

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

LUIS BEL

## **Le champ scalaire en relativité restreinte**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 8, n° 2 (1968), p. 205-216

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1968\\_\\_8\\_2\\_205\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_2_205_0)

© Gauthier-Villars, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Le champ scalaire en relativité restreinte**

par

**Luis BEL**

Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.  
Institut H. Poincaré, Paris.

---

**RÉSUMÉ.** — Étude des équations du mouvement et des trajectoires d'une particule d'épreuve soumise à un champ scalaire (à courte et à longue portée) statique et à symétrie sphérique en relativité restreinte. Examen de quelques implications du couplage particule-champ scalaire.

---

### **INTRODUCTION**

Nous nous intéressons dans cet article au champ scalaire en relativité restreinte. Nous étudions les équations du mouvement et les trajectoires d'une particule d'épreuve soumise à un champ scalaire statique et à symétrie sphérique, et nous faisons quelques remarques concernant le couplage particule-champ scalaire, couplage qui est assez particulier.

Nous avons considéré le cas où le champ scalaire est à longue portée et le cas où il est à courte portée. Étant donné qu'on n'a jamais observé jusqu'à présent de champ scalaire à longue portée, cette étude peut paraître sans grand intérêt dans le premier cas. Cependant le fait qu'il n'ait jamais été observé pouvant être dû à une constante de couplage très petite, peut-être sera-t-il observé un jour par des effets fins indécélés à l'heure actuelle. Nous croyons utile de nous y intéresser pour savoir éventuellement le reconnaître.

On connaît par contre des champs scalaires à courte portée. Mais on nous objectera sans doute que dans ce cas la portée est si courte qu'il ne se manifeste guère qu'au niveau nucléaire ou en dessous, domaines dans lesquels un traitement classique (c'est-à-dire non quantique), fût-il relativiste, est aussi sans grand intérêt. C'est vraie seulement en partie car certaines particularités de la description classique se retrouvent, ou devraient se retrouver, dans la description quantique. C'est ce que nous montrons dans quelques-unes des remarques auxquelles nous avons fait allusion plus haut.

Le champ scalaire à longue portée a fait, sous différentes formes, l'objet de nombreux travaux. Certains de ces travaux sont des tentatives de théories relativistes de la gravitation ; d'autres des tentatives de théories plus ou moins unitaires du champ scalaire et du champ de gravitation <sup>(1)</sup>. Dans cet article nous considérons le champ scalaire par lui-même. Il n'est qu'un champ dans l'espace-temps de Minkowski au même titre que le champ électromagnétique.

## 1. — ÉQUATIONS DU MOUVEMENT ET LAGRANGIEN D'UNE PARTICULE D'ÉPREUVE SOUmise A UN CHAMP SCALAIRE

a) Pour fixer les notations écrivons l'intervalle élémentaire de l'espace-temps de Minkowski sous la forme :

$$(1) \quad ds^2 = -c^2 dt^2 + \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (x^0 = t)$$

Les équations du mouvement d'une particule d'épreuve soumise à un champ scalaire  $\Phi$  que nous considérerons sont :

$$(2) \quad m \frac{du^\alpha}{d\tau} = -\frac{q}{c^2} (\eta^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta) \partial_\beta \Phi$$

avec :

$$(3) \quad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad d\tau^2 = -ds^2$$

et où  $m$  est la masse propre de la particule et  $q$  sa charge scalaire.

<sup>(1)</sup> Voir par exemple R. H. Dicke : The theoretical significance of experimental relativity. Gordon and Breach, et les références données dans cet ouvrage.

De  $u^\alpha u_\alpha = -1$  et de (2) il vient immédiatement  $m \frac{ds}{d\tau} = 0$ . D'autre part il est évident que (2) sont invariantes par la transformation de jauge :

$$(4) \quad \Phi \rightarrow \Phi + \text{cte}$$

b) Un petit calcul prouve que les équations du mouvement (2) dérivent du lagrangien :

$$(5) \quad L = -mc^2 e^{\frac{q}{mc^2} \Phi} \sqrt{-\frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}$$

ou encore, en choisissant comme paramètre  $x^0 = t$  :

$$(6) \quad L = -mc^2 e^{\frac{q}{mc^2} \Phi} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

avec

$$(7) \quad v^i = \frac{dx^i}{dt} \quad v^2 = \sum_{i=1}^3 (v^i)^2$$

c) Pour terminer de caractériser l'interaction de la particule avec le champ il faut préciser l'équation du champ. Nous supposons que  $\Phi$  est solution de :

$$(8) \quad \square \Phi - \mu^2 \Phi = 0$$

où  $\mu$  est une constante positive ou nulle.

