E est un sous-espace de dimension finie quelconque de $\overline{H}$. $\varphi(\mu)$ est une forme linéaire positive sur $\overline{\mathcal{M}_1(\overline{H}, \sigma)}$ avec laquelle on obtient par la construction de Gelfand-Segal une représentation irréductible de $\overline{\mathcal{M}_1(\overline{H}, \sigma)}$ dont la restriction à $\overline{\mathcal{M}_1(H, \sigma)}$ coïncide avec la représentation π_Φ. Les inégalités

$$| \varphi(\mu) | \leqq \| \mu \|_1, \qquad \varphi(\mu^* \times \mu) \geqq 0$$

résultent de la convergence du produit infini, qui entraîne pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence d'une partie finie J de I telle que

$$\left| \varphi(\mu) - \mu\left(\left\{ \prod_{i \in J} \varphi_i \right\} \middle| E \right) \right| < \varepsilon$$

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à exprimer sa gratitude au Professeur D. Kastler qui l'a conseillé tout au long de ce travail. Il remercie également le Professeur G. Rideau auquel il est redevable d'utiles discussions.

RÉFÉRENCES

[1] KASTLER D., The C*-algebras of a free boson field I. *Comm. Math. Phys.*, t. 1, 1965, p. 14-18.

[2] LOUPIAS G. et MIRACLE-SOLE S., C*-algèbres des systèmes canoniques. I, *Comm. Math. Phys.*, t. 2, 1966, p. 31-48.

[2 a] LOUPIAS G. et MIRACLE-SOLE S., C*-algèbres des systèmes canoniques. II, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 6, 1966, p. 39-58.

[3] VON NEUMANN J., On infinite direct products. *Compos. Math.*, t. 6, 1938, p. 1-77.

[4] DIXMIER J., Les C*-algèbres et leurs représentations. Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[5] MCKENNA J. and KLAUDER J. R., Continuous representations theory V. *J. Math. Phys.*, t. 6, 1965, p. 68-87.

[6] MCKENNA J., KLAUDER J. R. and WOODS E. J., Direct product representations of the Canonical commutation relations. *J. Math. Phys.*, t. 7, 1966, p. 829-832.

(Manuscrit reçu le 5 septembre 1966).