ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PHILIPPE DROZ-VINCENT

Structures subordonnées à un opérateur complexe

Annales de l'I. H. P., section A, tome 8, nº 1 (1968), p. 81-91
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_1_81_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. VIII, n° 1, 1968, p. 81-91. *Physique théorique.*

Structures subordonnées à un opérateur complexe

par

Philippe DROZ-VINCENT
Institut Henri Poincaré
Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.

RÉSUMÉ. — Par analogie avec la notion d'espace vectoriel hermitien, on introduit d'autres structures géométriques simples. Elles sont reliées à une structure d'espace vectoriel complexe, et peuvent se rencontrer en Mécanique et en Physique. L'espace des spineurs usuels s'en trouve être une illustration.

ABSTRACT. — In analogy with the notion of hermitian vector space, other simple geometrical structures are introduced. They are related to a complex vector space structure, and occur in Mechanics and Physics. A suggestive exemple is found to be the usual spinors space.

I. — INTRODUCTION

Il n'est sans doute pas sans intérêt de mettre explicitement en évidence certaines structures très simples qui sont sous-jacentes dans de nombreuses questions de Mécanique ou de Physique Mathématique.

Les bivecteurs de l'espace-temps minkowskien fournissent l'exemple d'une structure non hermitienne qui est cependant subordonnée à un opérateur complexe. Ceci nous a conduit naturellement à définir, d'un point de vue plus général, des notions très simples qui sont analogues à celle d'espace vectoriel hermitien mais s'en distinguent dès le début par des propriétés de symétrie différentes.

On peut étudier pour elles-mêmes ces structures et faire des comparaisons avec le cas hermitien. Mais il sera surtout intéressant de voir comme elles apparaissent fréquemment en Physique et en Mécanique (spineurs, espace des phases, etc.).

Dans cet article nous ne développons pas le point de vue différentiel : il s'agit seulement de structures affectées à des espaces vectoriels. On pourrait toutefois généraliser et introduire des variétés « presque bi-euclidiennes » ou « presque bi-symplectiques » qui s'ajouteraient à une faune déjà nombreuse (dont [*15*] donne un aperçu).

Je tiens à remercier le Professeur A. Lichnerowicz pour de très judicieuses remarques et M. E. Bonan pour d'instructives discussions.

II. — NOTATIONS

Les coordonnées d'un vecteur de l'espace E^{2n} sont affectées d'indices latins $i, j, k = 1, \ldots, 2n$. Par ailleurs :

$$A, B, C, D = 1, \ldots, n \qquad \underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D} = n+1, \ldots, 2n \qquad \underline{\underline{A}} = A.$$

On désigne par E_*^{2n} l'espace dual de E^{2n}.

Dans l'espace de Minkowski signature $+ - - -$. Indices grecs $= 0, 1, 2, 3$ Indices spinoriels $a, b, c = 1, 2, 3, 4$.

On désigne par la même lettre une forme bilinéaire et le tenseur ou l'application de E^{2n} dans E_*^{2n} qu'elle définit. Exemple :

$$h(X, Y) = X^i h_{ij} Y^j = (X, hY)$$

La transposition est notée $\sim$: $(X, TY) = (Y, \tilde{T}X)$.

Conjugaison complexe : $z \to \bar{z}$. Même notation pour les tenseurs ; quand c'est plus commode on emploie aussi $\tau : \tau T = \overline{T}$. La notion de tenseur pur et en particulier de forme pure de type (a, b) figure dans [*1*], p. 205.

III. — STRUCTURES BI-EUCLIDIENNE ET BI-SYMPLECTIQUE

1) Définition et propriétés communes.

Par analogie avec la notion bien connue d'espace vectoriel hermitien [*1*] nous avons introduit les structures suivantes [*2*] :

Définition. — Un espace vectoriel *bi-euclidien* (respectivement *bi-symplectique*) est un espace vectoriel réel E^{2n} muni de deux formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques) *échangeables* l'une avec l'autre.

La notion habituelle d'échangeabilité [*1*] s'étend naturellement à des formes bilinéaires sans symétrie spécifiée [*2*]. D'une manière générale h et k sont échangeables quand

$$h^{-1}k + k^{-1}h = 0. \tag{III.1}$$

Il en résulte que les structures bi-symplectiques définies plus haut coïncident avec les structures *symplectiques complexes* d'Ehresmann et Bonan [*3*] [*4*] (Ceci du point de vue algébrique, dans le cadre d'un espace vectoriel).

