ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

S. KICHENASSAMY

La polarisation de la lumière monochromatique dans un espace de Riemann

Annales de l'I. H. P., section A, tome 8, nº 3 (1968), p. 253-268
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_3_253_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VIII, nº 3, 1968, p. 253-268.

Section A :
Physique théorique.

La polarisation de la lumière monochromatique dans un espace de Riemann

par

S. KICHENASSAMY

Laboratoire de Physique théorique associé au C. N. R. S.
(Institut Henri Poincaré, Paris.)

SOMMAIRE. — Compléments à l'étude des champs électromagnétiques singuliers et examen critique du théorème de Robinson. Définition des différents types de polarisation de la lumière par les paramètres généralisés de Stokes et étude de leur propagation.

ABSTRACT. — Additional remarks concerning the propagation of null electromagnetic fields and critical appraisal of Robinson's theorem. Definition of light polarization types by means of generalized Stokes' parameters and study of the propagation of these types.

1. — INTRODUCTION

Matière et lumière ont, tour à tour, modelé nos idées sur l'espace, le temps et la gravitation; mais la polarisation, propriété fondamentale de la lumière, ne semble pas avoir retenu suffisamment l'attention des physiciens relativistes; au contraire, il n'est pas rare de rencontrer certains raisonnements effectués modulo les variations d'amplitude et de polarisation, comme si ces grandeurs physiques pouvaient ne pas avoir d'influence sur l'interprétation géométrique que donne la Relativité générale des phénomènes physiques; tel est par exemple, le cas du théorème de Robinson qui établit que la congruence des géodésiques isotropes, trajectoires du vecteur propre isotrope des champs électromagnétiques singuliers, est sans distorsion.

Nous nous proposons ici de préciser un certain nombre de notions relatives aux champs électromagnétiques singuliers et de développer une théorie élémentaire de la polarisation de la lumière dans un espace de Riemann.

2. — LA VARIÉTÉ FONDAMENTALE

La variété fondamentale de la Relativité générale est une variété V_4 suffisamment différentiable, munie d'une métrique régulière de type hyperbolique normal :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta \ldots = 0, 1, 2, 3). \tag{2.1}$$

L'interprétation physique des coordonnées locales s'effectue par rapport à un repère local orthonormé $\{ \lambda_a^\alpha \}$:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\lambda_a^\alpha \lambda_b^\beta &= \eta_{ab} && (a, b \ldots = 0, 1, 2, 3). \\ \eta_{a0} = \delta_{a0} \qquad \eta_{ij} &= -\delta_{ij} && (i, j \ldots = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Elle est définie, modulo la transformation :

$$\lambda_{a'}^\alpha = \Lambda_{a'}{}^b \lambda_b^\alpha \tag{2.3}$$

où $| \Lambda_{a'}{}^b |$ est un élément de la composante connexe L_0 du groupe de Lorentz :

$$\eta_{cd}\Lambda_{a'}{}^c\Lambda_{b'}{}^d = \eta_{a'b'}, \qquad \text{dét} \left| \Lambda_{a'}{}^b \right| = 1, \qquad \Lambda_{0'}^0 \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Dans l'étude des congruences isotropes, un repère commode est le repère isotrope défini par :

$$\begin{aligned} k^\alpha &= (\sqrt{2})^{-1}(\lambda_0^\alpha + \lambda_3^\alpha) \qquad & m^\alpha &= (\sqrt{2})^{-1}(\lambda_2^\alpha + i\lambda_1^\alpha) \\ l^\alpha &= (\sqrt{2})^{-1}(\lambda_0^\alpha - \lambda_3^\alpha) \qquad & \overline{m}^\alpha &= (\sqrt{2})^{-1}(\lambda_2^\alpha - i\lambda_1^\alpha) \end{aligned} \tag{2.5}$$

ou par une combinaison linéaire de ces vecteurs satisfaisant à :

$$\begin{aligned} &k'^\alpha k'_\alpha = l'^\alpha l'_\alpha = m'^\alpha m'_\alpha = k'^\alpha m'_\alpha = l'^\alpha m'_\alpha = 0 \\ &k'^\alpha l'_\alpha = - m'^\alpha \overline{m}'_\alpha = 1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

