ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

Expression de la largeur de raie des mésons p dans le modèle composé $N - \overline{N}$

Annales de l'I. H. P., section A, tome 6, nº 1 (1967), p. 73-87
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_1_73_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VI, n° 1, 1967, p. 73-87.

Section A :
Physique théorique.

Expression de la largeur de raie des mésons ρ dans le modèle composé $N - \overline{N}$ (*)

par

RAOELINA ANDRIAMBOLOLONA

RÉSUMÉ. — Nous donnons l'expression de la largeur de raie des mésons ρ dans le cas où on les considère comme particules composées $N - \overline{N}$. Nous montrons que dans une certaine approximation, l'expression de la largeur de raie que nous obtenons est en assez bon accord avec celle que l'on déduit de la condition d'unitarité (condition élastique). De même, nous indiquons comment on peut calculer la largeur de raie du méson ω dans le même modèle.

INTRODUCTION

Les mésons ρ, se décomposant en deux mésons π, sont habituellement considérés comme étant des états instables de deux pions. On suppose alors que la diffusion $\pi - \pi$ se fait par l'intermédiaire d'un méson ρ. Chew et Mandelstam [*2*] ont signalé la simplicité de ce modèle (les deux voies croisées sont identiques à la voie directe) qui a été utilisé pour vérifier la théorie du « bootstrap ». Malheureusement, si l'idée du bootstrap en elle-même est intéressante, les résultats numériques sont en net désaccord avec les valeurs expérimentales. Par ailleurs la condition d'unitarité de la matrice S (unitarité élastique) donne immédiatement la relation entre la largeur de

(*) Ce travail est une partie d'une thèse de Doctorat d'État qui sera soutenue devant la Faculté des Sciences de Marseille.

raie des mésons ρ et la constante de couplage $f_{\rho\pi\pi}$ des mésons ρ avec les mésons π [3].

Dans le présent article, nous considérons que les mésons ρ sont des états liés nucléon-antinucléon (nous pouvons d'ailleurs les appeler orthonucléonium par similitude avec l'orthopositronium); et nous nous proposons de déterminer la largeur de raie des mésons ρ dans ce modèle trop peu exploité jusqu'ici à cause de la trop grande énergie de liaison mise en jeu.

Dans un précédent article [1], en partant d'un champ de nucléon en interaction avec lui-même (interaction du type de Fermi), nous avons obtenu les expressions des opérateurs « physiques » de nucléon (N), d'antinucléon ($\overline{\mathrm{N}}$) et des états liés; et nous avons ainsi introduit les « fonctions de structure ». Dans la Section V de ce même travail, nous avons donné un modèle dans lequel nous interprétons les états liés obtenus comme étant les mésons π, η, ρ et ω, et nous avons pu calculer les constantes de couplage de ces mésons avec le nucléon. Maintenant, nous allons nous intéresser particulièrement aux mésons ρ car les calculs correspondants sont beaucoup plus simples en soulignant toutefois que la méthode s'applique parfaitement aussi pour le méson ω.

Connaissant les expressions des opérateurs d'annihilation et de création des mésons ρ en fonction des opérateurs de nucléon (N) et d'antinucléon ($\overline{\mathrm{N}}$), nous appliquons une méthode similaire à celle utilisée dans l'étude de l'annihilation du positronium pour calculer la largeur de raie des mésons ρ [4]. Nous obtenons ainsi une relation entre la largeur de raie des mésons ρ et les « fonctions de structure ». Celles-ci dépendent naturellement du modèle considéré. Dans les conditions suivantes :

— modèle relativiste pour les mésons ρ (dans ce modèle, les fonctions de structure s'obtiennent l'une de l'autre par la symétrie de croisement);

— approximation « large » à une paire;

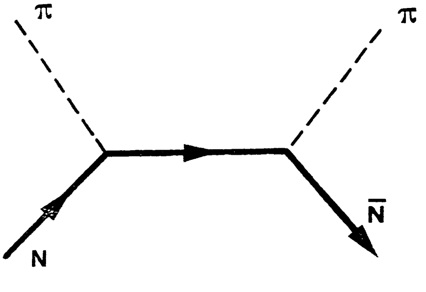
— hypothèse que l'annihilation $\mathrm{N} + \overline{\mathrm{N}}$ en deux pions se fait par l'intermédiaire d'un méson vectoriel (que nous supposerons être un méson ρ);