Si les formes bilinéaires h et k définissent un espace vectoriel bi-euclidien ou bi-symplectique, l'échangeabilité requiert qu'elles soient de rang $2n$, c'est-à-dire non dégénérées.

On peut dire que h et k sont les formes bilinéaires *fondamentales* de la structure. Dans le cas bi-euclidien on les appellera *métriques* (non définies positives).

Pour toute structure bi-euclidienne ou bi-symplectique, le produit $h^{-1}k$ définit manifestement une application linéaire (réelle) et anti-involutive de E^{2n} sur lui-même, c'est-à-dire une structure d'*espace vectoriel complexe*.

Inversement, étant donné sur E^{2n} un opérateur complexe $\mathscr{I}$ et une métrique (resp. une 2-forme) h de rang $2n$ et anti-invariante par $\mathscr{I}$, ce qui signifie

$$h(X, Y) = -h(\mathscr{I}X, \mathscr{I}Y), \tag{III-2}$$

alors on en déduit canoniquement la métrique (resp. 2-forme) k échangeable avec h, par conséquent une structure bi-euclidienne (resp. bi-symplectique) subordonnée à $\mathscr{I}$ [*2*].

Dans la suite on complexifie [*5*] l'espace E^{2n}. Tant qu'aucune confusion n'est à craindre, l'espace complexifié peut encore être noté E^{2n}. Il admet les sous-espaces E^+ et E^- associés respectivement aux valeurs propres $+i$ et $-i$ de l'opérateur complexe $\mathscr{I}$ [*1*]. Soit h une forme bilinéaire fondamentale d'une structure bi-euclidienne ou bi-symplectique subordonnée à $\mathscr{I}$.

On a généralement $h(X, \mathscr{I}X) \neq 0$, contrairement à ce qui se passerait pour une structure hermitienne.

Par contre, il résulte de (III-2) et de la définition de $E^{\pm}$ que :

$$\text{Si} \quad X \in E^+ \quad \text{et} \quad Y \in E^-, \quad \text{alors} \quad h(X, Y) = 0.$$

Ainsi, dans un espace bi-euclidien les sous-espaces supplémentaires E^+ et E^- sont orthogonaux au sens de l'une et l'autre métrique, mais un vecteur et son transformé par $\mathscr{I}$ ne sont généralement pas orthogonaux.

Bases adaptées.

On sait qu'il existe des bases (complexes) de E^{2n} qui sont *adaptées* à $\mathscr{I}$ [6]. Elles sont de la forme (ε_A, $\varepsilon_{\underline{A}} = \tau\varepsilon_A$) où les n vecteurs ε_A forment une base de E^+. Dans la base (ε_k) les composantes de $\mathscr{I}$ sont données par la matrice $2n \times 2n$

(III-3) $$\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}$$

A toute base adaptée (ε_k) correspond la base réelle (E_j)

(III-4) $$E_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_A + \varepsilon_{\underline{A}}) \quad , \quad E_{\underline{A}} = \mathscr{I} E_A$$

Dans (E_j) il est bien connu que $\mathscr{I}$ est représenté par

(III-5) $$\begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$$

avec I_n = matrice unité $n \times n$.

Dans (E_j) les composantes de h sont des quantités réelles liées par

(III-6) $$h_{A\underline{B}} = h_{\underline{A}B} \qquad h_{AB} = -h_{\underline{AB}}.$$

2) Structure bi-euclidienne : autres propriétés.

Il est à peine nécessaire de remarquer que les métriques fondamentales d'une structure bi-euclidienne étant des tenseurs symétriques réels, si h est l'une d'elles, la forme $h(\overline{Z}, Z)$ est à valeurs réelles.

Si h est métrique fondamentale d'une structure bi-euclidienne, alors $h_{ij}X^iX^j$ définit *pour X réel* une forme quadratique de signature hyperbolique (n, n) — c'est-à-dire n carrés positifs et n carrés négatifs.

Démonstration :

Soit (p, q) la signature inconnue de la métrique h_{ij}. Considérons une base orthonormée par rapport à h : soit $(e_{i'}, e_{j''})$ cette base.

