ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

SALIOU TOURE

Généralisation de l'équation intégrale d'Ambarzumian

Annales de l'I. H. P., section A, tome 7, nº 3 (1967), p. 249-255
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_3_249_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VII, n° 3, 1967, p. 249-255.

Section A :
Physique théorique.

Généralisation de l'équation intégrale d'Ambarzumian

par

Saliou TOURE
(Laboratoire de Mécanique Théorique,
Besançon, Faculté des Sciences).

RÉSUMÉ. — La détermination de la fonction de fréquence des vitesses spatiales d'un groupe d'étoiles, connaissant la fonction de fréquence des vitesses radiales, conduit à une équation intégrale dans le plan ou dans l'espace à trois dimensions. On résout ici l'équation intégrale correspondante dans l'espace à *n* dimensions.

1. — INTRODUCTION

Dans cet article, nous nous proposons de résoudre l'équation intégrale :

$$g(\mathrm{R}, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}) = \int_\Sigma f(u_1, u_2, \ldots, u_n)d\sigma \tag{1}$$

où (Σ) est l'hyperplan d'équation :

$$u_1 \sin\theta_1 + u_2 \sin\theta_2 \cos\theta_1 + \ldots + u_n \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1} - \mathrm{R} = 0$$

perpendiculaire à la direction $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ et à la distance R de l'origine des coordonnées.

Dans la relation (1), $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est la fonction inconnue et $g(\mathrm{R}, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ une fonction donnée. f est une fonction de fréquence, ce qui impose à g certaines conditions. Dans l'espace à trois dimensions, on démontre (cf. (4)) que $g(\mathrm{R}, \theta_1, \theta_2)$ est une fonction positive vérifiant les conditions suivantes :

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathrm{R}, \theta_1, \theta_2) d\mathrm{R} = 1$
2) $g(\mathrm{R}, \theta_1 + 2\pi, \theta_2 + 2\pi) = g(\mathrm{R}, \theta_1, \theta_2)$
3) $g(\mathrm{R}, \theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi) = g(\mathrm{R}, \theta_1 - \theta_2)$
4) $g(\mathrm{R}, \theta_1 + \pi, - \theta_2) = g(- \mathrm{R}, \theta_1, \theta_2)$

Par analogie, nous supposerons que $g(\mathrm{R}, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ est positive, telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathrm{R}, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}) d\mathrm{R} = 1$$

et que g vérifie des conditions de symétrie des types précédents.

Les notations utilisées sont les suivantes :

— $\mathbb{R}$ est la droite numérique réelle : $\mathbb{R}^n$ est l'espace réel à n dimensions.

— On note $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le point de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Pour tout couple $x, y \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$xy = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

On désigne par Ω la sphère d'unité de $\mathbb{R}^n$ et $\Omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ est l'aire de cette sphère,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Pour toute fonction f à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}^n$ et intégrable, on pose :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \iint \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions mesurables telles que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < + \infty$$

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$, on définit l'opérateur $\mathcal{F}$ par :

$$(\mathcal{F}f)(y) = \mathrm{F}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ixy} dx$$

$\mathrm{F}(y)$ est la transformée de Fourier de la fonction f.

Enfin $f^{(p)}_{x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est la dérivée d'ordre de p de $f(x)$ par rapport à la variable x_k.

2. — RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE (1)

La résolution utilise deux lemmes que nous allons établir tout d'abord.

Lemme 1. — Soient :

$$\Phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) e^{iu\xi} du$$

et

$$\varphi(t, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathrm{R}, \theta) e^{it\mathrm{R}} d\mathrm{R}$$

les transformées de Fourier de $f(u)$ et $g(\mathrm{R}, \theta)$ respectivement. Alors il existe entre ces deux fonctions, la relation :

$$(2) \quad \Phi(t \sin\theta_1, t \sin\theta_2 \cos\theta_1, \ldots, t \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1}) = \varphi(t, \theta)$$

Démonstration. — Posons :

$$\xi_1 = t \sin\theta_1, \ \xi_2 = t \sin\theta_2 \cos\theta_1, \ \ldots, \ \xi_n = t \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1}$$

alors :

$$iu\xi = it\mathrm{R}$$

Effectuons ensuite une rotation des axes et prenons pour nouvelles variables :

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \mathrm{R}$$

On a :

$$du_1 du_2 \ldots du_n = dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} d\mathrm{R}$$