## 2. — CAS STATIQUE A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE. APPROXIMATION CLASSIQUE

a) Nous supposons dorénavant qu'il existe un repère galiléen pour lequel  $\Phi$  est uniquement fonction de  $r$  :

$$\Phi = \Phi(r) \quad , \quad r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i)^2}$$

et satisfait la condition à l'infini :

$$(9) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r\Phi < \infty$$

Ceci donne :

$$(10) \quad \Phi = -g \frac{Q}{r} e^{-\mu r}$$

où  $Q$  est la charge scalaire de la source du champ, et  $g$  la constante de couplage correspondante.

On remarquera que compte tenu de (8), dans le cas  $\mu \neq 0$ , et compte tenu de (8) et (9), dans le cas  $\mu = 0$ ,  $\Phi$  ne possède pas l'invariance de jauge (4). Le fait que les équations du mouvement (2) admettent de toutes façons cette invariance de jauge peut s'interpréter comme une liberté de choix de l'échelle d'énergie.

b) Posons  $\zeta = g \frac{qQ}{mc^2}$ . On peut prouver facilement d'une part que les trajectoires correspondantes aux solutions de (2) dans le repère galiléen et pour le champ  $\Phi$  considérés sont planes, et d'autre part que si  $\zeta > 0$  l'accélération d'une particule dont la vitesse est nulle est dirigée vers le centre (potentiel attractif) et dans la direction opposée (potentiel répulsif) si  $\zeta < 0$ . Nous supposons dorénavant  $\zeta > 0$ .

c) Si  $\frac{\zeta}{r} e^{-\mu r}$  et  $\frac{v}{c}$  sont suffisamment petits, le lagrangien (6) devient, à la constante additive près  $-mc^2$  :

$$(11) \quad L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r} e^{-\mu r}$$

avec  $k = \zeta mc^2$ . On obtient ainsi à l'approximation classique les lagrangiens d'une particule soumise à un champ de type Coulomb ( $\mu = 0$ ) ou Yukawa ( $\mu \neq 0$ ). On remarquera que l'hypothèse  $\frac{v}{c} \ll 1$  seule aurait été insuffisante pour obtenir (11).

### 3. — ÉQUATION DES TRAJECTOIRES. POTENTIEL APPARENT. POTENTIEL EFFECTIF

a) Choisissons des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  dans le plan des trajectoires envisagées. Nous pouvons ainsi écrire :

$$(12) \quad L = -mc^2 e^{-\frac{\zeta}{r} e^{-\mu r}} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)} \equiv -mc^2 e^{-\frac{\zeta}{r} e^{-\mu r}} \Sigma, \left( \dot{\quad} \equiv \frac{d}{dt} \right)$$

L'hamiltonien correspondant, ou énergie de la particule, est :

$$(13) \quad E = mc^2 e^{-\frac{\zeta}{r}} \Sigma^{-1}$$

et le moment conjugué à  $\theta$ , moment angulaire :

$$(14) \quad P = mr^2 e^{-\frac{\zeta}{r}} \dot{\theta} \Sigma^{-1}$$

E et P sont évidemment des intégrales premières.