Les p vecteurs $e_{i'}$ sont de carré $+1$ et les q vecteurs $e_{i''}$ sont de carré -1. Les vecteurs $\mathscr{I}e_k$ forment aussi une base de E^{2n}. La relation (III-2) montre que cette dernière base est aussi orthonormée. Les p vecteurs $\mathscr{I}e_{i'}$ sont de carré négatif, tandis que les q vecteurs $\mathscr{I}e_{j''}$ sont de carré positif.

Étant donné une métrique h hyperbolique de type (n, n), il est toujours possible de trouver des métriques k échangeables avec h. En vertu du théorème précédent elles seront elles aussi hyperboliques de type (n, n).

Pour chercher ces métriques on peut employer un repère orthonormé par rapport à h qui est alors représentée par la matrice

$$\begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{vmatrix}$$

Il y a une infinité de solutions.

Par exemple :

$$(k) = \begin{vmatrix} 0 & b \\ b^{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

où b est seulement astreint à vérifier $\tilde{b}^{-1} = b$. Lorsqu'on prend $b = + I_n$ le produit $\mathscr{I} = h^{-1}k$ se trouve représenté par la matrice (III-5).

Exemple de structure bi-euclidienne.

Les bi-vecteurs (tenseurs antisymétriques de rang 2) de l'espace-temps minkowskien M_4 forment un espace vectoriel de dimension 6. La métrique minkowskienne induit sur l'espace Λ^6 des bi-vecteurs un produit scalaire

$$\text{(III-7)} \qquad X . Z = 1/2 X^{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta} \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$$

anti-invariant par l'opération dualité $*$ puisque

$$* X^{\alpha\beta} * Z_{\alpha\beta} \equiv - X^{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta}.$$

A la structure complexe définie par l'opérateur $*$ est subordonnée une structure bi-euclidienne dont les métriques échangeables sont respectivement déterminées par (III-7) et $X.(*Z)$ [*2*]. La structure complexe $*$ assure à Λ^6 (complexifié !) une décomposition en somme directe de deux sous-espaces qui ont été utilisés par Debever [*7*].

Autre exemple.

Soit V_n une variété riemannienne et $T(V_n)$ son espace fibré des vecteurs tangents (Coordonnées locales x^α dans V_n et $y^i = (x^\alpha, v^\beta)$ dans le fibré tangent). En un point y de $T(V_n)$ il y a l'espace vectoriel $T_{2n}(y)$ tangent à $T(V_n)$. Il est bien connu que $T(V_n)$ est naturellement une variété presque kählerienne [*8*] [*9*]. Cette structure, induite par la structure riemannienne de la base, est subordonnée à un opérateur presque complexe $\mathscr{I}$. Étant donné y, tout élément de T_{2n} admet une décomposition unique en parties horizontale et verticale :

$$X = X_{\mathrm{hor}} + X_{\mathrm{ver}}.$$

Soit A l'involution de T_{2n} qui à tout X associe

$$AX = X_{\mathrm{hor}} - X_{\mathrm{ver}}.$$

Au repère $(dx^\alpha, \nabla v^\beta)$ de T^*_{2n} correspond dans T_{2n} le repère formé par les n vecteurs horizontaux $e_\alpha = \partial_\alpha - \Gamma_\alpha{}^\mu{}_\rho v^\rho \partial_\mu$ et les n vecteurs verticaux

$$e_{\underline{\alpha}} = \partial/\partial v^\alpha.$$

En écrivant les composantes de $\mathscr{I}$ et de A dans ce repère (e_i) [*10*] il est facile de voir que $\mathscr{I}$ et A anticommutent. Il en résulte que $B = A\mathscr{I}$ est une autre involution.

La métrique g de V_n induit sur $T(V_n)$ la métrique G dont les composantes sont, dans le repère (e_i)

$$G_{ij} = \begin{vmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g_{\alpha\beta} \end{vmatrix}$$

Introduisant alors $G' = GA$ et $G'' = GB$ on voit que ce sont des formes bilinéaires symétriques, de composantes

$$G'_{ij} = \begin{vmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -g_{\alpha\beta} \end{vmatrix} \qquad G''_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & g_{\alpha\beta} \\ g_{\alpha\beta} & 0 \end{vmatrix}$$

L'échangeabilité de G' et G'' est immédiate et $(G')^{-1}G'' = \mathscr{I}$. Ainsi G' et G'' déterminent sur $T_{2n}(y)$ une structure bi-euclidienne subordonnée à $\mathscr{I}$.