— en prenant la valeur expérimentale de la constante de couplage $f_{\rho\pi\pi}$ des mésons ρ avec les mésons π, valeur que notre théorie décrite dans [1] ne donne pas $\left(\frac{f^2_{\rho\pi\pi}}{4\pi} = 2\right)$; nous trouvons que la largeur de raie des mésons ρ est égale à 96 MeV, ce qui est en bon accord avec la valeur expérimentale (120 MeV). De même, si nous « court-circuitons » les variables nucléoniques (masse m du nucléon, constante de couplage g_V des mésons ρ avec le nucléon N, coupure) qui viennent toutes de la nature composite $N - \bar{N}$ des mésons ρ, il se révèle qu'il ne reste plus que les variables des mésons π et des mésons ρ; et nous obtenons pour la largeur de raie des mésons ρ une expression qui est en bon accord avec l'expression de la largeur de raie tirée de la condition d'unitarité élastique appliquée à l'étude de la diffusion $\pi - \pi$ dans l'hypothèse où un méson ρ est échangé. Ceci nous suggère alors l'hypothèse que les mésons ρ ont un aspect dual : à la fois états liés « stables » $N - \bar{N}$ et états « instables » de deux pions (nous disons qu'une particule composée est stable (instable) quand sa masse est inférieure (supérieure) à la somme des masses des particules constituantes).

SECTION I

ANNIHILATION D'UNE PAIRE LIBRE $N - \bar{N}$ EN DEUX PIONS

Avant de chercher à relier la largeur de raie aux fonctions de structure, nous allons étudier succinctement l'annihilation d'une paire libre $N - \bar{N}$ en deux pions. Les théories pseudo-scalaire et pseudo-vectorielle donnent au premier ordre de perturbation des résultats de l'ordre de mille fois trop grands par rapport à la valeur expérimentale. Aussi, pour l'amplitude d'annihilation $N - \bar{N}$, ne prendrons-nous pas le graphe suivant :



Les règles de sélection des interactions fortes (conservation de la parité, du moment angulaire, de la conjugaison de charge, de l'isoparité, de l'isospin) appliquées à l'annihilation $N + \bar{N}$ en deux pions permettent de dire que les états ${}^3_3S_1$, ${}^3_3D_1$ du système $N - \bar{N}$ sont possibles (nous avons utilisé la notation spectroscopique : ${}^{2S+1}_{2T+1}L_J$; L désigne le moment orbital, S le spin, J le moment angulaire total, T l'isospin total). Le premier état correspond exactement aux nombres quantiques des mésons ρ (nous rappelons que les mésons π, η, ρ et ω ont été respectivement assimilés dans le modèle composé [1] aux états ${}^1_3S_0$, ${}^1_1S_0$, ${}^3_3S_1$ et ${}^3_1S_1$ de nucléon-antinucléon). D'où la supposition que l'annihilation se fait par l'intermédiaire d'un méson ρ et nous rejoignons là de façon « naturelle » ce que la théorie vectorielle de l'interaction forte de Sakurai donne pour le phénomène d'annihilation.

a) Densités lagrangiennes d'interaction.

1° Pour l'interaction ρ — N, nous avons la densité lagrangienne suivante (qui est égale à la densité hamiltonienne)

$$\mathfrak{L}_I(\rho - N) = - i\bar{N}\frac{1}{2}\vec{\tau} g_V \gamma_\mu \vec{\rho}_\mu N \tag{I.a.1}$$

où N est l'opérateur de champ nucléonique,

$\vec{\tau}$ les matrices d'isospin de Pauli,

γ_μ les matrices de Dirac habituelles,

$\vec{\rho}_\mu$ l'opérateur de champ des mésons ρ,

g_V la constante de couplage vectoriel des mésons ρ avec le nucléon.

Nous rappelons que dans notre article [1], nous avons pu donner et calculer l'expression de la constante de couplage vectoriel g_V dans le cas du modèle composé $N - \bar{N}$.

2° Pour l'interaction $\mathfrak{L}_I(\rho - \pi\pi)$, nous avons la densité lagrangienne :

$$\mathfrak{L}_I(\rho - \pi\pi) = \frac{1}{2} f_{\rho\pi\pi}\vec{\rho}_\mu(\partial_\mu\vec{\pi} \wedge \vec{\pi} - \vec{\pi} \wedge \partial_\mu\vec{\pi}) \tag{I.a.2}$$

$\vec{\pi}$ étant l'opérateur de champs des mésons π. Nous voudrions souligner que la constante de couplage $f_{\rho\pi\pi}$ n'est pas donnée par notre théorie dans laquelle les mésons sont considérés comme des états liés de $N - \bar{N}$. Dans cet article, nous prendrons la valeur expérimentale $\left(\frac{f^2_{\rho\pi\pi}}{4\pi} = 2\right)$ sans toutefois oublier le fait suivant : il est parfaitement compréhensible qu'il est possible de *calculer* sa valeur à partir d'un modèle où les mésons seront considérés comme états instables de deux pions en étendant au cas des bosons le formalisme que nous avons développé pour l'interaction de Fermi [1].

b) L'amplitude de transition.

