ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

G. CLÉMENT
B. JOUVET

Dynamique d'un champ auto-composé et la construction de l'espace-temps

Annales de l'I. H. P., section A, tome 8, nº 2 (1968), p. 191-204
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_2_191_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VIII, n° 2, 1968, p. 191-204.

Section A :
Physique théorique.

Dynamique d'un champ auto-composé et la construction de l'espace-temps (1)

par

G. CLÉMENT et B. JOUVET

Laboratoire de physique atomique et moléculaire
Collège de France, Paris.

ABSTRACT. — We study the problem of finding possible dynamics for fields which are composed of themselves, and of themselves only, restricting ourselves to one dimensional space-time.

On a simple model ($\lambda\Phi^3$) we show that the composition constraint $\Phi^2 = \Phi$ contains enough information to enable us to build a non trivial hamiltonian operator. The general solution of the equation of evolution is then obtained as a linear combination of a free spin 0 field φ, with Fermi statistics, and of the conserved current associated to that field.

We write down a lagrangian for this field, introducing the one-dimensional metric field as an independant variable. Although the classical hamiltonian is then zero, a non-conventional method of quantization enables us to deduce all the results of the quantum theory of the φ-field, including the composition constraint, and to express the metric field in terms of the φ-field.

(1) Ce travail a bénéficié de l'aide du Commissariat à l'Énergie Atomique.

INTRODUCTION

La définition des particules composées par la condition d'annulation des constantes de renormalisation des champs soulève un très intéressant problème dans le cas où tous les champs φ_i, supposés couplés localement (sans dérivées) dans le lagrangien, sont composés : d'une part tous les termes dynamiques, c'est-à-dire ceux qui font intervenir explicitement les dérivées par rapport aux coordonnées de l'univers, sont effacés par les conditions $Z_{\varphi_i} = 0$, et les équations de Lagrange se réduisent alors à des relations de contrainte locales $F(\varphi_i) = 0$, valables quel que soit $x^\mu \in E^4$; d'autre part l'absence de moments conjugués des champs φ_i entraîne la nullité du vecteur d'impulsion canonique, tandis que l'énergie canonique P_0 a une forme triviale $\int d^3x G(\varphi_i)$, qui ne permet pas de déterminer la dynamique des champs φ_i. En fait la dégénérescence extrême qui se produit dans ce cas est le reflet de ce que les seules relations subsistant à la limite $Z_{\varphi_i} = 0$ sont *indépendantes de la structure spatio-temporelle de l'univers* dans lequel le système est supposé évoluer. En l'absence d'une donnée de cette structure par les équations des champs, le seul fait de supposer qu'il existe une dynamique pour ces champs — c'est-à-dire qu'il existe des opérateurs de déplacement P_μ, compatibles avec les équations de contrainte $F(\varphi_i) = 0$ — conduit nécessairement à construire ces opérateurs en fonction implicite des opérateurs de champ φ_i eux-mêmes, le type d'univers dans lequel ces champs peuvent évoluer étant alors fixé par les postulats d'existence des générateurs.

Dans cet article nous étudions le cas d'un seul champ interagissant avec lui-même, par un couplage du type $\lambda\Phi^3$; l'équation de contrainte définissant le champ auto-composé est alors du type $\Phi = \Phi^2$. Nous montrons, au paragraphe I, comment le postulat d'existence d'une dynamique à *un seul* paramètre, le temps, détermine un hamiltonien ainsi que les relations de commutation de Φ avec ses quantités dérivées, ce qui permet d'obtenir une équation d'évolution dont on donne la solution explicite. Nous construisons ensuite, au paragraphe II, un Lagrangien d'où résultent l'équation d'évolution et l'hamiltonien déterminés au paragraphe I, ainsi que la contrainte initiale. La relativité générale fournit le cadre naturel qui permet d'interpréter ce Lagrangien, et nous montrons ainsi comment la métrique — c'est-à-dire l'opérateur fixant la dimension du temps — est effectivement reliée à l'opérateur du champ auto-composé.

I. — CONSTRUCTION D'UNE DYNAMIQUE

a) Équation de champ auto-composé.