Naturellement on pourrait s'intéresser au champ de structures bi-euclidiennes obtenu quand y décrit $T(V_n)$.

Dans les applications à la dynamique analytique il pourra être utile d'employer, au lieu de G, l'une des métriques G' ou G'' qui sont toujours du type hyperbolique (n, n) quelle que soit la signature de g.

3) **Structure bi-symplectique. Autres propriétés.**

Ainsi qu'on l'a remarqué au paragraphe 1 de cette section, la notion de structure bi-symplectique coïncide *algébriquement* avec la notion de structure symplectique complexe (au sens d'Ehresmann et Bonan). Autrement dit, une variété V_{2n} porte une structure presque symplectique complexe lorsqu'en tout point x, l'espace vectoriel tangent T_x^{2n} est muni d'une structure bi-symplectique. Ceci d'une manière suffisamment différentiable. Comme l'a montré Bonan la structure symplectique complexe, et par suite la structure bi-symplectique, implique une dimension multiple de 4 : $n = 2m$ [3] [11]. Soient h et k les formes quadratiques extérieures définissant la structure ; celle-ci est subordonnée à $\mathscr{I} = h^{-1}k$. Si on pose

$$2\mu = k + ih$$

on trouve que μ est une forme pure de type (2, 0) par rapport à $\mathscr{I}$, et partout de rang $2m = n$.

Inversement, $\mathscr{I}$ étant donné, si μ est une 2-forme complexe de rang $2m$ et de type (2,0) par rapport à $\mathscr{I}$, alors μ est anti-invariante par $\mathscr{I}$, et l'on voit avec Bonan que les 2-formes réelles

$$h = i(\mu - \overline{\mu}) \qquad k = \mu + \overline{\mu}$$

vérifient

$$\mathscr{I} = h^{-1}k$$

et sont par conséquent échangeables.

Cas de E^4.

Considérons un espace vectoriel E^4 muni de la structure complexe définie par $\mathscr{I}$. Les sous-espaces $E^\pm$ sont à 2 dimensions. Les 2-formes de E^+ sont toutes identiques à un facteur complexe près. On peut dire la même chose des 2-formes de E^4 qui sont pures de type (2,0).

Ainsi, à un facteur près $z \in \mathbb{C}$, il n'y a qu'une structure symplectique complexe μ subordonnée à $\mathscr{I}$.

IV. — L'ESPACE DES SPINEURS

1) Structure complexe.

Soit M_4 l'espace de Minkowski, qu'on supposera orienté. Notations habituelles : métrique $g_{\mu\nu}$. Élément de volume $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Ceci introduisant le groupe de Lorentz, on peut alors parler de l'espace S_4 des 1-spineurs contravariants utilisés habituellement en physique. On sait que c'est un espace vectoriel de dimension 4 sur le corps des complexes (noté $\mathbb{C}$). S_4 est stable par conjugaison complexe. L'application antilinéaire

$$\psi \to \overline{\psi} = \tau\psi$$

définie par la conjugaison complexe sera identifiée à la conjugaison de charge, car on n'envisage ici que des *matrices de Dirac réelles* [*12*]. En fait ces dernières déterminent un vecteur-spineur de composantes $\gamma_\mu{}^a{}_b$. Indices spinoriels $a, b, c \ldots = 1, 2, 3, 4$.

Le vecteur-spineur de Dirac vérifie la relation fondamentale :

(IV-1) $$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = -2g_{\mu\nu}$$

écrite en omettant les indices spinoriels.

La relation manifestement covariante

(IV-2) $$\mathscr{I} = 1/4!\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda \eta_{\mu\nu\rho\lambda}$$

définit $\mathscr{I}$ comme spineur une fois contravariant et une fois covariant.

Étant réel et anti-involutif ($\mathscr{I}^2 = -Id.$) $\mathscr{I}$ détermine sur S_4 une structure d'espace vectoriel complexe.