En utilisant les densités lagrangiennes (I.*a*.1) et (I.*a*.2), l'amplitude de transition $\mathcal{M}\begin{pmatrix}\vec{p}, \vec{q}\,; r, s \\ k_1, \alpha; k_2, \beta\end{pmatrix}$ de l'annihilation d'un nucléon d'impulsion $\vec{p}$, d'énergie $\varepsilon_{\vec{q}}$ de nombre quantique r et d'un antinucléon d'impulsion $\vec{q}$, d'énergie $\varepsilon_{\vec{p}}$, de nombre quantique s en deux pions déterminés par les quadri-impulsions k_1, k_2 et les nombres quantiques α et β s'écrit :

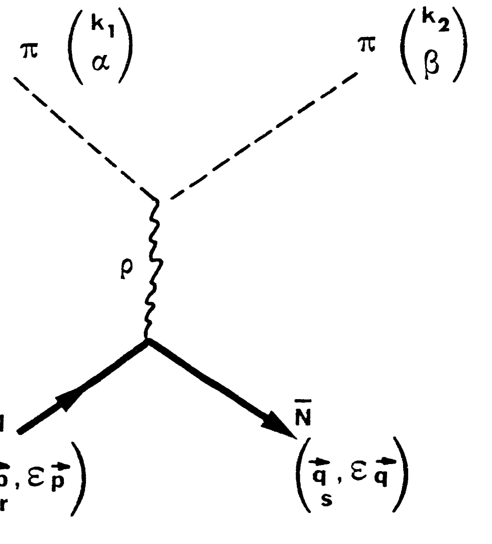
$$\text{(I.}b\text{.1)} \qquad \mathcal{M}\begin{pmatrix}\vec{p}, \vec{q}\,; r, s \\ k_1, \alpha\,; k_2, \beta\end{pmatrix} = \frac{i}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{m^2}{\varepsilon_{\vec{p}}\varepsilon_{\vec{q}}\, 2\omega_1\, 2\omega_2}}\; \frac{1}{Q^2 + \mu_\rho^2} \sum_{i=1,3} \varepsilon^{i\alpha\beta}(\tau_i)^{rs}$$
$$\left(\frac{1}{2} f_{\rho\pi\pi}\right)\bar{v}^{(s)}(\vec{q})\,\frac{1}{2}\, g_V \hat{A} u^{(r)}(\vec{p})$$

où

$$A = k_1 - k_2 \qquad \hat{A} = \gamma_\mu A_\mu \text{ (métrique } {+}{+}{+}{-}) \text{ (1)}$$
$$Q = k_1 + k_2 = p + q$$

$u^{(r)}(\vec{p})$ et $\bar{v}^{(s)}(\vec{q})$ sont les solutions de l'équation de Dirac. Remarquons aussi que la partie en $k_\mu k_\nu/\mu_\rho^2$ du propagateur des mésons ρ n'a aucune contribution car le produit scalaire quadridimensionnel A. Q est nul.

$\varepsilon^{i\alpha\beta}$ vient de l'interaction $\rho - \pi\pi$ et désigne le tenseur complètement antisymétrique du 3e ordre. μ_ρ est la masse des mésons ρ.



(1) A signifie le quadrivecteur $(\vec{A}, A_0)$.

SECTION II

EXPRESSION DE LA LARGEUR DE RAIE A PARTIR DU MODÈLE COMPOSÉ DES MÉSONS ρ

Nous allons nous intéresser seulement au cas du méson ρ^0 en laissant tomber l'indice de spin isotopique. Nous nous plaçons dans ce cas pour raison de simplicité.

Les mésons ρ ont été considérés comme états liés de $N - \overline{N}$. Dans l'approximation à une paire, l'état $\left| \rho^{\mu}_{\vec{k}} \right\rangle$ est donné par :

$$\text{(II.1)} \quad \left| \rho^{\mu}_{\vec{k}} \right\rangle = \sum_{r,s} \int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, \delta(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}) f^{\mu}_{r,s}(\vec{p}, \vec{q}) b^{+}_{\vec{p},r} d^{+}_{\vec{q},s} \,|\, 0 \rangle + \dots$$

Les points de suspension représentent les approximations d'ordre supérieur; la fonction $f^{\mu}_{r,s}(\vec{p}, \vec{q})$ est reliée aux fonctions de structure que nous avons par ailleurs déterminées. Elle dépend du spin et de l'isospin. $b^{+}_{\vec{p},r}$ et $d^{+}_{\vec{p},s}$ représentent les opérateurs de création d'un nucléon N et d'un antinucléon $\overline{N}$ d'impulsion $\vec{p}$, d'énergie $\varepsilon_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + m^2}$ (m est la masse du nucléon), de nombre quantique r. $|\, 0 \rangle$ désigne le vide des opérateurs « nus » de N et de $\overline{N}$ (²). La distribution $\delta(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k})$ montre que $\left| \rho^{\mu}_{\vec{k}} \right\rangle$ a une impulsion totale $\vec{k}$; et nous avons montré dans [*1*] que l'énergie n'est pas $\varepsilon_{\vec{p}} + \varepsilon_{\vec{q}}$ comme dans le cas d'une paire *libre* $N - \overline{N}$ mais qu'elle est égale à $\omega_k = \sqrt{k^2 + \mu^2}$ où μ est la masse des états liés qui sont ici les mésons ρ.