Nous partirons du Lagrangien renormalisé

$$\mathrm{L} \equiv \frac{Z}{2}[\Phi^{\mu}\Phi_{\mu} - m^2\Phi^2] - \frac{1}{2}\delta m^2\Phi^2 + \frac{1}{3}g\Phi^3 \tag{1}$$

et de l'équation de champ correspondante :

$$Z(\Box\Phi + m^2\Phi) = -\delta m^2\Phi + g\Phi^2. \tag{2}$$

Le champ hermitien de spin 0 renormalisé Φ est dit auto-composé [*1*] si $Z = 0$. L'équation de champ se réduit alors à la contrainte

$$g\Phi^2 = \delta m^2\Phi$$

que l'on peut interpréter comme signifiant que le champ est égal au courant qui lui est couplé, ce courant étant lui-même constitué à partir du champ Φ.

Si les constantes g et δm^2 sont finies et non nulles on peut se ramener, en normalisant convenablement Φ, à la contrainte

$$\Phi^2 = 2\Phi \tag{3}$$

Manifestement, s'il est possible de donner un sens non trivial à cette équation de contrainte, ce ne peut être que de façon non classique. Cependant il est remarquable que celle-ci ne contienne plus explicitement de dynamique : si on tentait de retrouver une dynamique quantique en définissant $\dot{\Phi} = i[\mathrm{H}, \Phi]_-$, on aurait :

$$\dot{\Phi}(x, t) = i\lambda\int d^3x'[\Phi(\vec{x}', t), \Phi(\vec{x}, t)]_- \equiv 0,$$

puisque à la limite « limite » $Z = 0$, la densité hamiltonienne s'écrit :

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\delta m^2\Phi^2 - \frac{1}{3}g\Phi^3 = \lambda\Phi.$$

Le champ auto-composé serait ainsi « gelé » dans tout l'univers. Notons cependant que ce phénomène n'apparaît que si l'on remplace brutalement Z par 0 dans (1). En effet, quel que soit $Z \neq 0$, la relation de commutation canonique s'écrit :

$$[\dot{\Phi}(\vec{x}, t), \Phi(\vec{x}', t)]_- = -\frac{i}{Z}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \tag{4}$$

et l'hamiltonien comporte une contribution en $\frac{1}{2}Z\dot{\Phi}^2$ qui donne :

$$[i\mathrm{H}, \Phi(x)]_- = Z\int[\dot{\Phi}^2(x'), \Phi(x)]_- d^3x' = \dot{\Phi}(x)$$

d'après (4). Ainsi, la « limite » $Z \to 0$ est manifestement singulière, et nous adopterons le point de vue selon lequel on ne peut pas déduire l'hamiltonien auto-composé de l'hamiltonien élémentaire.

La seule information non ambiguë que nous possédions sur le champ auto-composé est donc la contrainte (3). Bien que cette contrainte semble à première vue dépourvue de sens physique [2], nous allons montrer qu'à partir d'elle *seule* (c'est-à-dire en « oubliant » la théorie (1) dont elle est issue) il est possible de construire une théorie physiquement non triviale ; nous verrons ainsi que la contrainte fondamentale (3), envisagée dans le schéma général de la théorie quantique des champs, contient effectivement des informations dynamiques.

La contrainte (3), isolée du contexte dont elle est déduite, ne contenant — comme nous l'avons fait remarquer — aucune information sur le nombre de dimensions de l'espace-temps, nous nous limiterons dans cet article au cas *d'une seule dimension :* le temps.

b) **Hamiltonien et relations de commutation.**

Pour plus de commodité nous raisonnerons dans ce qui suit, non pas sur l'opérateur Φ, mais sur l'opérateur

(5) $$\psi = \Phi - 1$$

La contrainte (3) étant alors remplacée par

(6) $$\psi^2 = 1$$

Soit ψ un opérateur (au sens mathématique du terme, c'est-à-dire opérateur en représentation de Schrödinger) solution de (6). Nous nous proposons de construire un opérateur hermitien H (hamiltonien) qui permette de passer aux opérateurs en représentation de Heisenberg :

(7) $$\psi(t) = e^{i\mathrm{H}t}\psi e^{-i\mathrm{H}t}$$

la famille d'opérateurs définie par (7) étant évidemment solution de (6).

