ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

LUIS BEL
ADNAN HAMOUI

# Les conditions de raccordement en relativité générale

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 7, nº 3 (1967), p. 229-244
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_3_229_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. VII, nº 3, 1967, p. 229-244.

Section A :
*Physique théorique.*

# Les conditions de raccordement en relativité générale

par

**Luis BEL et Adnan HAMOUI**
Institut Henri Poincaré, Paris.

SOMMAIRE. — Nous considérons le problème du raccordement, au sens de Lichnerowicz, de deux métriques riemanniennes de type hyperbolique normal. Les vraies inconnues du problème sont précisées ainsi que le degré d'arbitraire que comporte sa solution quand elle existe.

Nous établissons un programme général permettant de décider si deux telles métriques sont raccordables.

Nous appliquons ce programme à une classe de solutions à symétrie sphérique des équations d'Einstein correspondant à une distribution matérielle du type normal, et nous démontrons que toutes les solutions de cette classe sont raccordables à celle de Schwarzschild pourvu que la pression radiale s'annule sur une hypersurface orientée dans le temps.

SUMMARY. — The problem of matching, in the sense of Lichnerowicz, two Riemannien metrics of normal hyperbolic type is considered. The true unknowns of the problem and the degree of arbitrariness involved in its solution, whenever it exists, are precised.

A general program permitting to decide on the possibility of matching two metrics is established.

This program is applied to a spherically symmetric class of solutions of Einstein's field equations corresponding to a normal material-energy tensor, and it is shown that all such solutions can be matched with Schwarzschild's exterior solution provided that the radial pressure vanishes on a time-like hypersurface.

## INTRODUCTION

Le problème du raccordement local de deux métriques données se pose de manière inévitable dans l'étude des configurations finies et plus particulièrement dans l'étude des systèmes finis ayant la symétrie sphérique. Dans cette direction le problème que l'on se pose le plus souvent est celui d'établir la possibilité de raccorder localement une solution donnée à symétrie sphérique des équations d'Einstein du cas intérieur, à celle de Schwarzschild. La résolution de tels problèmes de raccordement permet dans ces cas particuliers, non seulement d'obtenir des modèles complets mais encore d'attribuer des masses effectives aux configurations envisagées et de préciser l'évolution de leurs surfaces frontières.

Il nous a semblé utile, avant de nous intéresser à des cas particuliers possédant la symétrie sphérique, de considérer le problème général de deux métriques quelconques données. Nous énonçons ainsi un lemme qui précise quelles sont les vraies inconnues du problème, et le degré arbitraire que comporte sa solution quand il y en a une. Nous établissons aussi un programme général qui permet en principe de décider si deux telles métriques sont raccordables ou pas et qui dans le cas favorable conduit tout droit aux fonctions de transformation correspondantes.

Nous illustrons la méthode générale par l'étude détaillée d'un cas particulier et nous prouvons que toute solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein correspondant à un tenseur impulsion-énergie normal est localement raccordable à la solution de Schwarzschild pourvu que la pression radiale s'annule sur une hypersurface orientée dans le temps.

## 1. — MÉTRIQUES RACCORDABLES : DÉFINITION

*a)* Soit $\underset{1}{ds^2}$ une métrique riemannienne définie sur un ouvert connexe $O_1$ de $R_n$ sur lequel elle est de classe $C^3$. Nous noterons $g_1(x)$ et $\Gamma_1(x)$ ($x \in O_1$), le tenseur métrique covariant et la connexion riemannienne correspondante. Soit $\underset{2}{ds^2}$ une deuxième métrique riemannienne de même type et même signature que $\underset{1}{ds^2}$, définie sur un ouvert $O_2$ connexe de $R_n$ sur lequel elle est de classe $C^3$. Nous noterons $g_2(x')$ et $\Gamma_2(x')$ ($x' \in O_2$) le tenseur symétrique covariant et la connexion riemannienne correspondante.

*Définition.* — Nous disons que $\underset{1}{ds^2}$ et $\underset{2}{ds^2}$ sont localement raccordables au sens de Lichnerowicz s'il existe :

I. — Une transformation $\varphi$ de $R_n$ de classe $C^4$ sur un ouvert D connexe et telle que :

1) l'intersection de D et $O_1$ ne soit pas vide,
2) l'intersection de $\varphi(D)$ et $O_2$ ne soit pas vide,
3) l'ensemble $\Sigma$ de points $x$, qui est un ouvert, tels que $x \in O_1 \cap D$ et dont l'image $x' = \varphi(x)$ est contenue dans $O_2$ ne soit pas vide.

II. — Une hypersurface S de classe $C^4$ partageant $\Sigma$ en deux parties, notées $\Sigma^+$ et $\Sigma^-$, et telle que pour tout $x \in S \subset \Sigma$ on ait :

$$(\varphi^* g_2)(x) = g_1(x) \qquad (\varphi^* \Gamma_2)(x) = \Gamma_1(x) \tag{1}$$

$\varphi^*$ étant l'application réciproque de $\varphi$.