Nous nous proposons de chercher l'amplitude de transition $M\begin{pmatrix} \vec{k} & \\ k_1, & k_2 \end{pmatrix}$ d'un méson ρ réel considéré comme particule composé, d'impulsion-énergie $k = \left(\vec{k}, \ \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu_\rho^2}\right)$ se décomposant en deux pions paramétrés par leurs impulsions-énergies respectives k_1 et k_2. La probabilité

(²) Le vide $|\, 0 \rangle$ peut être considéré comme étant le vide « physique » c'est-à-dire le vide des opérateurs « physiques » car à l'approximation à une paire les opérateurs des états liés exprimés soit en fonction des opérateurs « nus » soit en fonction des opérateurs « physiques » ont les mêmes fonctions de structure (pour la terminologie, voir référence [*1*]).

d'annihilation par unité de temps Γ est alors donnée par la formule générale :

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} \$_f \bar{\$}_i \delta(\mathrm{P}_f - \mathrm{P}_i) \left\| \mathrm{M}\begin{pmatrix} \vec{k} \\ k_1, \; k_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \tag{II.2}$$

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int d^3\vec{k}_1 d^3\vec{k}_2 \left\| \mathrm{M}\begin{pmatrix} \vec{k} \\ k_1, \; k_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \delta^4(k_1 + k_2 - k) \tag{II.3}$$

Le temps de vie τ est $1/\Gamma$.

Le problème est maintenant d'essayer de trouver l'expression de $\mathrm{M}\begin{pmatrix} \vec{k} \\ k_1, k_2 \end{pmatrix}$.

Théoriquement, la matrice $\mathrm{M}\begin{pmatrix} \vec{k} \\ k_1, \; k_2 \end{pmatrix}$ de désintégration des mésons ρ en deux pions peut être exprimée au moyen des fonctions de structure des mésons ρ et des mésons π considérés tous les deux comme états liés $\mathrm{N} - \bar{\mathrm{N}}$. Cette façon de procéder suppose que l'on a obtenu l'expression du vide « physique » (c'est-à-dire le « vide » des opérateurs « physiques ») à une approximation supérieure à celle où nous nous sommes placé. Malheureusement, la recherche de l'expression du « vide physique » est très mal aisée. Aussi, faisons-nous l'hypothèse que seuls les mésons ρ sont des états liés $\mathrm{N} - \bar{\mathrm{N}}$, et que l'interaction $\rho - \pi\pi$ est donnée par la densité lagrangienne phénoménologique (I.*a*.2); et nous nous proposons de montrer que l'expression de la largeur de raie Γ ainsi obtenue est en bon accord avec celle tirée de la condition d'unitarité élastique dans la diffusion ππ.

Pour ce faire, nous allons suivre le raisonnement utilisé pour l'annihilation du positonium [*4*]. Les opérateurs des mésons ρ sont donnés comme superposition des produits d'opérateurs de N et de $\bar{\mathrm{N}}$ « nus » mais ayant la même masse que le N et le $\bar{\mathrm{N}}$ « physiques » comme nous l'avons signalé dans la référence [*1*]. La fonction $f^{\mu}_{r,s}(\vec{p}, \vec{q})$ dans la formule (II.1) peut alors être interprétée comme étant la fonction d'onde du système $\mathrm{N} - \bar{\mathrm{N}}$ dans l'espace des impulsions. L'amplitude de transition pour l'annihilation de l'ortho-nucléonium (qui est assimilé au méson ρ) est donc donnée par :

$$\mathrm{M}\begin{pmatrix} \vec{k} \\ k_1, \; k_2 \end{pmatrix} = \sum_{r,s} \int d^3\vec{p}\, d^3\vec{q}\, \delta(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}) \varphi^{r,s}(\vec{p}, \vec{q}) \mathcal{M}\begin{pmatrix} \vec{p}, \vec{q}\,;\, r, s \\ k_1, \; k_2 \end{pmatrix} \tag{II.4}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{r,s}(\vec{p}, \vec{q}) &= f^{\mu}_{r,s}(\vec{p}, \vec{q}) \cdot i \left(\frac{k_1 - k_2}{\sqrt{2\omega_1}\sqrt{2\omega_2}} \right)_{\mu} \\ &= i l_{\vec{k}}(\vec{p}, \vec{q}) \sqrt{\frac{m}{\varepsilon_{\vec{p}}}} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon_{\vec{q}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}} \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) \hat{\mathrm{A}} v^s(\vec{q}) \end{aligned} \tag{II.5}$$