Supposons pour l'instant donné un opérateur H, et définissons :

(8) $$\dot{\psi} = [i\mathrm{H}, \psi]_-$$

De (8) et (6) on déduit aisément la relation d'anticommutation :

$$[\dot{\psi}, \psi]_+ = 0 \tag{9}$$

et ses conséquences

$$[\dot{\psi}\psi, \psi]_+ = [\dot{\psi}\psi, \dot{\psi}]_+ = 0 \tag{10}$$

ainsi que les relations de commutation

$$\begin{aligned} [\dot{\psi}, \psi]_- &= 2\dot{\psi}\psi \\ [\dot{\psi}\psi, \dot{\psi}]_- &= -2\dot{\psi}^2\psi \\ [\dot{\psi}\psi, \psi]_- &= 2\dot{\psi} \end{aligned} \tag{11}$$

La dernière relation (11) permet de mettre H sous la forme :

$$H = -\frac{i}{2}\dot{\psi}\psi + C \tag{12}$$

où C est un opérateur hermitien qui commute avec ψ.

Maintenant nous *postulons*, comme on le fait habituellement, que *l'hamiltonien* H *s'exprime en fonction de* ψ *et* $\dot{\psi}$ *seulement* ([2]). D'après (9), l'opérateur $\dot{\psi}^2$ commute avec ψ ; la fonction-opérateur de ψ et $\dot{\psi}$ la plus générale compatible avec (12), compte tenu de la contrainte (6) et de ses conséquences, a donc la forme :

$$H(\psi, \dot{\psi}) = -\frac{i}{2}\dot{\psi}\psi + A(\dot{\psi}^2)\psi + B(\dot{\psi}^2) \tag{13}$$

En utilisant les relations d'anticommutation (9) et (10) on obtient :

$$(H - B)^2 = \frac{m^2}{4} \tag{14}$$

où on a posé :

$$m^2(\dot{\psi}^2) = \dot{\psi}^2 + 4A^2(\dot{\psi}^2). \tag{15}$$

Les opérateurs $\dot{\psi}^2$ et H commutant entre eux sont simultanément diagonalisables ; il en résulte d'après (14) que, sur chaque sous-espace propre de $\dot{\psi}^2$, l'hamiltonien H admet deux valeurs propres.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons à un seul sous-espace propre

([2]) Il en résulte que la famille d'opérateurs $\psi(t)$ définie par (7) appartient à l'algèbre engendrée par ψ et $\dot{\psi}$; autrement dit, ce postulat assure que l'évolution de $\psi(t)$ est déterminée par la donnée de deux conditions initiales $\psi(0)$ et $\frac{d}{dt}\psi(0)$.

de $\dot{\psi}^2$ ce qui revient à supposer que $\dot{\psi}^2$ est un nombre ([3]). Ceci a en particulier pour effet de compléter la symétrie des relations (11) qui deviennent isomorphes aux relations de commutation des matrices de Pauli, avec par exemple la correspondance : $\psi \sim \tau_1$, $\dot{\psi} \sim \tau_2$, $i\dot{\psi}\psi \sim \tau_3$.

L'hamiltonien a alors deux niveaux d'énergie $B \pm \frac{m}{2}$. Si on appelle « vide » le niveau fondamental, l'autre niveau a, par rapport au vide, l'énergie m qui joue donc bien le rôle d'une masse.

Remarquons que, jusqu'ici, ces deux niveaux jouent des rôles tout à fait symétriques, et que notre définition du « vide » est, en ce qui concerne la symétrie de (14), arbitraire. Pour préserver cette symétrie, nous choisirons l'échelle des énergies de telle façon que $B(\dot{\psi}^2) = 0$.

c) Équation d'évolution.

Définissons l'opérateur

$$\ddot{\psi} = [iH, \dot{\psi}]_- \tag{16}$$

En utilisant l'expression (13) de H, ainsi que les relations de commutation (11), on obtient l'équation :

$$\ddot{\psi} + \dot{\psi}^2\psi = -2iA\dot{\psi}\psi \tag{17}$$

que l'on peut réécrire, en utilisant (13) et (15) :

$$\ddot{\psi} + m^2\psi = 4AH \tag{18}$$

L'équation d'évolution ([4]) sous la forme (18) rappelle l'équation classique de la gravitation (avec masse du graviton) $\Box\psi^{\mu\nu} + m^2\psi^{\mu\nu} = \chi T^{\mu\nu}$. Mais sous sa forme (17) elle rappelle au contraire une équation du type électrodynamique, le terme de source $-iA[\dot{\psi}, \psi]_-$ ayant la forme habituelle du courant associé à un champ de spin 0.