En particulier, le repère isotrope $(k'^{\alpha}, l'^{\alpha}, \overline{m}'^{\alpha}, m'^{\alpha})$ tel que [3, 9] :

$$k'^{\alpha} = (1 + \mu)k^{\alpha} \tag{2.7}$$

est déterminé par :

$$l'^{\alpha} = (1 + \mu)\nu\bar{\nu}k^{\alpha} + (1 + \mu)^{-1}l^{\alpha} + \bar{\nu}m^{\alpha} + \nu\overline{m}^{\alpha} \tag{2.8a}$$

$$m'^{\alpha} = [(1 + \mu)\nu k^{\alpha} + m^{\alpha}]e^{i\omega} \qquad \text{ou} \tag{2.8b}$$

$$m'^{\alpha} = [(1 + \mu)\bar{\nu}k^{\alpha} + \overline{m}^{\alpha}]e^{i\omega} \tag{2.8b'}$$

D'autre part, l'élément type du petit groupe $L_0[k^{\alpha}]$ préservant la correspondance (2.5) entre vecteurs isotropes et vecteurs orthonormés, s'écrit :

$$\begin{aligned} k'^{\alpha} &= k^{\alpha} \\ l'^{\alpha} &= l^{\alpha} + 2\gamma k^{\alpha} + (\beta - i\alpha)m^{\alpha} + (\beta + i\alpha)\overline{m}^{\alpha} \\ m'^{\alpha} &= \left(\sqrt{2\gamma}k^{\alpha} + \frac{\beta - i\alpha}{\sqrt{2\gamma}} m^{\alpha}\right)e^{i\omega} \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\gamma \tag{2.10a}$$

l'orientation des axes $\{ \lambda^{\alpha}_{i'} \}$ par rapport à $\{ \lambda^{\alpha}_{i} \}$ étant définie par les angles d'Euler (ψ, θ, ω) tels que :

$$\begin{aligned} \cos\psi &= \frac{2 - \gamma}{2 + \gamma} & \sin\psi &= \frac{2\sqrt{2\gamma}}{2 + \gamma} \\ \cos\theta &= \frac{\beta}{\sqrt{2\gamma}} & \sin\theta &= -\frac{\alpha}{\sqrt{2\gamma}} \end{aligned} \tag{2.10b}$$

Il s'ensuit dans l'hypothèse où la correspondance (2.5) est conservée, que le repère isotrope défini par (2.7) et (2.8) se déduit du repère (2.5) [5],

a) ou bien par la transformation de $L_0[k^{\alpha}]$ (correspondant à $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{2\gamma}$) suivie d'un changement de paramètre sur la trajectoire de k^{α};

b) ou bien par la transformation de $L_0[k^{\alpha}]$ (correspondant à $\alpha = 0$, $\beta = +\sqrt{2\gamma}$) suivie d'un retournement de $\lambda^{\alpha}_{i'}$ et d'un changement de paramètre sur la trajectoire de k^{α}.

3. — CONGRUENCES ISOTROPES

Une congruence $\mathcal{C}$ des courbes est définie dans un domaine $\mathcal{D}$ par une famille de courbes telles qu'il en passe une et une seule par chaque point de $\mathcal{D}$; chaque courbe est caractérisée par trois paramètres $\{ a^i \}$ et tout point de cette courbe est déterminé par le paramètre v :

$$x^\alpha = x^\alpha(a^i, v) \tag{3.1}$$

L'application :

$$x^\alpha \to x^\alpha + k^\alpha dv \qquad\qquad k^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dv} \tag{3.2}$$

applique le point M correspondant à (a^i, v) sur le point M′ correspondant à $(a^i, v + dv)$; de telles applications forment un groupe local à un paramètre. Toute grandeur ϕ_a en M est transformée par cette application en $\phi_a + \mathcal{L}(k)\phi_a$ où $\mathcal{L}(k)$ désigne l'opérateur transformée infinitésimale (ou dérivée de Lie) par le champ de vecteurs k^α. Le « vecteur de liaison » joignant les points de même paramètre de deux courbes voisines est à dérivée de Lie nulle.