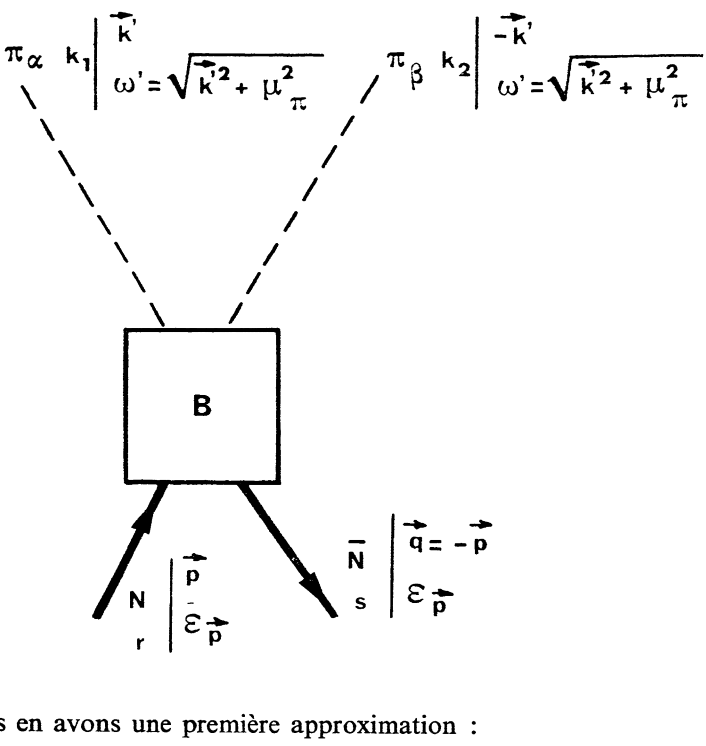
$$A = k_1 - k_2 \qquad \widehat{A} = \gamma_\mu A_\mu \qquad A = (\vec{A}, A_0)$$

$l_{\vec{k}}(\vec{p}, \vec{q})$ est relié de façon simple aux fonctions de structure des mésons ρ. Nous avons contracté dans la formule (II.5) l'indice μ de $f^{\mu}_{r,s}(\vec{p}, \vec{q})$ par

$$i\left(\frac{k_1 - k_2}{\sqrt{2\omega_1}\sqrt{2\omega_2}}\right)_\mu$$

car les deux mésons finaux sont dans l'état P.

$\mathcal{M}\begin{pmatrix}\vec{p}, \vec{q}; r, s\\ k_1, k_2\end{pmatrix}$ dans (II.4) est l'amplitude de transition de la paire $N-\bar{N}$ en l'état final déterminé par k_1 et k_2. Le problème est maintenant de trouver son expression.



Nous en avons une première approximation :

$$\text{(II.6)} \quad \mathcal{M}\begin{pmatrix}\vec{p}, \vec{q}; r, s\\ k_1, k_2\end{pmatrix} = \frac{i}{(2\pi)^2}\sqrt{\frac{m^2}{\varepsilon_{\vec{p}}\varepsilon_{\vec{q}}\, 2\omega_1\, 2\omega_2}}\frac{1}{\overline{Q}^2 + \mu_\rho^2} \times \sum_{i=1,3} \varepsilon^{i\alpha\beta}(\tau_i)^{r,s}\left(\frac{1}{2} f_{\rho\pi\pi}\right) v^s(\vec{q}) \frac{1}{2} g_V \widehat{A} u^r(\vec{p})$$

$$Q = (\vec{p} + \vec{q},\ \varepsilon_{\vec{p}} + \varepsilon_{\vec{q}}) \qquad A = k_1 - k_2$$

Cette formule est obtenue en utilisant les densités lagrangiennes (I.*a*.1) et (I.*a*.2) et en supposant que l'annihilation N — $\overline{\mathrm{N}}$ en deux pions se fait par l'intermédiaire d'un méson ρ élémentaire *virtuel*. Le facteur $\dfrac{1}{\overline{Q}^2 + \mu_\rho^2}$ vient du propagateur du méson ρ après intégration sur cette ligne interne. Dans le système de centre de masse ($\vec{k} = \vec{0}$), le quadrivecteur Q est égal à $(\vec{0}, 2\varepsilon_{\vec{p}})$ et nous voyons que :

$$\overline{Q}^2 + \mu_\rho^2 = -4\varepsilon_{\vec{p}}^2 + \mu_\rho^2 = -\left(4\vec{p}^{\,2} + 4m^2 - \mu_\rho^2\right)$$

ne peut s'annuler car $\mu_\rho < 2m$. C'est pourquoi nous avons enlevé le ε du propagateur ([3]). Du fait que nous avons un état lié, $\varepsilon_{\vec{p}} + \varepsilon_{\vec{q}}$ n'est pas égal à $\omega_{\vec{k}}$ comme nous l'avons déjà signalé. Le quadrivecteur $Q = (\vec{p} + \vec{q} = \vec{k},\ \varepsilon_{\vec{p}} + \varepsilon_{\vec{q}})$ dans la formule (II.6) et le quadrivecteur $k = (\vec{k}, \omega_{\vec{k}})$ dans la formule (II.3) sont donc différentes ([4]).

