ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

H. BACRY

J. NUYTS

Sur des groupes de symétrie pour multiplets de particules de masses différentes

Annales de l'I. H. P., section A, tome 7, nº 4 (1967), p. 333-338

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_4_333_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VII, n° 4, 1967, p. 333-338.

Section A :
Physique théorique.

Sur des groupes de symétrie pour multiplets de particules de masses différentes

par

H. BACRY (*) et J. NUYTS (**)
Institute for Advanced Study, Princeton.

RÉSUMÉ. — On montre qu'il est possible de définir des groupes de symétrie interne exacts [exemple d'isospin] tenant compte des différences de masse à l'intérieur de chaque multiplet. Utilisant certaines propriétés de l'opérateur infinitésimal des dilatations de l'espace-temps, on indique comment s'obtiennent les lagrangiens des champs libres.

ABSTRACT. — It is shown that exact internal symmetry groups [isospin for example] can be defined which take into account mass differences inside each multiplet. Using properties of the space-time dilation operator, the construction of Lagrangians for free fields is derived.

1. — INTRODUCTION

Le rôle de la théorie des groupes dans la classification des particules élémentaires est double : d'une part, le groupe de Poincaré (ou groupe de Lorentz inhomogène) permet de définir le concept de particule élémentaire;

(*) Work supported by the National Science Foundation (U. S. A.) on leave from Université de Marseille.
(**) Research sponsored by the Air Force Office of Scientific Research. Office of Aerospace research, United States Air Force, under AFSOR 42-65.

d'autre part, les groupes de symétrie interne conduisent à classer les particules et résonances en multiplets (groupe d'isospin) eux-mêmes assemblés en supermultiplets (groupe de symétrie unitaire SU (3)). Un groupe de symétrie interne est, en général, supposé transformer les particules d'un multiplet donné les unes dans les autres sans modifier ni leurs masses ni leurs spins. Cette description constitue une excellente approximation dans le cas des isomultiplets où les masses sont suffisamment voisines, mais est beaucoup moins justifié pour le groupe SU (3) où les masses à l'intérieur d'un même supermultiplet sont beaucoup plus dispersées.

Il est naturel de se demander s'il est possible de remplacer ces groupes de symétries approchées par des groupes de symétries exactes qui tiendraient compte de ces différences de masses. On sait que de nombreuses difficultés sont liées à la possibilité d'une telle construction. Nous nous proposons d'élaborer ici un modèle en nous limitant à l'étude des particules libres. Nous ferons appel pour cela au groupe des similitudes de l'espace-temps, groupe dont nous allons résumer les propriétés qui nous seront utiles pour la suite.

2. — L'ALGÈBRE DE LIE DU GROUPE DES SIMILITUDES

Si x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) sont les coordonnées d'un point d'espace-temps, une similitude $\{ a, \Lambda, \alpha \}$ est définie par la transformation

$$x'^\mu = \alpha\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{2.1}$$

Dans cette équation, les a^μ sont quatre paramètres réels décrivant les translations; α est un nombre réel définissant une dilatation. Enfin Λ est une matrice 4×4 satisfaisant à la relation

$$\Lambda^t g \Lambda = g \tag{2.2}$$

où Λ^t désigne la matrice transposée de Λ et g est la matrice de Gram

$$g = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ . & -1 & . & . \\ . & . & -1 & . \\ . & . & . & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

associée à la métrique de Lorentz.