La congruence $\mathcal{C}$ est isotrope lorsque :

$$k^\alpha k_\alpha = 0 \tag{3.3}$$

Il est commode pour étudier une telle congruence, d'utiliser un repère local isotrope dont un vecteur de base est k^α. On a :

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha k_\beta = {} & a k_\alpha k_\beta + g l_\alpha k_\beta - b k_\alpha \bar{m}_\beta - \bar{b} k_\alpha m_\beta - c k_\beta \bar{m}_\alpha - \bar{c} k_\beta m_\alpha \\ & - h l_\alpha \bar{m}_\beta - \bar{h} l_\alpha m_\beta + \bar{e} m_\alpha m_\beta + e \bar{m}_\alpha \bar{m}_\beta + d m_\alpha \bar{m}_\beta + \bar{d} \bar{m}_\alpha m_\beta\end{aligned} \tag{3.4}$$

les coefficients a, b, etc., étant définis par cette équation elle-même.

Les propriétés géométriques de $\mathcal{C}$ sont déterminées par le comportement des grandeurs suivantes :

a) la dilatation :

$$\theta = \frac{1}{2} \nabla_\sigma k^\sigma \tag{3.5}$$

b) le tenseur tourbillon :

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_\alpha k_\beta - \nabla_\beta k_\alpha) \tag{3.6}$$

auquel sont attachés les scalaires

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}\,\Omega_{\rho\sigma}\Omega^{\rho\sigma} \qquad \text{et} \qquad \Omega_2 = \frac{1}{4}\,\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta}\,;$$

c) le tenseur de distorsion [3] :

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\nabla_\alpha k_\beta + \nabla_\beta k_\alpha) - \frac{1}{4}\,\nabla_\sigma k^\sigma \cdot g_{\alpha\beta} \tag{3.7}$$

auquel sont attachés les trois scalaires

$$\Sigma_1 = \Sigma_\rho{}^\sigma\Sigma_\sigma{}^\rho, \quad \Sigma_2 = \Sigma_\rho{}^\sigma\Sigma_\sigma{}^\tau\Sigma_\tau{}^\rho \quad \text{et} \quad \Sigma_3 = \Sigma_\lambda{}^\rho\Sigma_\rho{}^\sigma\Sigma_\sigma{}^\tau\Sigma_\tau{}^\lambda.$$

4. — CONGRUENCES ISOTROPES GÉODÉSIQUES

La congruence isotrope $\mathcal{C}$ est géodésique lorsque :

$$k^\sigma\nabla_\sigma k^\alpha = gk^\alpha \qquad \text{soit} \qquad h = \bar{h} = 0 \tag{4.1}$$

On peut alors, par un changement convenable de paramètre ($v \to u$) poser :

$$k^\sigma\nabla_\sigma k^\alpha = 0 \qquad \text{soit} \qquad g = 0 \tag{4.2}$$

le nouveau paramètre affin u étant déterminé à une transformation affine près

$$u' = \lambda u + \mu \tag{4.3}$$

Avec ce choix, les seuls scalaires indépendants attachés à la congruence $\mathcal{C}$ et ne contenant que les dérivées premières $\nabla_\alpha k_\beta$, sont :

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{1}{2}\,(d + \bar{d}) \\ \Omega_1 &= \frac{1}{2}\,\Omega_{\rho\sigma}\Omega^{\rho\sigma} = -\frac{1}{4}\,(d - \bar{d})^2 \\ \Sigma_1 &= \Sigma_\rho{}^\sigma\Sigma_\sigma{}^\rho = 2e\bar{e} + \theta^2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

On sait que ces scalaires déterminent la manière dont se déforment les ombres projetées sur un écran perpendiculaire à la congruence des rayons lumineux assimilés aux géodésiques isotropes.