Par suite :

$$\Phi(t \sin\theta_1, t \sin\theta_2 \cos\theta_1, \ldots, t \cos\theta_1 \cos\theta_2 \ldots \cos\theta_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\mathrm{R}} d\mathrm{R} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, \mathrm{R}, \theta) dx$$

Mais le changement de variables :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \mathrm{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \mathrm{R} \end{pmatrix}$$

où M est la matrice de la rotation précédente transforme l'équation intégrale (1) en :

$$g(\mathrm{R}, \theta) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x, \mathrm{R}, \theta)dx$$

Par conséquent :

$$\Phi(t \sin \theta_1, t \sin \theta_2 \cos \theta_1, \ldots, t \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ldots \cos \theta_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathrm{R}, \theta)e^{it\mathrm{R}}d\mathrm{R} = \varphi(t, \theta)$$

d'où le lemme 1.

Lemme 2. — Considérons la fonction :

(3)

$$\mathrm{G}(\mathrm{R}, u) = \frac{1}{\Omega_n}\int_{\Omega} g(\mathrm{R} + u_1 \sin \theta_1 + \ldots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ldots \cos \theta_{n-1}, \theta)d\Omega$$

moyenne de

$$g(\mathrm{R} + u_1 \sin \theta_1 + u_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \ldots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ldots \cos \theta_{n-1}, \theta)$$

sur la sphère unité à n dimensions.

Pour u fixé, la fonction $\mathrm{R} \to \mathrm{G}(\mathrm{R}, u)$ est paire.

On le voit facilement par récurrence; en effet, la propriété est vraie pour $n = 2$ et $n = 3$, voir [*4*].

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème. — La solution de l'équation intégrale (1) est donnée par :

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-2}\pi^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{G}_{\mathrm{R}^{n-1}}^{(n-1)}(\mathrm{R}, u)d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \mathrm{G}_{\mathrm{R}^{n-1}}^{(n-1)}(0, u) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{4}$$

$\mathrm{G}(\mathrm{R}, u)$ est la fonction définie dans le lemme 2.

Démonstration. — Nous utiliserons la transformation de Fourier. Si $\Phi(\xi)$ est la transformée de Fourier de $f(u)$, nous aurons par la formule d'inversion,

$$f(u) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\xi)e^{-iu\xi}d\xi$$

Faisons le changement de variables :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= t \sin \theta_1 \\ \xi_2 &= t \sin \theta_2 \cos \theta_1 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_n &= t \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ldots \cos \theta_{n-1} \end{aligned}$$

Il vient :

$$f(u) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty t^{n-1} dt \int_\Omega \Phi(\ldots, \ldots, \ldots) e^{-it(u_1 \sin \theta_1 + \ldots + u_n \cos \theta_1 \ldots \cos \theta_{n-1})} d\Omega$$

ou en utilisant le lemme 1 :

$$f(u) = \frac{\Omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) dt \tag{5}$$

avec :

$$\psi(t, u) = \frac{1}{\Omega_n} \int_\Omega \varphi(t, \theta) e^{-it(u_1 \sin \theta_1 + \ldots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ldots \cos \theta_{n-1})} d\Omega$$

Mais on sait que la transformation de Fourier transforme la translation en multiplication par une exponentielle, donc :

$$\varphi(t, \theta) e^{-it(u_1 \sin \theta_1 + \ldots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ldots \cos \theta_{n-1})}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathrm{R} + u_1 \sin \theta_1 + \ldots + u_n \cos \theta_1 \cos \theta_2 \ldots \cos \theta_{n-1}, \theta) e^{it\mathrm{R}} d\mathrm{R}$$

On en déduit en changeant l'ordre des intégrations :

$$\psi(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{G}(\mathrm{R}, u) e^{it\mathrm{R}} d\mathrm{R}$$

$\psi(t, u)$ étant une fonction paire de t (c'est la transformée de Fourier d'une fonction paire), la formule d'inversion donne :

$$\mathrm{G}(\mathrm{R}, u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(t, u) \cos t\mathrm{R} dt$$

d'où en dérivant $n - 1$ fois par rapport à R,

$$\mathrm{G}^{(n-1)}_{\mathrm{R}^{n-1}}(\mathrm{R}, u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t^{n-1} \psi(t, u) \cos \left[t\mathrm{R} + \frac{(n-1)\pi}{2} \right] dt$$

Comme :

$$\cos \left[t\mathrm{R} + \frac{(n-1)\pi}{2} \right] = \begin{cases} (-1)^p \sin t\mathrm{R} & \text{si} \quad n = 2p \\ (-1)^p \cos t\mathrm{R} & \text{si} \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$

On aura une formule de résolution différente suivant que n est un nombre pair ou impair.