L'équation des trajectoires est :

$$(15) \quad -\varepsilon P \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \Omega} + \theta - \theta_0 = 0$$

$\varepsilon$  étant le signe de la vitesse radiale,  $(r_0, \theta_0)$  la position initiale, et :

$$(16) \quad \Omega = \left( \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 e^{-\frac{2\zeta}{r}} - \frac{P^2}{r^2} \right)^{1/2}$$

Pour des valeurs données de E et P le mouvement de la particule se réalise d'après (15) dans un intervalle de  $r$  pour lequel on ait :

$$(17) \quad \Omega^2 > 0$$

b) Nous appellerons potentiel apparent la fonction :

$$(18) \quad U \equiv -1 + e^{-\frac{2\zeta}{r}}$$

Pour  $\zeta > 0$ ,  $U(r)$  est une fonction négative et croissante dans tout l'intervalle admissible  $r > 0$ . En outre nous avons

$$(19) \quad \lim_{r \rightarrow 0} U = -1 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} U = 0 \quad , \quad \lim_{r \rightarrow 0} U' = 0 \quad \left( -' \equiv \frac{d}{dr} - \right)$$

c) Nous appellerons potentiel effectif la fonction :

$$(20) \quad \varphi \equiv U + \frac{p^2}{r^2}$$

où  $p \equiv \frac{P}{mc}$ . Nous supposons  $p$  positif ce qui ne restreint pas la généralité.

Posons d'autre part :

$$(21) \quad W \equiv \frac{E^2}{m^2 c^4} - 1$$

Nous avons ainsi :

$$(22) \quad \Omega^2 = m^2 c^2 (W - \varphi)$$

et par conséquent la condition (18) se traduit par :

$$(23) \quad W > \varphi$$

d) La terminologie adoptée pour  $U$  et  $\varphi$  se justifie par le fait que le problème ici étudié est formellement équivalent à celui qui consisterait à choisir comme lagrangien

$$(24) \quad \tilde{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V$$

avec :

$$(25) \quad V = \frac{1}{2} m c^2 U$$

Dans cette équivalence la correspondance entre trajectoires se ferait en posant :

$$(26) \quad W = \frac{2\tilde{E}}{m c^2} \quad P = \tilde{P}$$

$\tilde{E}$  et  $\tilde{P}$  étant respectivement l'énergie et le moment angulaire au sens de (24).

#### 4. — POTENTIEL A LONGUE PORTÉE. ÉTUDE DU POTENTIEL EFFECTIF

Si le potentiel  $\Phi$  est à longue portée, c'est-à-dire si  $\mu = 0$ , les principales caractéristiques du potentiel effectif (20) sont les suivantes :

Il est clair tout d'abord que :

$$(27) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \varphi = +\infty \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = 0_-$$

On peut prouver en outre que la dérivée  $\varphi'$  ne s'annule qu'en un seul point  $r^-$  qui correspond naturellement à un minimum avec  $\varphi(r^-) < 0$ .

$r^-(p)$  est une fonction croissante de  $p$  et on a :

$$(28) \quad \lim_{p \rightarrow 0} r^- = 0 \quad , \quad \lim_{p \rightarrow \infty} r^- = \infty$$

$\varphi^- = \varphi(r^-)$  est une fonction croissante de  $p$  et on a :

$$(29) \quad \lim_{p \rightarrow 0} \varphi^- = -1 \quad , \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^- = 0$$

## 5. — POTENTIEL A COURTE PORTÉE. ÉTUDE DU POTENTIEL EFFECTIF

a) Considérons maintenant le cas où le potentiel  $\Phi$  est à courte portée : c'est-à-dire le cas  $\mu \neq 0$ . Nous poserons, ce qui ne restreint pas la généralité,  $\mu = 1$ . Nous avons prouvé les résultats suivants :

Les valeurs limites du potentiel effectif  $\varphi$  sont :

$$(30) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \varphi = +\infty \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi = 0_+$$

Les points qui annulent la dérivée  $\varphi'$  sont ceux pour lesquels on a :

$$(31) \quad p^2 = \zeta e^{-\frac{2\zeta}{r} e^{-r-r}} r(r+1)$$

Cette équation peut avoir des solutions ou ne pas en avoir suivant la valeur de  $p$ . L'équation :

$$(32) \quad \frac{2\zeta}{z} e^{-z} = \frac{z^2 - z - 1}{(z+1)^2}$$

définit une valeur positive unique de  $z$ . Soit  $\hat{p}$  le nombre positif donné par :

$$(33) \quad \hat{p}^2 = \zeta z(z+1) e^{-\frac{z^3 + 3z^2 - 1}{(z+1)^2}}$$

I) Si  $p < \hat{p}$ , il existe deux points  $r^-$  et  $r^+$  solutions de (31) et qui sont de part et d'autre de  $z$ . Nous poserons :

$$(34) \quad r^- < z \quad , \quad r^+ > z$$

$r^-$  correspond à un minimum de  $\varphi$  et  $r^+$  à un maximum.