En repères *orthonormés positifs*, $\mathscr{I}$ coïncide avec $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. C'est-à-dire

$$\mathscr{I} = -\gamma_5$$

en utilisant la « matrice » γ_5 habituelle : $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$.

Une conséquence bien connue de la structure complexe est l'apparition des spineurs de type positif ou négatif de la théorie du neutrino [*13*]. D'après une propriété triviale de γ_5 on peut écrire :

(IV-3) $$\mathscr{I}\gamma_\mu + \gamma_\mu \mathscr{I} = 0.$$

2) La 2-forme spinorielle fondamentale.

L'adjonction de Dirac est liée à l'existence d'un spineur deux fois covariant antisymétrique Γ_{ab} que l'on peut appeler, avec Lichnerowicz [*12*], 2-forme spinorielle fondamentale. A tout 1-spineur contravariant ψ^a la 2-forme spinorielle Γ permet d'associer le 1-spineur covariant

(IV-4) $$\psi_a = \Gamma_{ab}\psi^b.$$

En passant par l'intermédiaire du conjugué complexe $\overline{\psi}$ on obtient alors, de manière antilinéaire

(IV-5) $$(\text{Adj. } \psi)_a = \Gamma_{ab}\overline{\psi}^b$$

qu'il sera commode de noter $\overline{\psi}_a$.

Lichnerowicz a montré comment au vecteur-spineur de Dirac $\gamma_\mu{}^a{}_b$

la 2-forme spinorielle Γ fait correspondre un vecteur-2-spineur covariant $\gamma_{\mu ab}$ qui est symétrique en tant que spineur :

(IV-6) $$\widetilde{\Gamma\gamma_\mu} = \Gamma\gamma_\mu.$$

De façon analogue le produit $L = \Gamma\mathscr{I}$ est un 2-spineur covariant. Intéressons-nous à ses éventuelles propriétés de symétrie.

Il suffit de travailler avec γ_5. En écrivant

(IV-7) $$\Gamma\gamma_5 = (\Gamma\gamma_0)\Gamma^{-1}(\Gamma\gamma_1)\Gamma^{-1}(\Gamma\gamma_2)\Gamma^{-1}(\Gamma\gamma_3)$$

on n'a plus à considérer que des spineurs qui sont soit deux fois covariants, soit deux fois contravariants. Il devient aisé de transposer la forme bilinéaire $\Gamma\gamma_5$. D'après (IV-6) et l'antisymétrie de Γ^{-1} on trouve

(IV-8) $$\widetilde{\Gamma\gamma_5} = -\Gamma\gamma_5.$$

Par conséquent L est antisymétrique.

En vertu d'un lemme introduit antérieurement [*14*] l'antisymétrie de L équivaut à l'anti-invariance de Γ :

(IV-9) $$\Gamma(X, Y) = -\Gamma(\mathscr{I}X, \mathscr{I}Y) \qquad \forall X \text{ et } Y \in S_4$$

Enfin on peut prouver que Γ est *imaginaire pur.*

Preuve :

On sait [*14*] que $\forall X \in S_4$ le vecteur

(IV-10) $$J_\alpha = i\bar{X}\gamma_\alpha X = i\bar{X}_a\gamma_\alpha{}^a{}_b X^b$$

est *réel.*

Il en résulte que pour tout vecteur $V^\alpha \neq 0$, l'expression

(IV-11) $$V^\alpha J_\alpha = -iV^\alpha\gamma_{\alpha cb}\bar{X}^c X^b$$

définit une forme hermitienne sur S_4 (On pose $\gamma_{\alpha cb} = \Gamma_{ca}\gamma_\alpha{}^a{}_b$). D'après (IV-6) on sait que $V^\alpha\gamma_{\alpha cb}$ est un 2-spineur symétrique. Il est alors nécessairement imaginaire pur, et les $\gamma_\alpha{}^a{}_b$ étant réels, c'est donc que Γ aussi est imaginaire pure. On peut maintenant poser

$$\Gamma = ih \qquad \text{et} \qquad L = ik$$

et faire apparaître la structure « bi-symplectique », c'est-à-dire symplectique complexe, de l'espace S_4 : h et k sont anti-invariantes par $\mathscr{I}$ et mutuellement échangeables, enfin elles permettent de construire la forme pure μ donnée par

$$2\mu = k + ih = \Gamma - iL = \Gamma(I - i\mathscr{I}).$$

Ici μ est de type (2,0) et de rang 2.