Si $\underset{1}{ds^2}$ et $\underset{2}{ds^2}$ sont localement raccordables on peut définir sur $\Sigma$ une métrique $ds^2$ de classe $C^1$, $C^3$ par morceaux. Il suffit en effet de définir le tenseur covariant $g(x)$ correspondant de la manière suivante :

$$\begin{aligned} g(x) &= g_1(x) &\quad \text{si} \quad & x \in \Sigma^+ \\ g(x) &= (\varphi^* g_2)(x) &\quad \text{si} \quad & x \in \Sigma^- \end{aligned} \tag{2}$$

*Remarque.* — Naturellement $\Sigma^+$ et $\Sigma^-$ peuvent être interchangées dans (2). Des considérations particulières à un problème donné pourront cependant décider du choix qu'il convient de faire. D'autre part, il est clair que l'intérêt du problème de raccordement peut dépendre de la possibilité de définir la métrique $ds^2$ sur un domaine plus large que $\Sigma$. Nous n'entrerons pas ici dans ce genre de considérations.

*b)* Nous venons de préciser ce que nous entendons par deux métriques localement raccordables. Dorénavant nous éviterons de préciser chaque fois les points de détail concernant les classes de différentiabilité et les domaines de définition des différents objets géométriques introduits. D'autre part nous aurons constamment à écrire par la suite des équations qui n'auront un sens que sur une hypersurface S. Nous omettrons souvent de préciser « sur S » mais conviendrons d'utiliser toujours le signe $\sim$ pour désigner une égalité dont un des membres au moins n'ait de sens que sur S.

Nous résumons et explicitons les formules de l'alinéa *a)* de la manière suivante :

Soient

$$(3)\qquad \begin{aligned} \underset{1}{ds^2} &= \underset{1}{g}_{\alpha\beta}(x^\rho)dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha,\ \beta,\ \ldots = 0, 1, 2, \ldots n) \\ \underset{2}{ds^2} &= \underset{2}{g}_{\lambda'\mu'}(x^{\rho'})dx^{\lambda'}dx^{\mu'} \qquad (\lambda',\ \mu',\ \ldots = 0, 1, 2, \ldots n) \end{aligned}$$

deux métriques riemanniennes de même type et même signature.

*Définition.* — Nous dirons que les deux métriques (3) sont raccordables s'il existe des fonctions

$$(4)\qquad x^{\lambda'} = x^{\lambda'}(x^\alpha)$$

dont le jacobien ne soit pas nul, et une hypersurface S d'équation locale $f(x^\alpha) = 0$ telles que sur S on ait

$$(5)\qquad \underset{1}{g}_{\alpha\beta}(x^\rho) \sim A^{\lambda'}_\alpha A^{\mu'}_\beta \underset{2}{g}_{\lambda'\mu'}(x^{\sigma'}(x^\rho))$$

$$(6)\qquad \underset{1}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}(x^\rho) \sim A^\gamma_{\nu'} A^{\lambda'}_\alpha A^{\mu'}_\beta \underset{2}{\Gamma}{}^{\nu'}_{\lambda'\mu'}(x^{\sigma'}(x^\rho)) + A^\gamma_{\nu'}\partial_\alpha A^{\nu'}_\beta$$

où

$$(7)\qquad A^{\gamma'}_\alpha = \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\alpha} \quad , \quad A^{\gamma'}_\alpha A^\beta_{\gamma'} = \delta^\beta_\alpha$$

## 2. — LES CONDITIONS DE RACCORDEMENT EN REPÈRES RECTILIGNES

*a)* Avant d'examiner en détail le contenu des conditions de raccordement (5) et (6) nous allons les reformuler sous une autre forme qui est plus adaptée, croyons-nous, aux calculs dans des cas particuliers. Pour cela nous rappelons ci-dessous quelques formules fondamentales de la théorie des connexions riemanniennes en repères rectilignes.

Soit $\eta_{\alpha\beta}$ un ensemble de constantes quelconques mais telles que la forme quadratique $\eta_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta$ ait même type et même signature que (3). Nous savons que (3) pourront se décomposer de la manière suivante :

$$(8)\qquad \begin{aligned} \underset{1}{ds^2} &= \eta_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta \\ \underset{2}{ds^2} &= \eta_{\rho'\sigma'}\theta^{\rho'}\theta^{\sigma'} \qquad (\eta_{\rho'\sigma'} = \eta_{\rho\sigma}) \end{aligned}$$

les $\omega^\alpha$ et les $\theta^{\rho'}$ étant des formes de Pfaff :

$$\omega^\alpha = a^\alpha_\beta dx^\beta \qquad (9)$$
$$\theta^{\rho'} = b^{\rho'}_{\sigma'} dx^{\sigma'}$$

Les 1-formes des connexions riemanniennes correspondantes, $\omega^\alpha_\beta$ et $\theta^{\rho'}_{\sigma'}$, sont univoquement définies par (1)

$$(10a,b) \qquad d\omega^\alpha + \omega^\alpha_\beta \Lambda \omega^\beta = 0 \qquad \eta_{\alpha\rho}\omega^\rho_\beta + \eta_{\rho\beta}\omega^\rho_\alpha = 0$$

$$(11a,b) \qquad d\theta^{\rho'} + \theta^{\rho'}_{\sigma'} \Lambda \theta^{\sigma'} = 0 \qquad \eta_{\rho'\alpha'}\theta^{\alpha'}_{\sigma'} + \eta_{\alpha'\sigma'}\theta^{\alpha'}_{\rho'} = 0$$