Ces scalaires ne sont pas déterminés de manière unique par la donnée de la métrique; ils dépendent du choix du paramètre sur la géodésique isotrope :

a) si ce paramètre est v ($g \neq 0$), on a :

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma k^\sigma &= g - (d + \bar{d}) \\ \Omega_{\rho\sigma}\Omega^{\rho\sigma} &= -\frac{1}{2}[g^2 + (d - \bar{d})^2] \\ \Sigma_\rho{}^\sigma\Sigma_\sigma{}^\rho &= 2e\bar{e} + \frac{1}{4}(g + d + \bar{d})^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

b) si ce paramètre est u' défini par (4.3), on a :

$$\theta' = \lambda\theta, \qquad \Omega_1' = \lambda^2\Omega_1, \qquad \Sigma_1' = \lambda^2\Sigma_1 \tag{4.6}$$

Cet arbitraire sur le choix de ces scalaires reflète l'arbitraire dont on dispose en Relativité générale sur le choix de la jauge physique locale et montre que cette théorie est strictement compatible non avec l'équivalence forte mais avec la C-équivalence [*4*].

D'autre part, la relation :

$$k^\sigma\nabla_\sigma\nabla_\rho k_\lambda = -\nabla_\rho k^\sigma \cdot \nabla_\sigma k_\lambda + \mathrm{R}_{\lambda\mu\nu\rho}k^\mu k^\nu \qquad k^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} \tag{4.7}$$

permet d'écrire la loi de propagation des différents coefficients de (3.4), en particulier des coefficients e et d :

$$k^\sigma\nabla_\sigma e = e(d + \bar{d}) + \mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}m^\alpha k^\beta k^\gamma m^\delta - 2e\mathrm{D} \tag{4.8a}$$

$$k^\sigma\nabla_\sigma d = e\bar{e} + d^2 + \frac{1}{2}\mathrm{R}_{\rho\sigma}k^\rho k^\sigma - d(\mathrm{D} + \bar{\mathrm{D}}) \tag{4.8b}$$

en posant :

$$k^\sigma\nabla_\sigma m^\alpha = \mathrm{A}k^\alpha + \mathrm{B}l^\alpha + \bar{\mathrm{D}}m^\alpha + \mathrm{E}\bar{m}^\alpha \tag{4.9}$$

On en déduit notamment :

$$k^\sigma\nabla_\sigma(d - \bar{d}) = (d - \bar{d})[(d + \bar{d}) - (\mathrm{D} + \bar{\mathrm{D}})] \tag{4.10}$$

5. — ÉTUDE D'UNE 2-FORME SINGULIÈRE [*6, 7*]

La 2-forme φ :

$$\varphi = \frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge \delta x^\beta \tag{5.1}$$

est dite singulière lorsqu'il existe un vecteur k^α tel que :

$$(5.2) \qquad \varphi_{\alpha\beta}k^\beta = 0 \qquad \overset{*}{\varphi}_{\alpha\beta}k^\beta = 0$$
$$\overset{*}{\varphi}_{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varphi^{\gamma\delta}$$

Lorsque la 2-forme φ n'est pas identiquement nulle, k^α est nécessairement isotrope et les deux scalaires attachés à cette 2-forme sont nuls

$$(5.3) \qquad \varphi_{\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma} = 0 \qquad \varphi_{\rho\sigma}\overset{*}{\varphi}{}^{\rho\sigma} = 0$$