3) Notions associées à une direction d'espace-temps.

A tout vecteur d'espace-temps v^α les γ_μ permettent de faire correspondre le spineur

$$\mathscr{J}(v) = v^\alpha \gamma_\alpha \tag{IV-12}$$

qui est une fois covariant et une fois contravariant.

En dehors du cas isotrope on supposera v normé : $v^\alpha v_\alpha = \pm 1$. Quand v est du genre temps (resp. espace, resp. isotrope) $\mathscr{J}$ définit sur S_4 un opérateur linéaire réel anti-involutif (resp. involutif, resp. nilpotent).

Cet énoncé est trivialement équivalent à (IV-I).

D'après (IV-3) $\mathscr{I}$ et $\mathscr{J}$ anticommutent, donc pour v du genre temps (resp. espace) ils déterminent sur S_4 une structure d'*espace vectoriel quaternionien* (resp. structure de *module quaternionien de seconde espèce*) (notions définies par C. Ehresmann [*4*] et P. Libermann [*15*]).

D'après (IV-6) le 2-spineur covariant

$$\Gamma\mathscr{J} = v^\mu(\Gamma\gamma_\mu) \tag{IV-13}$$

est symétrique.

En vertu du lemme déjà invoqué plus haut [*14*], ceci s'énonce de façon équivalente.

Pour v du genre temps (resp. espace) la 2-forme spinorielle Γ est invariante (resp. anti-invariante) par $\mathscr{J}$.

Pour v du genre temps on sait ce qu'est un spineur *pur* par rapport à $\mathscr{J}$. La symétrie de $\Gamma\mathscr{J}$ entraîne

$$\Gamma(X, \mathscr{J}Y) + \Gamma(\mathscr{J}X, Y) = 0. \tag{IV-14}$$

D'après les propriétés de certains opérateurs linéaires sur les formes [*16*] cela signifie :

Pour tout v unitaire du genre temps, Γ est une forme spinorielle pure de type $(1,1)$ par rapport à $\mathscr{J}(v)$.

RÉFÉRENCES

[*1*] André LICHNEROWICZ, *Théorie Globale des Connexions et des Groupes d'Holonomie.* Cremonese, Rome, 1955.

[*2*] Philippe DROZ-VINCENT, Sur certaines structures résultant de la notion d'échangeabilité. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **262**, juin 1966, p. 1484-1487.

[*3*] Edmond BONAN, Structures presque hermitiennes quaternioniennes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **258**, février 1964, p. 1988-1991.

[*4*] C. EHRESMANN, Sur les variétés presque complexes. *Proc. Intern. Congr. of Math.*, 1950, p. 412.
[*5*] Voir [*1*], p. 201.
[*6*] Voir [*1*], p. 205.
[*7*] R. DEBEVER, *Cahier de Physique*, Paris, n^{os} 168-169, sept. 1964, p. 303-350, § 9 et 10.
[*8*] S. SASAKI, On the differential geometry of tangent bundles of Riemann manifolds. *Tôhoku Math. Journ.*, **10**, 1958, p. 338-354.
[*9*] S. I. TACHIBANA et M. OKUMURA, On the almost complex structure of tangent bundles of riemannian spaces. *Tôhoku Math. J.*, **2**, 1962, p. 14.
[*10*] Voir [*9*], p. 158.
[*11*] Edmond BONAN, *Thèse Paris*, 1967.
[*12*] André LICHNEROWICZ, Champ de Dirac, champ du neutrino et transformations C, P, T sur un espace-temps courbe. *Ann. Institut Henri Poincaré*, vol. 1, n° 3, 1964, p. 233-290.
[*13*] A. LICHNEROWICZ et F. MORET-BAILLY, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **257**, 1963, p. 3542.
[*14*] Voir [*2*]. Ce lemme y est appelé Théorème III.
[*15*] Paulette LIBERMANN, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **233**, 1951, p. 1571 ; t. **234**, 1952, p. 1030. *Thèse Paris*, 1953, p. 37. Cesare Zuffi Éditeur, Bologne, 1953.
[*16*] Voir [*1*], p. 207-209.

Manuscrit reçu le 11 juillet 1967.