Quant aux 2-formes de courbure, dont nous aurons besoin plus tard, elles sont définies par :

$$(12) \qquad \Omega^\alpha_\beta = d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\rho \Lambda \omega^\rho_\beta \qquad (\eta_{\alpha\rho}\Omega^\rho_\beta + \eta_{\beta\rho}\Omega^\rho_\alpha = 0)$$
$$\Theta^{\rho'}_{\sigma'} = d\theta^{\rho'}_{\sigma'} + \theta^{\rho'}_{\alpha'} \Lambda \theta^{\alpha'}_{\sigma'} \qquad (\eta_{\rho'\alpha'}\Theta^{\alpha'}_{\sigma'} + \eta_{\sigma'\alpha'}\Theta^{\alpha'}_{\rho'} = 0)$$

*b)* Nous pouvons maintenant reformuler les conditions de raccordement. Si nous effectuons sur les $\theta^{\rho'}$ le changement de variables (4) nous aurons :

$$(13) \qquad \theta^{\rho'} = B^{\rho'}_\alpha \omega^\alpha$$

où :

$$(14) \qquad B^{\rho'}_\alpha = b^{\rho'}_{\sigma'} A^{\sigma'}_\beta a^{-1\beta}_{\ \ \alpha}$$

La condition (5) est équivalente à :

$$(15) \qquad \eta_{\alpha\beta} \sim B^{\rho'}_\alpha B^{\sigma'}_\beta \eta_{\rho'\sigma'}$$

et la condition (6) est équivalente à :

$$(16) \qquad \omega^\alpha_\beta \sim B^\alpha_{\rho'} \theta^{\rho'}_{\sigma'} B^{\sigma'}_\beta + B^\alpha_{\gamma'} dB^{\gamma'}_\beta \qquad (B^\alpha_{\rho'} B^{\rho'}_\beta = \delta^\alpha_\beta)$$

ou encore à :

$$(17) \qquad dB^{\lambda'}_\beta \sim B^{\lambda'}_\alpha \omega^\alpha_\beta - \theta^{\lambda'}_{\sigma'} B^{\sigma'}_\beta$$

Naturellement si $n = 4$ et (8) sont de type hyperbolique normal, (15) nous disent que la matrice B est pour tout point de S un élément du groupe de Lorentz.

---

(1) Voir par exemple [1].

## 3. — LEMME DE RACCORDEMENT

Soit :

(18) $$x^\alpha = x^\alpha(y^i) \qquad (i, j, \ldots = 1, 2, \ldots n)$$

une représentation paramétrique d'une hypersurface S. Si $\omega$ est une 1-forme

(19) $$\omega = a_\alpha dx^\alpha$$

la restriction de $\omega$ à S, notée $\widehat{\omega}$, est la 1-forme :

(20) $$\widehat{\omega} \sim a_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} dy^i$$

D'autre part, si L est une fonction définie uniquement sur S, nous poserons :

(21) $$\widehat{d}\mathrm{L} \sim \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y^i} dy^i$$

Ceci dit, nous nous proposons de démontrer le lemme suivant :

*Lemme.* — S'il existe des fonctions $\mathrm{L}^{\rho'}_\alpha(y^i)$, $x^\alpha(y^i)$ et $x^{\lambda'}(y^i)$ telles que

(22) $$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{L}^{\rho'}_\alpha \mathrm{L}^{\sigma'}_\beta \eta_{\rho'\sigma'}$$

et telles que sur l'hypersurface S d'équations paramétriques $x^\alpha = x^\alpha(y^i)$ l'on ait :

(23) $$\widehat{\theta}^{\rho'} \sim \mathrm{L}^{\rho'}_\alpha \widehat{\omega}^\alpha$$

où la définition de $\widehat{\theta}^{\rho'}$ est l'analogue de (20), et si les 1-formes $\widehat{\mathrm{C}}^{\rho'}_\alpha$ définies par

(24) $$\widehat{\mathrm{C}}^{\rho'}_\alpha \sim \mathrm{L}^{\rho'}_\beta \widehat{\omega}^\beta_\alpha - \widehat{\theta}^{\rho'}_{\sigma'} \mathrm{L}^{\sigma'}_\alpha$$

satisfont en outre les équations :

(25) $$\widehat{\mathrm{C}}^{\rho'}_\alpha \sim \widehat{d}\mathrm{L}^{\rho'}_\alpha$$

les deux métriques (8) sont raccordables.

Nous démontrons ce lemme par construction explicite des fonctions (4). Plusieurs étapes seront nécessaires.