On a :

$$(5.4a) \qquad \varphi_{\alpha\beta} = k_\alpha P_\beta - k_\beta P_\alpha$$

$$(5.4b) \qquad k^\sigma P_\sigma = 0 \qquad k^\lambda(\delta^\sigma_\lambda - \lambda^\sigma_0 \lambda_{0\lambda})P_\sigma = 0$$

$$(5.4c) \qquad P^\alpha = \overset{m}{A}\lambda^\alpha_m \qquad m = 1,2$$

et

$$(5.5a) \qquad \overset{*}{\varphi}_{\alpha\beta} = k_\alpha \overset{*}{P}_\beta - k_\beta \overset{*}{P}_\alpha$$

$$(5.5b) \qquad P_\alpha \overset{*}{P}{}^\alpha = 0 \rightarrow \overset{*}{P}{}^\alpha = -\overset{2}{A}\lambda^\alpha_1 + \overset{1}{A}\lambda^\alpha_2$$

de telle sorte que :

$$(5.6a) \qquad \Phi_{\alpha\beta} = (\varphi_{\alpha\beta} + i\overset{*}{\varphi}_{\alpha\beta}) = \mathcal{A}(k_\alpha \bar{m}_\beta - k_\beta \bar{m}_\alpha)$$

$$(5.6c) \qquad \mathcal{A} = \sqrt{2}(\overset{2}{A} + i\overset{1}{A})$$

Les 2-formes complexes $\Phi_{\alpha\beta}$ et $\bar{\Phi}_{\alpha\beta}$ sont respectivement antiauto-adjointe et auto-adjointe :

$$(5.7) \qquad \Phi^*_{\alpha\beta} = -i\Phi_{\alpha\beta} \qquad \bar{\Phi}^*_{\alpha\beta} = i\bar{\Phi}_{\alpha\beta}$$

6. — PROPAGATION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE SINGULIER ET EXAMEN CRITIQUE DU THÉORÈME DE ROBINSON

Considérons une 2-forme φ obéissant dans son domaine d'existence, aux équations de Maxwell :

$$(6.1) \qquad \nabla_\beta \Phi^{\alpha\beta} = 0$$

et singulière :

$$(6.2) \qquad \Phi_{\alpha\beta}k^\beta = 0$$

sur une hypersurface S transverse à $\mathcal{C}$.

Les équations (6.1) s'écrivent par rapport aux repères isotropes associés à $\varphi_{\alpha\beta}$ sur S, compte tenu de (4.9) et (5.6*a*) :

$$k_\alpha \mathfrak{L}(k)\overline{m}^\alpha = \overline{\mathrm{B}} = 0 \tag{6.3a}$$

$$\overline{m}_\alpha \mathfrak{L}(k)\overline{m}^\alpha = -\bar{e} - \overline{\mathrm{E}} = 0 \tag{6.3b}$$

$$\mathcal{A}(2\theta - m_\alpha \mathfrak{L}(k)\overline{m}^\alpha) + \dot{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(g + \mathrm{D} - \bar{d}) + \dot{\mathcal{A}} = 0 \tag{6.3c}$$

$$\nabla_\sigma(\mathcal{A}\overline{m}^\sigma) - \mathcal{A} l_\alpha \mathfrak{L}(k)\overline{m}^\alpha = \mathcal{A}(\bar{c} - \overline{\mathrm{A}}) + \nabla_\sigma(\mathcal{A}\overline{m}^\sigma) = 0 \tag{6.3d}$$

avec :

$$\dot{\mathcal{A}} = k^\sigma \nabla_\sigma \mathcal{A} \tag{6.3e}$$

a) Lors du transport de Lie pour le vecteur k^α, on a :

$$\mathfrak{L}(k)(\Phi_{\alpha\beta}k^\beta) = \mathfrak{L}(k)\Phi_{\alpha\beta}\cdot k^\beta = \left[\frac{\dot{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}}\,\Phi_{\alpha\beta} + \mathcal{A}(k_\alpha \mathfrak{L}(k)\overline{m}_\beta - k_\beta \mathfrak{L}(k)\overline{m}_\alpha)\right]k^\beta = 0 \tag{6.4}$$

compte tenu de (6.3*a*).