Nous nous intéressons au méson ρ^0; les indices d'isospin α et β prennent les valeurs 1 et 2 donc, car au méson ρ^0 correspond la matrice d'isospin τ_3 dans le modèle composé N — $\overline{\mathrm{N}}$.

Pour l'intégration, nous nous plaçons dans le système de centre de masse. En écrivant que :

$$\frac{1}{\overline{Q}^2 + \mu_\rho^2} = \frac{1}{-4\varepsilon_{\vec{p}}^2 + \mu_\rho^2} = \frac{1}{2\mu_\rho}\left(\frac{1}{2\varepsilon_{\vec{p}} + \mu_\rho} - \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{p}} - \mu_\rho}\right)$$

et après avoir sommé sur les indices de spin *r* et *s* en utilisant les projecteurs $\Lambda_\pm(\vec{p})$ bien connus, nous obtenons que :

$$\Gamma = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^4}\left(\frac{l}{\mu_\rho}\right)^5\left(\frac{f_{\rho\pi\pi}}{2}\right)^2 \mathrm{I}^2 \qquad \text{(II.7)}$$

([3]) On peut tenir compte de la largeur de raie Γ du ρ dans la formule (II.6) en remplaçant μ_ρ^2 par $\mu_\rho^2 - i\Gamma\mu_\rho$. Comme le dénominateur $\overline{Q}^2 + \mu_\rho^2$ ne s'annule pas, on peut négliger $\Gamma\mu_\rho$ devant μ_ρ^2 en première approximation.

([4]) Remarquons que dans la « boîte » B (« black box ») (voir fig.) nous n'avons pas, comme c'est le cas dans l'annihilation d'une paire *libre* de N et de $\overline{\mathrm{N}}$, $2\varepsilon_{\vec{p}} = 2\omega'$; $2\omega' = \mu_\rho$ et $2\varepsilon_{\vec{p}} \neq \mu_\rho$. Ceci vient du fait que le système $\overline{\mathrm{N}}$ — N forme un état lié et qu'il existe une énergie de liaison.

où :

(II.8) $$l^2 = \mu_\rho^2/4 - \mu_\pi^2$$

est le carré de l'impulsion d'un des mésons π dans le système de centre de masse.

μ_ρ désigne la masse des mésons ρ, μ_π celle des mésons π, et m celle du nucléon.

(II.9) $$I = 4\int d^3\vec{p} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{p}} - \mu_\rho} - \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{p}} + \mu_\rho} \right\} l_0(\vec{p}) \left\{ 1 - \frac{\vec{p}^2}{3\varepsilon_{\vec{p}}^2} \right\} \left(\frac{1}{2} g_V\right) \text{(5)}$$

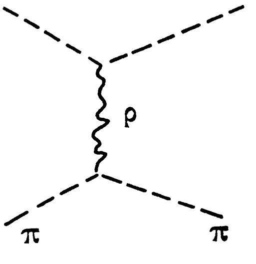
Le facteur $\left\{ 1 - \frac{\vec{p}^2}{3\varepsilon_{\vec{p}}^2} \right\}$ vient du calcul de la trace qui s'introduit à partir de la sommation sur les spins r et s.

$$\varepsilon_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Remarque : Nous voyons aisément que la largeur de raie Γ a bien la dimension d'une énergie dans le système naturel, car la dimension de l'amplitude $\mathcal{M}\begin{pmatrix} \vec{p}, \vec{q}; r, s \\ k_1, k_2 \end{pmatrix}$ dans (II.6) est $[M^{-2}]$ et celle de $\varphi^{r,s}(\vec{p}, \vec{q})$ dans (II.5) est $[M^{-3/2}]$.

La formule (II.7) donne la relation entre la largeur de raie et la fonction $l_{\vec{k}}(\vec{p}, \vec{q})$ introduite dans la formule (II.5). Cette dernière fonction est reliée aux fonctions de structure, et dépend donc du modèle considéré.

Remarque : Faisons remarquer que l'expression de la largeur de raie (II.7) est complètement différente de celle obtenue en écrivant la condition d'unitarité de la matrice S pour la diffusion $\pi - \pi$ suivant le diagramme :



(5) $l_0(\vec{p})$ est la fonction $l_{\vec{k}}(\vec{p}, \vec{q})$ pour $\vec{k} = 0$. Remarquer que $\vec{q} = -\vec{p} + \vec{k}$.

La condition d'unitarité élastique dans la diffusion $\pi - \pi$ donne la relation suivante entre la largeur de raie et la constante de couplage $f_{\rho\pi\pi}$ [3]

$$\Gamma = \frac{2}{3}\frac{f^2_{\rho\pi\pi}}{4\pi} \cdot \frac{l^3}{\mu_\rho^2} \quad (6) \tag{II.10}$$

et ne fait intervenir que la constante de couplage $f_{\rho\pi\pi}$ et les masses des mésons π et des mésons ρ. Dans notre formule (II.7), elle dépend à la fois des masses des mésons π et ρ, de la constante de couplage $f_{\rho\pi\pi}$, mais aussi de la masse m du nucléon, de la constante de couplage g_V, et de la coupure Λ. Ces variables nucléoniques s'introduisent à cause de la nature composite des mésons ρ.