1° Définissons

(26) $$\overline{\mathrm{A}}^{\rho'}_\alpha(y^i) \sim b^{-1}{}^{\rho'}_{\gamma'} \mathrm{L}^{\gamma'}_\beta a^\beta_\alpha$$

La condition (23) est alors équivalente à :

(27) $$\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial y^i} \sim \overline{A}^{\lambda'}_{\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}$$

2° Définissons sur S les 1-formes $C^{\rho'}_\alpha$ et $D^{\gamma'}_\alpha$ :

(28) $$C^{\rho'}_\alpha \sim L^{\rho'}_\beta \omega^\beta_\alpha - \theta^{\rho'}_{\sigma'\gamma'} L^{\sigma'}_\alpha L^{\gamma'}_\beta \omega^\beta$$

(29) $$D^{\gamma'}_\alpha \sim p^{\gamma'}_{\rho'\sigma'} L^{\sigma'}_\beta L^{\rho'}_\lambda a^\lambda_\alpha \omega^\beta + b^{-1}{}^{\gamma'}_{\rho'} C^{\rho'}_\lambda a^\lambda_\alpha + b^{-1}{}^{\gamma'}_{\rho'} L^{\rho'}_\lambda da^\lambda_\alpha$$

où les $\theta^{\rho'}_{\sigma'\gamma'}$ et les $p^{\gamma'}_{\rho'\sigma'}$ sont définis par :

(30) $$\theta^{\rho'}_{\sigma'} = \theta^{\rho'}_{\sigma'\gamma'} \theta^{\gamma'} \qquad\qquad db^{-1}{}^{\gamma'}_{\rho'} = p^{\gamma'}_{\rho'\sigma'} \theta^{\sigma'}$$

autrement dit : les $\theta^{\rho'}_{\sigma'\gamma'}$ sont les coefficients de la connexion de $\underset{2}{ds^2}$ rapportée aux corepères $\theta^{\gamma'}$ et $p^{\gamma'}_{\rho'\sigma'}$ sont les dérivées pfaffiennes de $b^{-1}{}^{\gamma'}_{\rho'}$ relatives à ces mêmes corepères.

On peut prouver facilement que compte tenu de (10*a*), (11*a*) et des définitions correspondantes, on a :

(31) $$D^{\gamma'}_\alpha \Lambda dx^\alpha \sim 0$$

Posons :

(32) $$D^{\gamma'}_\alpha \sim \overline{A}^{\gamma'}_{\alpha\beta}(y^i) dx^\beta$$

(31) nous dit que :

(33) $$\overline{A}^{\gamma'}_{\alpha\beta} \sim \overline{A}^{\gamma'}_{\beta\alpha}$$

et un petit calcul montre que (25) est équivalente à :

(34) $$\overline{A}^{\gamma'}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^i} = \frac{\partial \overline{A}^{\gamma'}_\alpha}{\partial y^i}$$

3° Considérons des fonctions :

(35) $$x^\alpha = \varphi^\alpha(y^i, f)$$

dont le jacobien ne soit pas nul et telles que :

(36) $$\varphi^\alpha(y^i, 0) = x^\alpha(y^i)$$

soient :

(37) $$y^i = y^i(x^\alpha)$$

(38) $$f = f(x^\alpha)$$

les fonctions obtenues par inversion de (35). $f(x^\alpha) = 0$ est naturellement une représentation locale de S et par conséquent nous utiliserons aussi le symbole $\sim$ pour indiquer qu'une fonction qui dépend de $f$ est évaluée pour $f = 0$.

Nous affirmons maintenant que les deux métriques (8) sont raccordables sur S et que les fonctions (4) sont celles obtenues par élimination des $y^i$ entre (37) et :

$$x^{\lambda'} = x^{\lambda'}(y^i) + \Phi^{\lambda'}(y^i)f + \frac{1}{2}\Psi^{\lambda'}(y^i)f^2 + \Lambda^{\lambda'}(y^i.f)f^3 \tag{39}$$

où :

$$\Phi^{\lambda'} \sim \overline{A}^{\lambda'}_\alpha \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial f} \tag{40}$$

$$\Psi^{\lambda'} \sim \overline{A}^{\lambda'}_{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial f}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial f} + \overline{A}^{\lambda'}_\alpha \frac{\partial^2\varphi^\alpha}{\partial f^2} \tag{41}$$

et où les fonctions $\Lambda^{\lambda'}(y^i, f)$ sont des fonctions arbitraires suffisamment régulières au voisinage de S.

4° Pour se convaincre de cette affirmation, il suffit de vérifier tout d'abord que compte tenu de (33) et (34) on a :

$$A^{\lambda'}_\alpha \sim \overline{A}^{\lambda'}_\alpha \qquad dA^{\lambda'}_\alpha \sim D^{\lambda'}_\alpha \tag{42}$$

La première de ces équations entraîne :

$$B^{\gamma'}_\alpha \sim L^{\gamma'}_\alpha \tag{43}$$

donc

$$\theta^{\lambda'} \sim L^{\lambda'}_\alpha \omega^\alpha \tag{44}$$

et par conséquent (15) est satisfaite. La deuxième donne, compte tenu de (29)

$$dB^{\lambda'}_\alpha \sim C^{\lambda'}_\alpha \tag{45}$$

L'équation (16) résulte alors immédiatement de (28) et (44). Notre lemme est ainsi démontré.

Ce lemme dont l'énoncé ne va pas très au-delà du simple énoncé du problème de raccordement a l'intérêt toutefois de préciser quelles sont les vraies inconnues du problème et le degré d'arbitraire que comporte sa solution quand il y en a une.

## 4. — NOUVELLES CONDITIONS NÉCESSAIRES. PROGRAMME DE RACCORDEMENT

*a)* Nous allons obtenir ici des nouvelles conditions nécessaires qui doivent être satifaites si les deux métriques (8) sont raccordables. Supposons donc qu'elles le sont sur une hypersurface S d'équation locale $f(x^\alpha) = 0$, et voyons quelles conséquences nous pouvons tirer de (16).