La notion de champ singulier est donc stable par transport de Lie par k^α.

b) Lors de sa propagation le long de la trajectoire de k^α, on a :

$$k^\sigma \nabla_\sigma(\Phi_{\alpha\beta}k^\beta) = \left\{\frac{\dot{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}}\,\Phi_{\alpha\beta} + \mathcal{A}[\dot{k}_\alpha \overline{m}_\beta - \dot{k}_\beta \overline{m}_\alpha + k_\alpha \dot{\overline{m}}_\beta - k_\beta \dot{\overline{m}}_\alpha)\right\} k^\beta + \Phi_{\alpha\beta}\dot{k}^\beta \tag{6.5a}$$

soit encore, compte tenu de (6.3*a*) :

$$k^\sigma \nabla_\sigma(\Phi_{\alpha\beta}k^\beta) = \mathcal{A}\bar{h}k_\alpha \tag{6.5b}$$

D'où, eu égard à (4.1), le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que la notion de champ singulier soit stable par propagation le long de la trajectoire de k^α est que cette trajectoire soit une géodésique isotrope de V_4 [7], le caractère orthogonal de k^α et $\overline{m}^\alpha$ étant conservé ($\nabla_\sigma(k^\alpha \overline{m}_\alpha) = 0$).

Il est également clair que cette stabilité du champ singulier à l'égard de la propagation et du transport de Lie le long de la géodésique isotrope tangente à k_α n'entraîne pas que le vecteur $\overline{m}_\alpha$ soit transporté par parallélisme ($k^\sigma \nabla_\sigma \overline{m}_\alpha = 0$) ou à dérivée de Lie nulle par k^α. Il en résulte uniquement, compte tenu de (6.3*b*) et (6.3*c*) :

$$k^\sigma \nabla_\sigma \Phi_{\alpha\beta} = \mathcal{A}[\bar{d}(k_\alpha \overline{m}_\beta - k_\beta \overline{m}_\alpha) - \bar{e}(k_\alpha m_\beta - k_\beta m_\alpha)] \tag{6.6a}$$

ou encore :

(6.6*b*) $$k^\sigma \nabla_\sigma \Phi_{\alpha\beta} = \bar{d}\Phi_{\alpha\beta} - \eta\bar{\Phi}_{\alpha\beta} \qquad \mathcal{A}\bar{e} = \bar{\mathcal{A}}\eta$$

Le caractère singulier de $\varphi_{\alpha\beta}$ sur S entraîne :

(6.6*c*) $$\bar{e} = -\, k^\rho \bar{m}^\sigma \nabla_\sigma k_\rho$$

L'hypothèse de Robinson [*8*] consiste à postuler que la propagation du champ singulier est « normale », soit :

(6.7) $$k^\sigma \nabla_\sigma \Phi_{\mu\nu} = \zeta \Phi_{\mu\nu}$$

Il s'ensuit naturellement alors :

(6.8) $$\bar{e} = 0$$

c'est-à-dire le *théorème de Robinson* : la congruence des géodésiques isotropes, trajectoires du vecteur propre k^α de $\phi_{\alpha\beta}$ ($\phi_{\alpha\beta}k^\beta = 0$) est sans distorsion ($\Sigma_1 - \theta^2 = 0$). Notons également que les auteurs [*9*] qui ont retrouvé ce théorème ont fait une hypothèse plus forte : $k^\sigma \nabla_\sigma \bar{m}_\alpha = 0$.