Toutefois, il est possible de « court-circuiter » la dépendance de la largeur de raie en fonction des paramètres nucléoniques dans certaines approximations. Et la largeur de raie ne dépend plus que de μ_ρ, μ_π et $f_{\rho\pi\pi}$.

Pour ce faire, considérons le modèle composé relativiste des mésons ρ que nous avons étudié dans la référence [1]. Rappelons les résultats que nous avons trouvés :

— il y a deux fonctions de structure pour les mésons ρ et la valeur $l_0(\vec{p})$ de la fonction $l_{\vec{K}}(\vec{p}, \vec{q})$ dans (II.5) pour $\vec{K} = 0$ est donnée par :

$$l_0(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{I_0}} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{p}} - \mu_\rho} + \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{p}} + \mu_\rho} \right\} \tag{II.11}$$

où I_0 est le facteur de normalisation :

$$I_0 = 4 \int d^3\vec{p} \left\{ \frac{1}{(2\varepsilon_{\vec{p}} - \mu_\rho)^2} - \frac{1}{(2\varepsilon_{\vec{p}} + \mu_\rho)^2} \right\} \tag{II.12}$$

— la constante de couplage ρ — N est donnée par :

$$\frac{g_V'^2}{4\pi} = 4\pi^2 \frac{\mu_\rho}{I_0} \qquad \text{où} \qquad g_V' = \frac{1}{2} g_V \quad (7) \tag{II.13}$$

L'intégrale I dans (II.9) et le facteur de normalisation I_0 dans (II.12) divergent si nous ne faisons pas de coupure. Cette dernière a été calculée,

---

(6) l a la même signification que dans la formule (II.8).

(7) Pour la définition de g_V', il suffit de voir la densité lagrangienne (I.a.1).

et sa valeur pour la coupure en impulsion pour les mésons ρ est égale à $p_{\max} = 0{,}75$ m (Cette coupure en impulsion correspond à une coupure « covariante » égale à $w_{\max} = 6{,}29$ m²).

Si nous portons la valeur de $l_0(\vec{p})$ donnée par (II.11) dans l'expression (II.9) de I, nous pouvons écrire que :

$$\text{(II.14)} \qquad \mathrm{I} \approx \frac{1}{2} g_{\mathrm{V}} \sqrt{\mathrm{I}_0}$$

car le terme en $\frac{\vec{p}^2}{3\varepsilon_p^2}$ est négligeable en face du premier (⁸). En tenant compte de la relation (II.13) et en portant la valeur de I dans (II.7), nous voyons que la largeur de raie s'écrit :

$$\text{(II.15)} \qquad \Gamma = \frac{1}{2} \frac{(f^2_{\rho\pi\pi})^2}{4\pi} \frac{l^5}{\mu_\rho^4} . 4$$

Les variables nucléoniques ont été « court-circuitées » et il ne reste plus que les masses μ_ρ, μ_π et la constante de couplage $f_{\rho\pi\pi}$. Si nous négligeons la masse μ_π devant la masse μ_ρ, la formule (II.15) donne dans l'approximation de l'ordre de 15 % :

$$\text{(II.16)} \qquad \begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2} \frac{f^2_{\rho\pi\pi}}{4\pi} \cdot \frac{1}{8} \mu_\rho \\ &= \frac{\mu_\rho}{8} = \frac{765}{8} \mathrm{MeV} \qquad \text{si} \qquad \frac{f^2_{\rho\pi\pi}}{4\pi} = 2 \\ &= 95 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Cette valeur est en assez bon accord avec la valeur expérimentale (120 MeV). Dans la même approximation, l'expression de la largeur de raie (II.10) tirée de la condition de l'unitarité de la matrice S dans la diffusion $\pi - \pi$ s'écrit :

$$\text{(II.17)} \qquad \Gamma \approx \frac{2}{3} \frac{(f^2_{\rho\pi\pi})}{4\pi} \frac{\mu_\rho}{8}$$

La formule (II.16) diffère de la formule (II.17) du facteur $\frac{1}{2}$ (0,50) au lieu de 2/3 (0,66). La formule (II.17) donne d'ailleurs $\Gamma = \mu_\rho/6 = 127$ MeV.

(⁸) Voir Section III. Discussion.