([3]) On serait tenté de penser qu'à l'opérateur $\dot{\psi}^2$ correspond par exemple la conservation d'un nombre quantique. Mais étant donné que nous n'avons aucune limitation sur le spectre possible de $\dot{\psi}^2$, le choix qui est fait ici est encore le moins arbitraire et le plus simple.

([4]) Dans ce qui suit nous nous plaçons en représentation de Heisenberg, mais nous continuerons à écrire, par abus de langage, ψ pour $\psi(t)$, $\dot{\psi}$ pour $\frac{d}{dt}\psi(t)$, etc.

La solution de (18) a la forme :

$$\psi = \varphi\sqrt{2m}\cos\theta + \gamma\sin\theta \tag{19}$$

où on a posé

$$\dot{\psi}^2 = m^2\cos^2\theta$$
$$\mathrm{A} = \frac{m}{2}\sin\theta$$

et

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}[a_+e^{imt} + a_-e^{-imt}] \tag{20}$$

$$\gamma = \frac{2}{m}\mathrm{H} = -2i\dot{\varphi}\varphi. \tag{21}$$

L'opérateur γ est donc le *courant conservé* associé à φ. Remarquons que $\sqrt{2m}\varphi$ et γ vérifient séparément la contrainte (6), et que $[\varphi, \gamma]_+ = 0$. La décomposition (19) met en lumière, d'une autre façon que la contrainte (6), le caractère auto-composé des champs étudiés, le champ φ et son courant représentant deux composantes du même être mathématique ψ.

On déduit de (6) et (9) les relations d'anticommutation satisfaites par les opérateurs $a_\pm$:

$$\begin{aligned} [a_+, a_-]_+ &= 1 \\ a_\pm^2 &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

c'est-à-dire les relations habituelles pour les fermions. D'autre part l'hamiltonien s'écrit alors :

$$\mathrm{H} = m\left(a_+a_- - \frac{1}{2}\right) \tag{23}$$

Le fait que l'espace de Fock n'ait que deux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ est donc lié au principe d'exclusion. Sur cet espace, $a_\pm$ jouent le rôle de $\tau_\pm$, et γ celui de τ_3.

Nous avons ainsi montré qu'un champ satisfaisant à la contrainte (6) *peut* s'écrire, d'après (19), comme une superposition arbitraire d'un champ libre et du courant associé à ce champ. Il est intéressant de chercher à construire un Lagrangien qui permette de *déduire* les résultats précédents (y compris la contrainte fondamentale (6)).

II. — FORMALISME LAGRANGIEN

a) Lagrangien classique ([5]).

Nous venons de voir que les opérateurs φ et γ jouent le rôle de deux champs indépendants (ils anticommutent). Nous allons donc chercher à écrire un Lagrangien en fonction de φ, $\dot{\varphi}$, et d'un autre « champ » γ (la relation (21) qui exprime γ en fonction de φ et de $\dot{\varphi}$ devant apparaître comme une conséquence du principe variationnel), en nous inspirant de la remarque suivante :

On a vu au paragraphe I que l'opération de déplacement dans le temps, qui définit implicitement la dimension « temps », doit satisfaire les relations :

$$[i\mathrm{H}, \varphi]_- = \dot{\varphi} \tag{8}$$

$$\mathrm{H} = -2i\dot{\varphi}\varphi \tag{24}$$

Il est essentiel de remarquer que ce système est homogène par rapport à l'opérateur $\frac{d}{dt}$, et est par conséquent invariant sous *toutes* les transformations de coordonnées $t = f(t')$. Un Lagrangien conduisant à l'hamiltonien (24) devra admettre le groupe des transformations de coordonnées générales (à une dimension) comme groupe d'invariance, ce qui implique l'introduction d'un champ métrique.