II) Si  $p = \hat{p}$  il existe un seul point solution de (31) et ce point est  $z$ . Il correspond à un point d'inflexion de  $\varphi$ , qui sauf en ce point est une fonction positive et décroissante dans tout l'intervalle  $r > 0$ .

III) Si  $p > \hat{p}$  il n'existe pas des solutions de (31).  $\varphi$  est une fonction décroissante et positive dans tout l'intervalle  $r > 0$ .

b) Examinons avec plus de détail le cas I.  $r^-$  et  $r^+$  sont des fonctions de  $p < \hat{p}$ .  $r^-$  est une fonction croissante de  $p$ , et

$$(35) \quad \lim_{p \rightarrow 0} r^- = 0 \quad , \quad \lim_{p \rightarrow \hat{p}} r^- = z$$





$r^+$  est une fonction décroissante de  $p$  et :

$$(36) \quad \lim_{p \rightarrow 0} r^+ = \infty \quad \lim_{p \rightarrow \hat{p}} r^+ = z$$

$\varphi^+ = \varphi(r^+)$  et  $\varphi^- = \varphi(r^-)$  sont des fonctions croissantes de  $p$  ( $\varphi^+ > \varphi^-$ ) et les valeurs limites sont :

$$(37) \quad \lim_{p \rightarrow 0} \varphi^- = -1 \quad , \quad \lim_{p \rightarrow 0} \varphi^+ = 0$$

$$\lim_{p \rightarrow \hat{p}} \varphi^- = \lim_{p \rightarrow \hat{p}} \varphi^+ = \varphi(z)$$

D'autre part, de ce qui vient d'être dit il résulte qu'il existe une valeur  $p_0 < \hat{p}$  qui nous permet de distinguer trois cas dans le cas I :

Ia) Si  $p < p_0$ ,  $\varphi^- < 0$  ; Ib) Si  $p = p_0$ ,  $\varphi^- = 0$  ; Ic) Si  $p > p_0$ ,  $\varphi^- > 0$ .

## 6. — DISCUSSION QUALITATIVE DES TRAJECTOIRES POSSIBLES

De (23) et des résultats ci-dessus on peut obtenir la classification des différents types de trajectoires possibles suivant les valeurs de  $W$  (ou  $E$ ) et  $p$ .

a) Pour le potentiel à longue portée ces trajectoires sont du type : 1)  $C^{(-)}$  (orbite circulaire stable avec  $W = \varphi^- < 0$ ), 2)  $E^{(-)}$  (orbite de type elliptique avec  $W < 0$  et possédant deux points limites), 3) H (orbite de type hyperbolique ou parabolique avec  $W > 0$  et possédant un point limite.

b) Pour le potentiel à courte-portée ces trajectoires sont ou bien des types  $C^{(-)}$ ,  $E^{(-)}$  et H comme ci-dessus, ou bien des types : 4)  $C^{(+)}$  (orbite circulaire stable avec  $W = \varphi^- > 0$ ), 5)  $C^{(0)}$  (orbite circulaire stable avec  $W = 0$ ), 6)  $E^{(+)}$  (orbite de type elliptique avec  $W > 0$ ), 7)  $E^{(0)}$  (orbite de type elliptique avec  $W = 0$ ), 8)  $\mathcal{C}$  (orbite circulaire instable avec  $W = \varphi^+$ ), 9)  $\mathcal{E}$  (orbite possédant un point limite et un cercle limite :  $\mathcal{C}$ ), 10)  $\mathcal{H}$  (orbite s'étendant jusqu'à l'infini et possédant un cercle limite :  $\mathcal{C}$ ). Que  $\mathcal{C}$  est un cercle limite <sup>(2)</sup> pour les trajectoires du type  $\mathcal{E}$  ( $p < \hat{p}$ ,  $W = \varphi^+$ ,  $r_0 < r^+$ ,  $\varepsilon = +1$ ) ou  $\mathcal{H}$  ( $p \leq \hat{p}$ ,  $W = \varphi^+$ ,  $r > r^+$ ,  $\varepsilon = -1$ ) peut se démontrer facilement à partir de (15) et (16).