La similitude $\{ a, \Lambda, \alpha \}$ est donc décrite par un ensemble de onze paramètres indépendants auxquels sont associés les onze générateurs suivants :

(2.4) Transformation de Lorentz $\quad M_{\mu\nu} = i\left(x_\mu \dfrac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$

(2.5) Translations $\quad P_\mu = i \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$

(2.6) Dilatation $\quad D = ix^\mu \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$

Ces expressions conduisent aux relations de commutation suivantes :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}) \tag{2.7}$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu) \tag{2.8}$$

$$[P_\nu, P_\mu] = 0 \tag{2.9}$$

$$[M_{\mu\nu}, D] = 0 \tag{2.10}$$

$$[P_\mu, D] = - iP_\mu \tag{2.11}$$

Ces considérations permettent d'obtenir l'égalité

$$e^{i\alpha D}P_\mu e^{- i\alpha D} = e^\alpha P_\mu \tag{2.12}$$

relation essentielle pour ce qui suit et qu'on obtient immédiatement à partir de (2.11) en développant l'opérateur $\exp(i\alpha D)P_\mu \exp(- i\alpha D)$ par rapport à α.

3. — RÉINTERPRÉTATION DU GROUPE D'ISOSPIN

Les générateurs infinitésimaux du groupe d'isospin satisfont aux relations de commutation

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k \tag{3.1}$$

où ε_{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique défini par $\varepsilon_{123} = 1$. Dans l'interprétation habituelle, les transformations du groupe d'isospin commutent avec les transformations du groupe de Poincaré, ce qui se traduit pour les générateurs infinitésimaux par les relations de commutation

$$[M_{\mu\nu}, \tau_i] = 0 \tag{3.2}$$

$$[P_\mu, \tau_i] = 0 \tag{3.3}$$

Cette dernière propriété implique l'invariance de la masse sous le groupe d'isospin (On rappelle que l'opérateur de masse M est lié aux générateurs des translations par $M^2 = P_\mu P^\mu$).

Pour sauvegarder la notion d'isospin, tout en tenant compte des différences de masse à l'intérieur d'un multiplet, on est amené à chercher une réalisation de (3.1) qui ne commute plus avec les P_μ. L'utilisation de l'opérateur exp ($i\alpha$D) introduit au paragraphe précédent permet d'obtenir de telles réalisations. En effet, les deux exemples suivants :

$$(3.4) \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} \cdot & A_1 \\ A_1^{-1} & \cdot \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} \cdot & -iA_1 \\ iA_1^{-1} & \cdot \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{pmatrix}$$

(3.5)

$$\tau_1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cdot & A_2 & \cdot \\ A_1^{-1} & \cdot & A_3 \\ \cdot & A_3^{-1} & \cdot \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cdot & -iA_2 & \cdot \\ iA_2^{-1} & \cdot & -iA_2 \\ \cdot & iA_3^{-1} & \cdot \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}$$

satisfont aux relations (3.1) quels que soient les A_j; on peut en particulier choisir

$$(3.6) \qquad A_j = e^{i\alpha_j D}$$

L'exemple (3.4) sera utilisé explicitement dans le paragraphe suivant pour l'étude des doublets d'isospin. Il n'y aura aucune difficulté à traiter le cas des isotriplets à partir de l'exemple (3.5). La généralisation au cas des isomultiplets de dimension plus élevée est évidente.

Notons quelques propriétés de l'algèbre (3.4), (3.6) présentée ici. Les relations de commutation s'écrivent

$$(3.7) \qquad [M_{\mu\nu}, \tau_i] = 0$$

$$(3.8) \qquad [P_\mu, \tau_3] = 0$$

$$(3.9) \qquad [P_\mu, \tau_m] = \{ -ish\alpha\varepsilon_{mn}\tau_n + (ch\alpha - 1)\tau_m \} P_\mu$$

où ε_{mn} $(m, n = 1,2)$ est antisymétrique et $\varepsilon_{12} = 1$. Les éléments P_μ, $M_{\mu\nu}$ et τ_i engendrent une algèbre de Lie infinie en définissant une chaîne d'opérateurs du type

$$(3.10) \qquad X_{m\mu} = \tau_m P_\mu$$

$$(3.11) \qquad X_{m\mu\nu} = \tau_m P_\mu P_\nu$$

$$(3.12) \qquad X_{m\mu\nu\cdot\rho\cdot} = \tau_m P_\mu P_\nu \ldots P_\rho \ldots$$

4. — INVARIANCE DU LAGRANGIEN LIBRE POUR UN DOUBLET D'ISOSPIN DE MASSES DIFFÉRENTES

Nous allons appliquer les considérations qui précèdent à un ensemble de deux particules de Dirac de masses différentes m_1 et m_2 formant un doublet d'isospin. Cette étude peut s'étendre de manière évidente aux multiplets (ou même aux supermultiplets) de spin et d'isospin quelconques.