Posons :

$$t^\alpha_\beta \equiv \omega^\alpha_\beta - B^\alpha_{\rho'}\theta^{\rho'}_{\sigma'}B^{\sigma'}_\beta - B^\alpha_{\gamma'}dB^{\gamma'}_\beta \tag{46}$$

Les 1-formes ainsi définies étant nulles sur S d'après (16), nous aurons sur S :

$$dt^\alpha_\beta \Lambda df \sim 0 \tag{47}$$

et en évaluant $dt^\alpha_\beta$ nous obtenons

$$(\Omega^\alpha_\beta - L^\alpha_{\rho'}\Theta^{\rho'}_{\sigma'}L^{\sigma'}_\beta)\Lambda df = 0 \qquad (L^\alpha_{\rho'}L^{\rho'}_\beta = \delta^\alpha_\beta) \tag{48}$$

soit en explicitant :

$$\left(\Omega^\alpha_\beta - \frac{1}{2} L^\alpha_{\rho'} \underset{2}{R}{}^{\rho'}_{\sigma'\mu'\nu'} L^{\sigma'}_\beta L^{\mu'}_\gamma L^{\nu'}_\delta \omega^\gamma \Lambda \omega^\delta\right)\Lambda df \sim 0 \tag{49}$$

où par définition :

$$\Theta^{\rho'}_{\sigma'} = \frac{1}{2} \underset{2}{R}{}^{\rho'}_{\sigma'\mu'\nu'}\theta^{\mu'}\Lambda\theta^{\nu'} \tag{50}$$

*Remarque.* — On peut voir facilement que de (49) on peut obtenir en particulier :

$$(\underset{1}{S}{}^\alpha_\beta - L^\alpha_{\rho'}\underset{2}{S}{}^{\rho'}_{\sigma'}L^{\sigma'}_\beta)\partial_\alpha f \sim 0 \tag{51}$$

où $\underset{1}{S}$ et $\underset{2}{S}$ sont les tenseurs d'Einstein correspondant aux deux métriques $\underset{1}{ds^2}$ et $\underset{2}{ds^2}$. Les conditions nécessaires (51) étaient déjà bien connues sous une autre forme [2].

*b)* Nous pouvons maintenant proposer le programme suivant pour décider si deux métriques données sont raccordables ou pas.

---

[2] Voir par exemple A. Lichnerowicz [*2*].

1° Nous essayons d'obtenir des fonctions $L^{\rho'}_{\alpha}(y^i)$, $x^{\alpha}(y^i)$ et $x^{\lambda'}(y^i)$ satisfaisant (22), (23) et (49) où dans cette dernière $f$ est une représentation locale de l'hypersurface S d'équations paramétriques $x^{\alpha} = x^{\alpha}(y^i)$.

2° Si nous réussissons, nous regardons si (25) sont satisfaites. Si elles le sont, les deux métriques sont raccordables sur S.

Dans le cas favorable, la démonstration du lemme du paragraphe 3 indique quelles seraient les étapes qui conduiraient aux fonctions de transformation correspondantes.

Au paragraphe suivant, nous illustrons ce programme par une étude détaillée d'un cas particulier.

## 5. — ÉTUDE D'UN CAS PARTICULIER

*a)* Soit

$$ds^2_{1} = g_{\alpha\beta}{}_{1}\, dx^{\alpha}dx^{\beta} \qquad (\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3) \tag{52}$$

une solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein

$$\underset{1}{S}_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \tag{53}$$

dans lesquelles $T_{\alpha\beta}$ est normal, c'est-à-dire de la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_{\alpha}u_{\beta} + \Pi_{\alpha\beta} \tag{54}$$

avec

$$\vec{u}^2 = -1 \qquad \Pi_{\alpha\beta}u^{\beta} = 0 \tag{55}$$

et compatible avec la symétrie sphérique. On sait qu'il existe un système de coordonnées tel que (52) peut s'écrire sous la forme :

$$\underset{1}{ds^2} = -e^{2\alpha}dT^2 + e^{2\beta}dR^2 + e^{2\gamma}d\Sigma^2 \qquad (d\Sigma^2 = d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2) \tag{56}$$

où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des fonctions de R et T, et tel que, en posant :

$$x^0 = T \qquad x^1 = R \qquad x^2 = \Theta \qquad x^3 = \Phi \tag{57}$$

on ait [3] :

$$u^i = 0 \qquad (i, j, \ldots = 1, 2, 3) \tag{58}$$

[3] Ces conditions caractérisent les systèmes de coordonnées en co-mouvement.

donc

(59) $$\Pi_{0\alpha} = 0$$

ainsi que :

(60) $$\Pi_2^1 = \Pi_3^1 = \Pi_3^2 = 0 \qquad \Pi_2^2 = \Pi_3^3$$

Nous poserons :