Il est maintenant clair que ce théorème traduit non une propriété générale des champs singuliers de Maxwell, mais seulement une conséquence de l'hypothèse (6.7) qui postule la conservation du caractère antiauto-adjoint de $\Phi_{\alpha\beta}$. Les champs vérifiant (6.7) et par suite le théorème de Robinson seront appelés *champs hypersinguliers*.

D'autre part si, bien que $k^\sigma \nabla_\sigma \varphi^*_{\alpha\beta} \neq (k^\sigma \nabla_\sigma \varphi_{\alpha\beta})^*$, on postule que le champ $\Phi_{\alpha\beta}$ vérifie au cours de sa propagation les équations de Maxwell, on a :

(6.9) $$\Phi^{\alpha\beta}\nabla_\beta \bar{d} - \bar{\Phi}^{\alpha\beta}\nabla_\beta \eta = 0$$

ce qui entraîne :

(6.10*a*) $$k^\sigma \nabla_\sigma \bar{d} = 0$$

(6.10*b*) $$k^\sigma \nabla_\sigma \eta = 0$$

(6.10*c*) $$\mathcal{A}\bar{m}^\nu \nabla_\nu \bar{d} - \bar{\mathcal{A}} m^\nu \nabla_\nu \eta = 0$$

7. — CLASSIFICATION DES CHAMPS SINGULIERS

Les relations (4.8), (6.3*c*) et (6.10) permettent d'écrire :

(7.1) $$\dot{e} = e(d - \bar{d} + \mathrm{D} - \bar{\mathrm{D}})$$

(7.2) $$(d - \bar{d})(d + \bar{d} - \mathrm{D} - \bar{\mathrm{D}}) = 0$$

$$e[\mathrm{D} - \overline{\mathrm{D}} - 2(\bar{d} - \mathrm{D})] = \mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} m^\alpha k^\beta k^\gamma m^\delta \tag{7.3}$$

$$e\bar{e} + d[d - (\mathrm{D} + \overline{\mathrm{D}})] + \frac{1}{2}\mathrm{R}_{\rho\sigma} k^\rho k^\sigma = 0 \tag{7.4}$$

Les principaux types de champs singuliers sont :

i) *Champs singuliers intégrables* [*6*, *7*]. Ces champs tels que :

$$d - \bar{d} = 0 \tag{7.5}$$

sont modulo (6.9), stables au cours de leur propagation dans les variétés V_4 où des congruences irrotationnelles peuvent exister.

ii) *Champs singuliers à dilatation nulle.* Ces champs tels que :

$$d + \bar{d} = \mathrm{D} + \overline{\mathrm{D}} = 0 \tag{7.6}$$

sont modulo (6.9), stables au cours de leur propagation dans les variétés V_4 où les congruences correspondantes peuvent exister et dont le tenseur de Ricci est tel que :

$$e\bar{e} + d^2 + \frac{1}{2}\mathrm{R}_{\rho\sigma} k^\rho k^\sigma = 0 \tag{7.7}$$

iii) *Champs hypersinguliers.* Ces champs définis par :

$$e = 0 \quad \rightarrow \quad \mathrm{E} = 0 \tag{6.8}$$

sont modulo (6.9), stables dans les variétés V_4 dont le tenseur de courbure obéit à :

$$\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} m^\alpha k^\beta k^\gamma m^\delta = 0 \tag{7.8}$$

iv) *Champs constants.* Ils sont définis par la vérification simultanée de (7.5), (7.6) et (6.8) [*2*]; ils sont évidemment stables au cours de leur propagation dans les variétés V_4 où des congruences irrotationnelles, sans distorsion et sans dilatation existent et dont le tenseur de courbure vérifie (7.8) et :

$$\mathrm{R}_{\rho\sigma} k^\rho k^\sigma = 0 \tag{7.9}$$

Notons que les variétés V_4 envisagées ici ne sont pas celles du vide, mais celles correspondant à une distribution d'énergie arbitraire incluant l'énergie du champ électromagnétique singulier [5*].