L'équation d'évolution du champ φ étant du type Klein-Gordon, nous partirons donc du Lagrangien correspondant écrit, conformément à la remarque précédente, sous la forme covariante :

$$\mathrm{L}_\varphi \equiv \frac{1}{2}[g^{00}\varphi_0^2 - m^2\varphi^2] \tag{25}$$

([5]) Notons que si de façon générale on écrit

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}}[a^+(t) + a(t)],$$

on pourrait évidemment partir du Lagrangien du type de Dirac, $\mathrm{L} = ia^+\dot{a} - ma^+a$, qui donne l'équation d'évolution $\dot{a}^+ = ima^+$, et l'hamiltonien $\mathrm{H} = ma^+a$. Si on postulait alors des relations d'anticommutation du type (22), on retrouverait les résultats précédents. Toutefois ce Lagrangien ne nous semble pas intéressant car : 1) il ne peut pas être écrit en terme des quantités φ et $\dot{\varphi}$, et 2) il faut postuler la statistique de Fermi.

où $\varphi_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x^0}\varphi \equiv \dot{\varphi}$. Rappelons que, $e_0(t)$ étant un champ de vecteurs de base de la variété à une dimension, le tenseur métrique est défini en chaque point par $g_{00}(t) = e_0^2(t)$, et le tenseur contravariant associé par $g^{00} = [g_{00}]^{-1}$. L'élément de « temps propre » étant défini par $ds = e_0 dx^0$, l'intégrale d'action s'écrit :

$$W \equiv \int L ds \equiv \int \mathscr{L} dx^0$$

la densité lagrangienne correspondant à L étant

(26) $$\mathscr{L} \equiv e_0 L$$

A la densité lagrangienne du champ φ, nous ajouterons la densité lagrangienne du champ métrique :

(27) $$\mathscr{L}_G \equiv \lambda e_0$$

La densité lagrangienne totale $\mathscr{L} = \mathscr{L}_\varphi + \mathscr{L}_G$ s'écrit donc

(28) $$\mathscr{L} \equiv \frac{1}{2} e_0 [g^{00}\varphi_0^2 - m^2\varphi^2 + 2\lambda]$$

λ étant une constante arbitraire (qui sera fixée plus loin par la quantification).

Nous allons appliquer le principe variationnel aux deux champs φ et e_0 (e_0 jouant le rôle du champ γ ; un résultat de la quantification sera du reste $e_0 = \gamma$ défini par (21)).

La variation par rapport à e_0 donne :

(29) $$\frac{1}{2}(g^{00}\varphi_0^2 + m^2\varphi^2) = \lambda$$

On reconnaît l'équation de la « gravitation » à une dimension :

$$\lambda g_{00} = T_{00}.$$

Le moment conjugué de φ est :

(30) $$\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi_0} = e_0 \varphi^0$$

où $\varphi^0 \equiv g^{00}\varphi_0$. L'équation d'évolution $\frac{d}{dx^0}\pi = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi}$ s'écrit alors :

(31) $$\nabla_0 \varphi^0 + m^2 \varphi = 0$$

∇_0 étant le symbole de la dérivation covariante

$$\left(\nabla_0\varphi^0 = \partial_0\varphi^0 + \Gamma^0_{00}\varphi^0, \qquad \text{avec} \qquad \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{00}\right),$$

soit explicitement

$$\partial^2_{00}\varphi + g_{00}m^2\varphi = g^{00}e_0 . \partial_0 e_0 . \varphi_0 \tag{32}$$

Les deux équations de Lagrange (29) et (31) ne sont pas indépendantes, la deuxième pouvant être obtenue en dérivant la première.

Enfin l'hamiltonien est de la forme $H = H_\varphi + H_G$, où

$$H_\varphi \equiv \frac{1}{2}e_0[g^{00}\varphi_0^2 + m^2\varphi^2] = \lambda e_0 \tag{33}$$

d'après (29), et

$$H_G \equiv -\lambda e_0 \tag{34}$$

On obtient donc :

$$H = 0 \tag{35}$$

Ce résultat peut être interprété de la façon suivante : dans la théorie des champs usuelle, la métrique est (implicitement) introduite comme un champ externe, qui fixe le cadre par rapport auquel les autres champs évoluent ; ici, ayant rendu sa liberté dynamique au champ métrique, nous avons du même coup perdu la possibilité d'observer, dans un cadre fixé, l'évolution du système — une évolution étant toujours relative.