<sup>(2)</sup> Pour la notion de cercle limite voir par exemple H. T. Davis : Introduction to nonlinear differential and integral equations. Chap. II, § 5, Dover publications.

*Remarque.* — En partant du lagrangien classique (11) on trouve les mêmes types de trajectoires. Mais alors que les orbites de type  $E^{(-)}$ , par exemple, sont pour  $\mu = 0$  des vraies ellipses à l'approximation classique, elles ne le sont plus dans le cas relativiste.

## 7. — DÉTERMINATIONS APPROCHÉES DE $E^-$ ET $E^+$

$E^-$  et  $E^+$  étant les énergies correspondant aux orbites circulaires nous donnons ci-dessous les expressions approchées de la fonction  $E^-(p)$ , dans le cas  $\mu = 0$ , et des fonctions  $E^-(p)$  et  $E^+(p)$ , dans le cas  $\mu = 1$ , pour des valeurs suffisamment grandes de  $p$

a) pour  $\mu = 0$  on a :

$$(38) \quad E^- = mc^2 - \frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{p^2} mc^2 \quad (p/\zeta \gg 1)$$

b) pour  $\mu = 1$  quelques précisions préliminaires sont nécessaires. Étant donné que dans ce cas il n'y a d'orbites circulaires que dans le cas I du paragraphe 5, cas pour lequel  $p < \hat{p}$ , il est clair que pour que  $p$  puisse être suffisamment grand il faut que  $\hat{p}$  le soit aussi. Or on peut démontrer que  $\hat{p}$  est une fonction croissante de  $\zeta$  tout comme  $\hat{\phi}$  d'ailleurs. D'autre part  $\zeta$  est d'après (32) fonction croissante de  $z$ . Nous supposerons donc  $z$  suffisamment grand et  $p$  suffisamment proche de  $\hat{p}$ . Nous serons alors dans le cas  $I_c$  du paragraphe 5. On trouve ainsi

$$(39) \quad E^- = E^+ = \frac{mc^2}{z} p \quad (p \approx \hat{p}, z \gg 1)$$

## 8. — QUELQUES REMARQUES

Quelques-uns des résultats ci-dessus ainsi que le type même d'interaction du champ scalaire avec une particule appellent un certain nombre de remarques.

A. — On peut par exemple se demander quelles seraient les prévisions d'une théorie du champ de gravitation décrite par un champ scalaire.

Pour obtenir à l'approximation classique la théorie newtonnienne d'un champ central, il suffit de poser  $\mu = 0$  et  $\zeta = \frac{GM}{c^2}$ ,  $M$  étant la masse de la source du champ et  $G$  la constante de la gravitation <sup>(3)</sup>.

Une telle théorie serait incorrecte parce que d'une part elle prévoit un retard des périhélies et parce que d'autre part elle ne rendrait pas compte de la déviation des rayons lumineux au voisinage du soleil. Par contre il est amusant de remarquer que compte tenu de la modification de la masse apparente caractéristique du type d'interaction décrit par (13), cette théorie prédit pour le décalage des raies spectrales un résultat qui est, au premier ordre en  $\frac{GM}{c^2 r}$ , identique à celui de la théorie de la gravitation d'Einstein.

Ceci nous amène à la deuxième remarque.

B. — Un champ scalaire provoque un déplacement des raies spectrales. Ce déplacement est vers le rouge si le potentiel est attractif et vers le violet si le potentiel est répulsif.

C. — Le potentiel apparent  $U$  est, pour  $\zeta$  suffisamment grand et  $\mu \neq 0$ , aussi proche qu'on le désire d'un puits rectangulaire. Plus précisément ce que nous affirmons est que

$$(40) \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \int_0^z U(r) dr = -1, \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \int_z^\infty U(r) dr = 0$$

$z$  étant donné par (32) dans le cas  $\mu = 1$ . Ceci permet de donner une justification des puits rectangulaires sur la base du champ scalaire.