Désignant par $\Phi(x)$

(4.1) $$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix}$$

les champs des deux particules de Dirac, le lagrangien libre s'écrit

(4.2) $$\mathrm{L} = \int \mathcal{L}(x) d^4x$$

avec

(4.3) $$\mathcal{L}(x) = \bar{\Phi}(y)\mathrm{K}\Phi(x)$$

où

(4.5) $$\mathrm{K} = \begin{pmatrix} m_1^{-1}(i\gamma_\mu\partial^\mu + m_1) & . \\ . & m_2^{-1}(i\gamma_\mu\partial^\mu + m_2) \end{pmatrix}$$

et d'où l'on déduit les équations de mouvement habituelles

(4.5) $$\begin{aligned} (i\gamma_\mu\partial^\mu + m_1)\Psi_1(x) &= 0 \\ (i\gamma_\mu\partial^\mu + m_2)\Psi_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

Nous supposons que le groupe d'isospin agit sur Φ de la façon induite par (3.4). Plus précisément, à toute transformation g de SU (2)

(4.6) $$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad |a|^2 = +|b|^2 = 1$$

on fera correspondre l'opérateur G

(4.7) $$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} a & be^{i\alpha\mathrm{D}} \\ -b^*e^{-i\alpha\mathrm{D}} & a^* \end{pmatrix}$$

où, pour des raisons d'unitarité, l'opérateur D est symétrisé sous la forme

(4.8) $$\mathrm{D} = \frac{i}{2}(x^\mu\partial_\mu + \partial_\mu x^\mu) = i(x^\mu\partial_\mu + 2)$$

En utilisant les identités

(4.9) $$e^{i\alpha D}\Psi(x) = e^{-2\alpha}\Psi(e^{-\alpha}x)$$

(4.10) $$e^{-i\alpha D}\Psi(x) = e^{2\alpha}\Psi(e^{\alpha}x)$$

et après quelques manipulations, on démontre que le Lagrangien est invariant sous les transformations G, pourvu que α satisfasse à la relation

(4.11) $$\alpha = ln(m_2/m_1)$$

Nous avons ainsi construit explicitement un formalisme lagrangien de deux particules de masses différentes, *invariant* pour un nouveau groupe de spin isotopique.

5. — CONCLUSION

Nous avons présenté un modèle qui décrit des isomultiplets au niveau des particules libres (ou du lagrangien libre). Ce modèle a l'avantage de tenir compte explicitement des différences de masses présentes dans ces multiplets. Le lagrangien libre est parfaitement invariant pour un nouveau groupe d'isospin isomorphe au groupe SU (2) mais le groupe de Poincaré ne commute plus avec le groupe d'isospin. Nous avons pour cela fait appel aux propriétés de l'opérateur de dilatation comme vecteur de ce changement de masse bien qu'on puisse imaginer d'autres opérateurs pour jouer un rôle analogue. La recherche d'un autre opérateur serait probablement utile pour pouvoir traiter correctement l'invariance du lagrangien d'interaction. Signalons enfin que la méthode utilisée se généralise aisément aux groupes de symétrie, tel SU (3), qui classent les particules en supermultiplets.

REMERCIEMENTS

L'essentiel de ce travail a été réalisé au C. E. R. N. au début de l'année 1964. La mise au point en a été faite à l'Institute for Advanced Study de Princeton. Nous tenons à remercier ces deux institutions pour leur accueil.

(Manuscrit reçu le 10 février 1967).