(61) $$\Pi_1^1 \equiv p \qquad \Pi_2^2 = \Pi_3^3 \equiv q$$

La métrique (52) peut être décomposée sous la forme

(62) $$\underset{1}{ds}^2 = -(\omega^0)^2 + \Sigma(\omega^i)^2$$

avec

(63) $$\omega^0 = e^\alpha d\mathrm{T} \qquad \omega^1 = e^\beta d\mathrm{R} \qquad \omega^2 = e^\gamma d\Theta \qquad \omega^3 = e^\gamma \sin\Theta d\Phi$$

Par conséquent, en repères orthonormés correspondants, d'après les définitions de l'Appendice (A5) et les formules (A7) nous pourrons écrire les équations du champ (53) sous la forme :

(64) $$\begin{aligned} &a)\quad \mathrm{S}_{00} = 2\mathrm{E} + \mathrm{D} = \kappa\rho \\ &b)\quad \mathrm{S}_{01} = -2\mathrm{B} = 0 \\ &c)\quad \mathrm{S}_{11} = -(2\mathrm{C} + \mathrm{D}) = \kappa p \\ &d)\quad \mathrm{S}_{22} = \mathrm{S}_{33} = -(\mathrm{A} + \mathrm{C} + \mathrm{E}) = \kappa q \end{aligned}$$

Considérons maintenant la solution de Schwarzschild que nous écrirons sous la forme :

(65) $$\underset{2}{ds}^2 = -e^{2a}dt^2 + e^{2b}dr^2 + r^2d\sigma^2 \qquad (d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

où :

(66) $$e^{2a} = e^{-2b} = 1 - \frac{2m}{r}$$

(65) peut être décomposée sous la forme

(67) $$\underset{2}{ds}^2 = -(\theta^{0'})^2 + \Sigma(\theta^{i'})^2$$

avec :

(68) $$\theta^{0'} = e^a dt \qquad \theta^{1'} = e^b dr \qquad \theta^{2'} = r d\theta \qquad \theta^{3'} = r\sin\theta d\varphi$$

Les formules dont nous aurons besoin, relatives à la décomposition (67), sont toutes dans l'appendice.

*b)* Nous nous proposons d'examiner les conditions de raccordement des deux métriques (62) et (67).

Naturellement les conditions de symétrie sphérique nous suggèrent de poser :

$$\Theta = \theta \quad , \quad \Phi = \varphi \tag{69}$$

et, pour satisfaire (22) :

$$(\mathrm{L}^{\rho'}_{\alpha}) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{L}^{\alpha}_{\rho'}) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{70}$$

où $\chi$ est une fonction à déterminer.

De (69) et (70) il vient déjà :

$$r \sim e^{\gamma} \tag{71}$$

Calculons maintenant le premier facteur de (49), c'est-à-dire

$$\mathrm{P}^{\alpha}_{\beta} \equiv \Omega^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}^{\alpha}_{\rho'}\underset{2}{\mathrm{R}}{}^{\rho'}_{\sigma'\mu'\nu'}\mathrm{L}^{\sigma'}_{\beta}\mathrm{L}^{\mu'}_{\gamma}\mathrm{L}^{\nu'}_{\delta}\,\omega^{\gamma}\Lambda\omega^{\delta} \tag{72}$$

Compte tenu de (70), (A6), (A13) et l'équation de champ (64*b*) nous obtenons les composantes strictes :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^0_1 &= (\mathrm{A} - 2\mathrm{K})\omega^0\Lambda\omega^1 & \mathrm{P}^2_3 &= (\mathrm{D} - 2\mathrm{K})\omega^2\Lambda\omega^3 \\ \mathrm{P}^0_2 &= (\mathrm{C} + \mathrm{K})\omega^0\Lambda\omega^2 & \mathrm{P}^3_1 &= (\mathrm{E} + \mathrm{K})\omega^3\Lambda\omega^1 \\ \mathrm{P}^0_3 &= (\mathrm{C} + \mathrm{K})\omega^0\Lambda\omega^3 & \mathrm{P}^1_2 &= (\mathrm{E} + \mathrm{K})\omega^1\Lambda\omega^2 \end{aligned} \tag{73}$$

Une courte discussion prouve que le seul moyen de satisfaire (49) consiste à poser :

$$df \propto \omega^1 \ \text{sur S} \tag{74}$$

et

$$\mathrm{D} - 2\mathrm{K} \sim 0 \qquad \mathrm{C} + \mathrm{K} \sim 0 \tag{75a,b}$$

(74) nous dit qu'une équation locale possible de S sera :

$$\mathrm{R} - \mathrm{R}_s = 0 \tag{76}$$

où $\mathrm{R}_s$ est une constante à déterminer. Dorénavant le symbole $\sim$ représentera donc aussi le symbole d'égalité quand dans celle-ci figurent des fonctions évaluées pour $\mathrm{R} = \mathrm{R}_s$.