b) **Quantification.**

Pour réintroduire dans la théorie la notion d'évolution (et donc de dimension temporelle), nous sommes amenés à distinguer deux aspects du champ métrique : le champ « microscopique » et quantique e_0 en interaction avec le champ de matière φ, et le champ métrique « macroscopique » et classique qui sert de cadre de référence, et que l'on peut définir comme $\langle e_0 \rangle_0$, la valeur moyenne sur le vide de e_0. En conséquence, nous modifierons le Lagrangien propre $\mathscr{L}_G$ du champ métrique, en y remplaçant le champ microscopique e_0 par le champ macroscopique $\langle e_0 \rangle_0$. Nous partirons donc maintenant de la densité lagrangienne quantique :

$$\mathscr{L} \equiv \frac{1}{2}e_0[g^{00}\varphi_0^2 - m^2\varphi^2] + \lambda \langle e_0 \rangle_0 \tag{36}$$

Les équations de Lagrange (29) et (31) ne sont pas modifiées (puisque si le vide est normé, $\delta \langle e_0 \rangle_0 = \delta e_0$ pour une variation arbitraire). On a donc toujours $H_\varphi = \lambda e_0$; par contre l'hamiltonien $H_\varphi + H_G$ est maintenant :

$$H = \lambda e_0 - \lambda \langle e_0 \rangle_0 \tag{37}$$

et a pour conséquence immédiate que

$$\langle H \rangle_0 = 0 \tag{38}$$

Les champs classiques φ et e_0 étant indépendants, nous sommes conduits à imposer sur les opérateurs correspondants la contrainte d'indépendance :

$$[\varphi, e_0]_\pm = 0 \tag{39}$$

Complétons maintenant la quantification en écrivant que H est le générateur des translations dans le temps :

$$[iH, \theta]_- = \nabla_0 \theta \tag{40}$$

quel que soit l'opérateur θ. Notons que l'hamiltonien H, commutant avec lui-même, est conservé (au sens de la dérivée covariante) ; ceci est en accord avec le fait que $\nabla_0 H = \lambda \nabla_0 e_0 \equiv 0$ par définition de la dérivée covariante.

Calculons φ_0 en utilisant (40). Si les champs indépendants φ et e_0 commutent, φ_0 est identiquement nul. L'existence d'une dynamique impose donc :

$$[\varphi, e_0]_+ = 0 \tag{41}$$

on trouve alors :

$$\varphi_0 = 2i\lambda e_0 \varphi \tag{42}$$

dont une conséquence est en particulier que φ_0 anticommute avec φ et e_0. D'autre part on en tire :

$$\varphi_0^2 = 4\lambda^2 g_{00} \varphi^2$$

d'où, en comparant avec (29) :

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \frac{2\lambda}{4\lambda^2 + m^2} \\ \varphi_0^2 &= \frac{8\lambda^3}{4\lambda^2 + m^2} g_{00} \end{aligned} \tag{43}$$

soit nos deux contraintes fondamentales.

En appliquant (40) à l'opérateur φ^0,

$$\nabla_0 \varphi^0 = -4\lambda^2 \varphi$$

d'après (42) ; donc, en comparant avec l'équation d'évolution (31) :

$$4\lambda^2 = m^2, \qquad \text{soit} \qquad \lambda = \frac{m}{2}\,(^6) \tag{44}$$

ce qui veut dire qu'on ne peut quantifier le système, à l'aide de (40) et (41), que si $\lambda = \dfrac{m}{2}$.

Les contraintes (43) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \frac{1}{2m} \\ \varphi_0^2 &= \frac{m}{2}\, g_{00} \end{aligned} \tag{45}$$

A l'aide de (45) la relation (42) donne :

$$e_0 = -2i\varphi_0\varphi \tag{46}$$

c'est-à-dire que le courant conservé $\gamma = e_0$ associé à φ est aussi le « courant » du temps. Nous avons ainsi construit le temps à partir du champ φ.

En utilisant les relations précédentes, (30) devient :

$$\pi = im\varphi \tag{47}$$

et (45) entraîne

$$[\pi, \varphi]_+ = i \tag{48}$$

Seule cette relation a un aspect « canonique », pour un champ φ suivant la statistique de Fermi.

Maintenant que nous avons épuisé les informations qui peuvent être tirées du Lagrangien (36), nous ferons l'hypothèse que g_{00} est un nombre (comme nous l'avons supposé précédemment pour l'opérateur $\dot{\psi}^2$, du

---

(6) Dans une métrique $g_{00} = 1$, e_0 est un champ ψ satisfaisant à (6). On peut définir une masse associée à ce champ à l'aide des relations (14) et (15), qui donnent ici

$$(\mathrm{H} - \lambda \langle e_0 \rangle_0)^2 = \frac{m^2}{4},$$

soit (44). La constante 2λ joue donc le rôle d'une « masse » associée au champ métrique, égale d'après (44) à la masse du champ φ.

reste proportionnel à g_{00} d'après (45)), ce qui permet de l'interpréter comme le tenseur métrique usuel.