SECTION III

DISCUSSION ET CONCLUSION

Avant de discuter la signification de ce résultat, signalons que le terme que nous avons laissé tomber dans la Section II est négligeable. En tenant compte de sa contribution, I défini dans (II.9) devient égal à :

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} g_{\mathrm{V}} \sqrt{\mathrm{I}_0} \left\{ 1 - \frac{4\mu_\rho}{\mathrm{I}_0} \times 0{,}06 \right\}$$

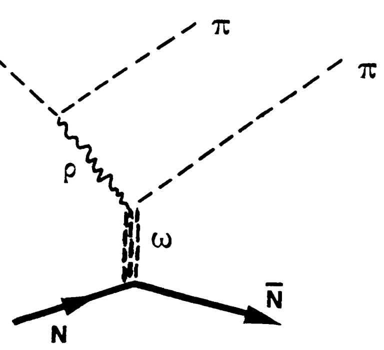
Comme $\frac{4\mu_\rho}{\mathrm{I}_0}$ est de l'ordre de 1, le second terme peut être négligé en face de 1. Si nous en tenons compte, nous trouverons au lieu de 95 MeV, la valeur de 85 MeV, c'est-à-dire une diminution de l'ordre de 10 %. Vu l'approximation que nous avons faite pour écrire la matrice $\mathcal{M}\begin{pmatrix} \vec{p}, \vec{q}; r, s \\ k_1, k_2 \end{pmatrix}$ dans l'annihilation d'une paire $\mathrm{N} + \overline{\mathrm{N}}$ en deux pions, nous n'avons pas la prétention de retrouver exactement la valeur expérimentale. Notre but est de montrer qu'il est possible de calculer la largeur de raie des mésons ρ à partir du modèle composé $\mathrm{N} - \overline{\mathrm{N}}$ en utilisant les résultats que nous avons trouvés par ailleurs, à savoir la constante de couplage ρ — NN. La valeur obtenue pour la largeur de raie n'est pas en complet désaccord avec l'expérience.

Nous pouvons tenir compte des contributions d'autres mésons dans la matrice $\mathcal{M}\begin{pmatrix} \vec{p}, \vec{q}; r, s \\ k_1, k_2 \end{pmatrix}$, par exemple le méson f de masse 1 253 MeV et de nombre quantique 0 (2^{++}) ou les mésons B de masse 1 220 MeV et de nombre quantique 1 $(\geq 1\,?^{+})$.

(NOTATION : I $(\mathrm{J}^{\mathrm{PG}})$; I : isospin; J : moment angulaire total; P : parité; G : isoparité). Les contributions de ces mésons viennent s'ajouter à la contribution d'un méson ρ et déplacent donc la valeur de la largeur de raie dans la bonne direction. Pour les constantes de couplage de ces mésons avec les mésons π, nous pouvons supposer qu'elles sont du même ordre de grandeur que celle des mésons ρ avec les mésons π car ces particules ont toutes « à peu près » la même largeur de raie et « approximativement » la même masse. Malheureusement, nous n'avons aucune indication sur l'interaction de ces mésons avec le nucléon.

Signalons aussi que l'on peut introduire un couplage tensoriel entre les mésons ρ et le nucléon, et déterminer la valeur de cette constante de couplage tensoriel de façon à obtenir la largeur de raie expérimentale.

Pour le méson ω, nous avons aussi déterminé les fonctions de structure, et on peut calculer la largeur de raie correspondante en utilisant la technique décrite ci-dessus. L'annihilation se fait en donnant trois pions, et pour la matrice $\mathcal{M}\begin{pmatrix} \vec{p}, \vec{q}; & r, s \\ k_1, k_2 & \end{pmatrix}$, on peut prendre la matrice de transition correspondant au diagramme suivant :



Pour l'interaction $\omega\rho\pi$, on peut prendre la densité lagrangienne suivante :

$$if_{\omega\rho\pi}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\partial_\alpha\omega_\beta)\,(\partial_\gamma\vec{\rho}_\delta)\,.\,\vec{\pi}$$

où $f_{\omega\rho\pi}$ est la constante de couplage $\omega\rho\pi$; $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur complètement anti-symétrique du 4[e] ordre; ω, $\vec{\rho}$, $\vec{\pi}$ sont les opérateurs de champ des mésons ω, ρ et π; $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$. Il y a sommation sur les indices répétés. Remarquons que la dimension de $f_{\omega\rho\pi}$ est $[M]^{-1}$ tandis que $f_{\rho\pi\pi}$ est sans dimension. Cette façon de procéder peut donner une idée sur la grandeur de la constante de couplage $f_{\omega\rho\pi}$ car la largeur de raie du méson ω est assez faible (12 MeV). *A priori*, on ne peut rien dire. Nous n'avons pas fait les calculs, car ils sont beaucoup plus compliqués que ceux pour les mésons ρ.

Pour terminer, nous voudrions insister sur le fait suivant qui est le but de notre article : en « court-circuitant » les variables nucléoniques (masse du nucléon, constante de couplage ρ — N, coupure) venant du modèle composé N — $\bar{\text{N}}$ des mésons ρ, nous avons obtenu pour la largeur de raie une expression en bon accord avec la largeur de raie déduite de la condition