De (75) il vient

$$2C + D \sim 0 \tag{77}$$

c'est-à-dire, compte tenu de (64*c*)

$$p \sim 0 \tag{78}$$

Cette équation détermine $R_s$ si elle existe. Supposons qu'il en soit ainsi et revenons à l'équation (75*a*) qui, compte tenu de (A14) et (71), peut s'écrire :

$$2m \sim e^{3\gamma} D \tag{79}$$

Cette équation détermine $m$, c'est-à-dire la masse de la configuration, si la condition de cohérence :

$$\frac{\partial}{\partial T}(e^{3\gamma} D) \sim 0 \tag{80}$$

est satisfaite. Or il en est bien ainsi en vertu des identités de Bianchi :

$$d\Omega^{\alpha}_{\beta} = \Omega^{\alpha}_{\rho} \Lambda \omega^{\rho}_{\beta} - \omega^{\alpha}_{\rho} \Lambda \Omega^{\rho}_{\beta} \tag{81}$$

En effet, en multipliant extérieurement par $\omega^1$ la formule ci-dessus pour $\alpha = 2$, $\beta = 3$ on obtient :

$$\dot{D} + 2\dot{\gamma} D = 2\dot{\gamma} C \qquad \left(\dot{-} \equiv \frac{\partial}{\partial T} -\right) \tag{82}$$

ce qui donne, compte tenu de (77) :

$$\dot{D} + 3\dot{\gamma} D \sim 0 \tag{83}$$

c'est-à-dire (80).

Si nous convenons d'utiliser T, Θ, Φ comme paramètres, les équations paramétriques de S sont donc, d'une part d'après (76)

$$T = T, \qquad R = R_s, \qquad \Theta = \Theta, \qquad \Phi = \Phi \tag{84}$$

et d'autre part, d'après (69) et (71)

$$t = t(T), \qquad r \sim e^{\gamma}, \qquad \theta = \Theta, \qquad \varphi = \Phi \tag{85}$$

où $t(T)$ est encore une fonction à déterminer, qui ne peut pas dépendre de Θ et Φ pour raisons de symétrie.

Examinons maintenant les conditions (23). Compte tenu de

$$\begin{gathered} \widehat{\omega}^0 \sim \omega^0, \qquad \widehat{\omega}^1 \sim 0, \qquad \widehat{\omega}^2 \sim \omega^2, \qquad \widehat{\omega}^3 \sim \omega^3 \\ \widehat{\theta}^{0'} \sim e^{a-\alpha}\dot{t}\omega^0, \quad \widehat{\theta}^{1'} \sim e^{b+\gamma-\alpha}\dot{\gamma}\omega^{0'}, \quad \widehat{\theta}^{2'} \sim \theta^{2'}, \quad \widehat{\theta}^{3'} \sim \theta^{3'} \end{gathered} \tag{86}$$

et (70) elles donnent

(87) $$\operatorname{sh} \chi \sim - e^{b+\gamma-\alpha}\dot{\gamma}$$

(88) $$\dot{t} \sim \operatorname{ch} \chi \, e^{\alpha-a}$$

La première de ces équations détermine $\chi$ donc $L_{\alpha}^{\rho'}$ et la deuxième détermine $t(T)$ à une constante additive près. Ceci tient au fait que les coefficients de (65) ne contiennent pas la variable $t$.

Tout est donc maintenant déterminé. Il nous reste à voir si les équations (25) sont satisfaites. Après calcul, compte tenu de (A4) et (A12), elles donnent de nouveau (87) et :

(89) $$\operatorname{ch} \chi \sim e^{b+\gamma-\beta}\gamma'$$

(90) $$e^{-\beta}\alpha' \sim e^{-b}\frac{da}{dr}\operatorname{ch} \chi - e^{-\alpha}\dot{\chi}$$

Pour que (89) soit consistante avec (87) il faut et il suffit que l'on ait :

(91) $$e^{2(b+\gamma)}(e^{-2\beta}\gamma'^2 - e^{-2\alpha}\dot{\gamma}^2) \sim 1$$

c'est-à-dire, compte tenu de (A5*d*) :

(92) $$e^{2b}(1 - e^{2\gamma}D) \sim 1$$

ce qui est vrai d'après (66), (71) et (79). La consistance de (89) et (90) se démontre aussi facilement en tenant compte notamment de (A5*b*) et (64*b*).

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant ([4]) :

Toute solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein correspondant à un tenseur impulsion-énergie normal est localement raccordable à la solution de Schwarzschild pourvu que la pression radiale s'annule sur une hypersurface orientée dans le temps.

---

([4]) Ce résultat avait été démontré par une toute autre méthode dans le cas fluide parfait par C. Misner et D. Sharp [*3*].

## APPENDICE

Nous donnons ci-dessous les formules indispensables aux calculs du paragraphe 5.

*a)* Considérons la métrique

(A1) $$\underset{1}{ds}^2 = -e^{2\alpha}dT^2 + e^{2\beta}R^2 + e^{2\gamma}d\Sigma^2 \qquad (d\Sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)$$

où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des fonctions de R et T. Nous pouvons poser :

(A2) $$\underset{1}{ds}^2 = -(\omega^0)^2 + \Sigma(\omega^i)^2 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

avec :

(A3) $$\omega^0 = e^{\alpha}dT \qquad \omega^1 = e^{\beta}dR \qquad \omega^2 = e^{\gamma}d\Theta \qquad \omega^3 = e^{\gamma}\sin\Theta d\Phi$$

Toutes les formules qui suivent sont relatives aux corepères orthonormés ci-dessus. Nous avons pour les 1-formes strictes de la connexion riemannienne correspondante :