D. — Les états correspondant aux orbites du type  $\mathcal{H}$  ou  $H$  avec  $W$  proche de  $\varphi^+$  semblent d'excellents candidats pour définir la notion de résonance. En effet pour les orbites du type  $\mathcal{H}$ ,  $\theta$  tend vers l'infini quand  $r$  tend vers  $r^+$ , et pour les orbites du type  $H$   $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta$  est aussi grand que l'on veut pour  $W$  suffisamment proche de  $\varphi^+$ .

Les états correspondant aux orbites de type  $C^{(+)}$ ,  $E^{(+)}$ ,  $\mathcal{E}$  ou  $\mathcal{C}$  semblent eux aussi de bons candidats pour la même notion. A remarquer toutefois que les états de type  $C^{(+)}$  et  $E^{(+)}$  sont du point de vue classique (nous voulons dire ici non quantique) parfaitement stables. Ils ne le seraient sans doute pas du point de vue quantique. Il serait justement intéressant d'établir une comparaison entre la notion de résonance telle qu'elle se présente des deux points de vue. Paradoxalement la description classique semble plus riche qualitativement dans la mesure où deux types de résonances

<sup>(3)</sup> Cette théorie a des points de similitude avec celle de Walker. *Nature*, 1951.

semblent possibles alors qu'en mécanique quantique on n'en a distingué qu'un seul <sup>(4)</sup>.

Il est facile de voir dans quelle mesure la description classique des états de type  $C^{(\pm)}$  ou  $\mathcal{C}$ , par exemple, est justifiée. Avec :

$$(41) \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc\sqrt{W-U}} \quad , \quad n = \frac{P}{\hbar}$$

on trouve :

$$(42) \quad \frac{d\lambda}{dr} = \frac{1}{n}$$

Suivant le seul critère  $\frac{d\lambda}{dr} \ll 1$  la description classique serait donc justifiée pour des grandes valeurs du moment angulaire et par conséquent de l'énergie.

E. — Enfin, pour terminer, on peut se demander quelles seraient, en mécanique quantique, les équations d'onde d'une particule soumise à un champ scalaire. Partant de (6), ce qu'on peut écrire de plus simple en appliquant le principe de correspondance est :

$$(43) \quad \square\psi + \frac{m^2c^4}{\hbar^2} e^{\frac{2q}{mc^2}\Phi} \psi = 0$$

pour une particule de spin 0. Et

$$(44) \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{mc}{\hbar} e^{\frac{q\Phi}{mc^2}} \Psi = 0$$

pour une particule de spin 1/2. Cette dernière équation, par exemple, peut d'ailleurs être réécrite évidemment sous la forme

$$(45) \quad i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{mc}{\hbar} \Psi - \frac{mc}{\hbar} \left( -1 + e^{\frac{q\Phi}{mc^2}} \right) \Psi = 0$$

Il semble par conséquent que dans une théorie des champs spinorielle et scalaire en interaction le lagrangien d'interaction devrait être <sup>(5)</sup>

$$(46) \quad L_{\text{int}} = -\frac{mc}{\hbar} \bar{\Psi} \left( -1 + e^{\frac{q\Phi}{mc^2}} \right) \Psi$$

<sup>(4)</sup> Voir par exemple V. de Alfaro et T. Regge : Potential Scattering, North Holland

<sup>(5)</sup> Des lagrangiens d'interaction similaires à (46) ont déjà été considérés. Voir par exemple dans un cas particulier ARNITT et DESER. *Phys. Rev.*, vol. 100, n° 1, 1955.

Ainsi le lagrangien d'interaction :

$$\dot{L}_{int} = \frac{q}{hc} \bar{\Psi} \Phi \Psi$$

ne serait justifié que pour  $\left| \frac{q\Phi}{mc^2} \right|$  suffisamment petit dans tout l'intervalle significatif de variation de  $\Phi$ .

*Manuscrit reçu le 29 septembre 1967.*

---

*Directeur de la publication : P. GAUTHIER-VILLARS.*

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPOT LÉGAL ÉD. N° 1581a.

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL N° 5600. 2-1968.