1^er^ cas. $n = 2p$

$$G^{(n-1)}_{R^{n-1}}(R, u) = \frac{(-1)^{n/2}}{\pi} \int_0^{\infty} t^{n-1}\psi(t, u) \sin tR\,dt$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{R}$ puis intégrons de 0 à $+\infty$ par rapport à R, en observant que :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin tR\,dR}{R} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{G^{(n-1)}_{R^{n-1}}(R, u)dR}{R} = \frac{(-1)^{n/2}}{\pi} \int_0^{\infty} t^{n-1}\psi(t, u)dt \int_0^{\infty} \frac{\sin tR\,dR}{R}$$
$$= \frac{(-1)^{n/2}}{2} \int_0^{\infty} t^{n-1}\psi(t, u)dt$$

On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} t^{n-1}\psi(t, u)dt = 2(-1)^{n/2} \int_0^{\infty} \frac{G^{(n-1)}_{R^{n-1}}(R, u)dR}{R}$$

En portant l'expression de $\int_0^{\infty} t^{n-1}\psi(t, u)dt$ dans (5) et remplaçant Ω_n par sa valeur : $\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, il vient :

$$f(u) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-2}\pi^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} \frac{G^{(n-1)}_{R^{n-1}}(R, u)dR}{R}$$

2^e^ cas. $n = 2p + 1$

$$G^{(n-1)}_{R^{n-1}}(R, u) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} t^{n-1}\psi(t, u) \cos tR\,dt$$

d'où

$$G^{(n-1)}_{R^{n-1}}(0, u) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi} \int_0^{\infty} t^{n-1}\psi(t, u)dt$$

Tirons $\int_0^{\infty} t^{n-1}\psi(t, u)dt$ de là, la relation (5) donne alors :

$$f(u) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} G^{(n-1)}_{R^{n-1}}(0, u)$$

L'équation intégrale (1) est ainsi complètement résolue dans le cas général.

Cas particuliers. — Si $n = 2$, on a :

$$f(u, v) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{G'_R(R, u, v)dR}{R}$$

si $n = 3$, il vient :

$$f(u, v, w) = -\frac{1}{2\pi} G''_{R^2}(0, u, v, w)$$

La première de ces formules a été obtenue à l'aide de la transformation de Fourier par M. Nahon dans [*2*] et la dernière par l'auteur dans [*3*]; confère aussi [*4*]. Dans [*1*], Ambarzumian a résolu le même problème dans le plan et dans $\mathbb{R}^3$ en utilisant une méthode de moyennes.

On trouvera dans ces publications des exemples d'applications à des problèmes de statistique stellaire : déterminer la fonction de fréquence inconnue $f(u, v, w)$ du nuage des vitesses spatiales des étoiles proches du soleil connaissant la fonction de fréquence observée $g(R, \theta_1, \theta_2)$ des vitesses radiales des étoiles de direction donnée.

Dans le cas où le nuage des vitesses spatiales est réduit à un point C (cas du « courant d'étoiles ») de coordonnées inconnues u_0, v_0, w_0, la fonction $g(R, \theta)$ se réduit alors à l'ensemble des projections $R_1, R_2, \ldots, R_n$ du point C sur les N directions θ_i. Le calcul de u_0, v_0, w_0 fait intervenir la méthode des moindres carrés; on peut donc dire que l'équation intégrale d'Ambarzumian généralise la méthode des moindres carrés.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] V. AMBARZUMIAN, On the derivation of the frequency function of space velocities of the stars form the observed radial velocities, *Monthly Notices*, t. 96, 1936.

[*2*] F. NAHON, Sur une nouvelle méthode d'analyse des vitesses radiales, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 242, 1956, p. 426-464.

[*3*] S. TOURE, Sur la résolution de l'équation intégrale d'Ambarzumian, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 6529-6531.

[*4*] S. TOURE, Sur une équation intégrale de statistique stellaire, *Ann. Sc. de l'Université de Besançon*, 3e série, Mécanique et Physique théorique, fasc. 4.

(Manuscrit reçu le 22 avril 1967).