De plus nous pouvons choisir un système de coordonnées particulier ; le groupe de Lorentz homogène à une dimension étant réduit au seul renversement du temps, nous pouvons choisir :

(49) $$e_0^2 \equiv g_{00} = 1$$

Nous interpréterons donc l'opérateur e_0 en disant que le signe de ses valeurs propres indique dans quel sens s'écoule le temps.

Soient $| + \rangle$ et $| - \rangle$ les deux états propres de e_0 définis par

$$e_0 | \pm \rangle = \pm | \pm \rangle.$$

D'après (37),

(50) $$\mathrm{H} | \pm \rangle = \frac{m}{2}(\pm 1 - \langle e_0 \rangle_0) | \pm \rangle$$

Écrivons maintenant que le vide est l'état de *plus basse* énergie. Ceci revient à définir :

(51) $$\begin{aligned} |0\rangle &= |-\rangle \\ |1\rangle &= |+\rangle \end{aligned}$$

Alors $\langle e_0 \rangle_0 = -1$, donc

(52) $$\mathrm{H} = \frac{m}{2}(e_0 + 1)$$

et

(53) $$\begin{aligned} \mathrm{H}|0\rangle &= 0 \\ \mathrm{H}|1\rangle &= m \end{aligned}$$

CONCLUSION

Nous pensons avoir montré que, dans le modèle simpliste étudié, le problème de la dynamique des champs complètement auto-composés est résoluble si on se limite à une seule dimension, « le temps », et qu'une solution non triviale des équations auto-composées peut être obtenue en construisant simultanément la matière et la métrique par rapport à laquelle celle-ci évolue. Il serait intéressant d'étudier ce qui se passe lorsqu'on accroît le nombre de dimensions, problème délicat à résoudre car on peut s'attendre à ce qu'aux difficultés quantiques se superposent celles de la relativité générale ; il est cependant possible que la démarche envisagée fournisse un moyen de comprendre pourquoi notre univers a précisément quatre dimensions, et la métrique de Lorentz.

Par ailleurs, notre tentative montre que des champs auto-composés doivent satisfaire des relations de commutation, qui ne sont pas nécessairement en accord avec la correspondance usuelle entre spin et statistique (7). Il est possible que l'équation d'auto-composition dont nous sommes partis n'admette pas de solution physiquement acceptable si l'on restreint le champ ψ à être un scalaire évoluant dans un univers à une seule dimension, mais que cette difficulté disparaisse dans un cadre plus large incluant par exemple les groupes hadroniques. Par ailleurs il se peut que la difficulté apparente d'une statistique anormale pour le champ ψ, mais non pour son courant, soit sans inconvénient physique dans une théorie plus générale, si ce champ n'est pas directement observable (8). Il est intéressant de rapprocher un tel point de vue du fait que les quarks, dont les propriétés statistiques peuvent être inhabituelles [5], n'aient pas été à ce jour observés.

Signalons enfin que le programme, ébauché ici, de la construction simultanée de la matière et de l'espace-temps à partir d'un ou de quelques champs fondamentaux peut permettre de poser d'une façon nouvelle le problème d'une éventuelle unification des groupes hadroniques avec le groupe de Lorentz.

RÉFÉRENCES

[1] B. Jouvet et J. C. Le Guillou, *Nuovo Cimento*, **10**, 49, 1967, p. 677.
[2] M. M. Broido et J. G. Taylor, *Physical Review*, **147**, 4, 1966, p. 993.
[3] G. Feinberg, Rockefeller University Preprint, 1967.
[4] J. C. Le Guillou, à paraître au *Nuovo Cimento*.
[5] O. W. Greenberg, *Physical Review Letters*, **13**, 20, 1964, p. 598.

Manuscrit reçu le 18 septembre 1967.

(7) Des relations d'anticommutation pour un champ de spin O ont été envisagées, dans un autre contexte, par G. Feinberg [3].

(8) Un exemple théorique d'un champ qui, bien que composant d'autres champs, n'apparaît pas dans les équations dynamiques de ces champs, a été fourni par J. C. Le Guillou [4].