(A4)
$$\begin{aligned} \omega^0_1 &= e^{-\beta}\alpha'\omega^0 + e^{-\alpha}\dot\beta\omega^1 & \qquad \omega^2_3 &= -e^{-\gamma}\cot\Theta\omega^3 \\ \omega^0_2 &= e^{-\alpha}\dot\gamma\omega^2 & \omega^3_1 &= e^{-\beta}\gamma'\omega^3 \\ \omega^0_3 &= e^{-\alpha}\dot\gamma\omega^3 & \omega^1_2 &= -e^{-\beta}\gamma'\omega^2 \end{aligned}$$

où :

$$\dot{-} \equiv \frac{\partial}{\partial T}- \qquad -' \equiv \frac{\partial}{\partial R}-$$

Posons :

(A5)
$$\begin{aligned} &a)\quad A \equiv e^{-2\alpha}(\ddot\beta + \dot\beta^2 - \dot\beta\dot\alpha) - e^{-2\beta}(\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta') \\ &b)\quad B \equiv e^{-(\alpha+\beta)}(\dot\gamma' + \dot\gamma\gamma' - \dot\gamma\alpha' - \dot\beta\gamma') \\ &c)\quad C \equiv e^{-2\alpha}(\ddot\gamma + \dot\gamma^2 - \dot\gamma\dot\alpha) - e^{-2\beta}\alpha'\gamma' \\ &d)\quad D \equiv e^{-2\alpha}\dot\gamma^2 - e^{-2\beta}\gamma'^2 + e^{-2\gamma} \\ &e)\quad E \equiv e^{-2\alpha}\dot\gamma\dot\beta - e^{-2\beta}(\gamma'' + \gamma'^2 - \gamma'\beta') \end{aligned}$$

Les 2-formes de courbure sont :

(A6)
$$\begin{aligned} \Omega^0_1 &= A\omega^0\Lambda\omega^1 & \qquad \Omega^2_3 &= D\omega^2\Lambda\omega^3 \\ \Omega^0_2 &= B\omega^1\Lambda\omega^2 + C\omega^0\Lambda\omega^2 & \Omega^3_1 &= E\omega^3\Lambda\omega^1 + B\omega^0\Lambda\omega^3 \\ \Omega^0_3 &= -B\omega^3\Lambda\omega^1 + C\omega^0\Lambda\omega^3 & \Omega^1_2 &= E\omega^1\Lambda\omega^2 + B\omega^0\Lambda\omega^2 \end{aligned}$$

Et les composantes non identiquement nulles du tenseur d'Einstein sont :

$$\begin{aligned} \underset{1}{S}_{00} &= 2E + D \\ \underset{1}{S}_{01} &= -2B \\ \underset{1}{S}_{11} &= -(2C + D) \\ \underset{1}{S}_{22} = \underset{1}{S}_{33} &= -(A + C + E) \end{aligned}$$

*b)* Considérons maintenant la métrique de Schwarzschild

(A8) $$\underset{2}{ds^2} = -e^{2a}dt^2 + e^{2b}dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad \left(d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

où :

(A9) $$e^{2a} = e^{-2b} = 1 - \frac{2m}{r}$$

Nous pouvons poser :

(A10) $$\underset{2}{ds^2} = -\left(\theta^{0'}\right)^2 + \Sigma\left(\theta^{i'}\right)^2 \qquad (i' = 1, 2, 3)$$

avec :

(A11) $$\theta^{0'} = e^a dt \qquad \theta^{1'} = e^b dr \qquad \theta^{2'} = r d\theta \qquad \theta^{3'} = r \sin\theta d\varphi$$

Particularisons, avec des changements de notation évidents, les formules de l'alinéa *a)*. Les 1-formes de la connexion riemannienne sont :

(A12) $$\begin{aligned} &\theta^{0'}_{1'} = e^{-b}\frac{da}{dr}\theta^{0'} && \theta^{2'}_{3'} = -r^{-1}\cot\theta\theta^{3'} \\ &\theta^{0'}_{2'} = 0 && \theta^{3'}_{1'} = e^{-b}r^{-1}\theta^{3'} \\ &\theta^{0'}_{3'} = 0 && \theta^{1'}_{2'} = -e^{-b}r^{-1}\theta^{2'} \end{aligned}$$

Et les 2-formes de courbure sont :

(A13) $$\begin{aligned} &\Omega^{0'}_{1'} = 2K\theta^{0'}\Lambda\theta^{1'} && \Omega^{2'}_{3'} = 2K\theta^{2'}\Lambda\theta^{3'} \\ &\Omega^{0'}_{2'} = -K\theta^{0'}\Lambda\theta^{2'} && \Omega^{3'}_{1'} = -K\theta^{3'}\Lambda\theta^{1'} \\ &\Omega^{0'}_{3'} = -K\theta^{0'}\Lambda\theta^{3'} && \Omega^{1'}_{2'} = -K\theta^{1'}\Lambda\theta^{2'} \end{aligned}$$

avec :

(A14) $$K = \frac{m}{r^3}$$

Le tenseur d'Einstein est naturellement nul.

## BIBLIOGRAPHIE

[*1*] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des Connexions*, Dunod, 1955.
[*2*] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme*, Masson, 1955.
[*3*] C. MISNER et D. SHARP, *Phys. Rev.*, t. 136, 1964.

*(Manuscrit reçu le 12 avril 1967).*