8. — ÉTATS DE POLARISATION DE LA LUMIÈRE [1]

Considérons le cas simple où la lumière monochromatique est décrite par un champ électromagnétique singulier intégrable de Maxwell tel que :

$$(8.1)\quad \Psi_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + i\overset{*}{\psi}_{\mu\nu} = \mathfrak{R}[\sqrt{2}(\overset{2}{A}e^{j\delta_2} + i\overset{1}{A}e^{j\delta_1})(k_\mu \bar{m}_\nu - k_\nu \bar{m}_\mu)e^{-j\varphi}]$$

où j est un symbole équivalent à i et $\mathfrak{R}$ désigne la partie réelle par rapport au symbole j ; on a :

$$(8.2a)\quad k_\mu = \nabla_\mu \varphi$$

$$(8.2b)\quad \Psi_{\mu\nu}k^\nu = 0 \rightarrow k^\sigma \nabla_\sigma \varphi = 0$$

$(\varphi - \delta_1)$ et $(\varphi - \delta_2)$ désignent les phases invariantes des vibrations électriques suivant λ_1^α et λ_2^α.

De (7.1), on tire :

$$(8.3a)\quad \psi_{\mu\nu} = \mathfrak{R}(p_{\mu\nu} + jq_{\mu\nu})e^{-j\varphi}$$

$$(8.3b)\quad p_{\mu\nu} = k_\mu p_\nu - k_\nu p_\mu \qquad p^\mu = \overset{2}{A} \cos \delta_2 \lambda_2^\mu + \overset{1}{A} \cos \delta_1 \lambda_1^\mu$$

$$(8.3c)\quad q_{\mu\nu} = k_\mu q_\nu - k_\nu q_\mu \qquad q^\mu = \overset{2}{A} \sin \delta_2 \lambda_2^\mu + \overset{1}{A} \sin \delta_1 \lambda_1^\mu$$

$$(8.3d)\quad k^\sigma p_\sigma = k^\sigma q_\sigma = 0$$

$$(8.3e)\quad k^\sigma(\delta_\sigma^\rho - \lambda_{0\sigma}\lambda_0^\rho)p_\rho = k^\sigma(\delta_\sigma^\rho - \lambda_{0\sigma}\lambda_0^\rho)q_\rho = 0$$

La description des états de polarisation de la lumière correspondant à $(p_{\nu\mu} + jq_{\mu\nu})$ peut être réalisée en substituant à ces champs les champs $\tilde{a}_{\nu\mu}$ et $\tilde{b}_{\mu\nu}$ tels que :

$$(8.4a)\quad \psi_{\mu\nu} = \tilde{a}_{\mu\nu} + \tilde{b}_{\mu\nu} = \mathfrak{R}[(a_{\mu\nu} + jb_{\mu\nu})e^{-j(\varphi-\sigma)}]$$

$$(8.4b)\quad a_{\mu\nu} = k_\mu a_\nu - k_\nu a_\mu \qquad b_{\mu\nu} = k_\mu b_\nu - k_\nu b_\mu$$

$$(8.4c)\quad a_\mu + jb_\mu = (p_\mu + jq_\mu)e^{-j\sigma}$$

σ étant choisi de manière que

$$(8.4d)\quad a_\mu b^\mu = 0$$

Posons :

(8.5) $p^2 = -p_\mu p^\mu \quad q^2 = -q_\mu q^\mu \quad \frac{q}{p} = \operatorname{tg}\beta \quad p \cdot q \cos\gamma = -p_\mu q^\mu$

et sans perte de généralité :

$$a^2 = -a_\mu a^\mu > b^2 = -b_\mu b^\mu \tag{8.6}$$

On a :

$$\operatorname{tg} 2\sigma = \frac{2p\cdot q\cos\gamma}{p^2 - q^2} = \operatorname{tg} 2\beta \cos\gamma \tag{8.7}$$

$$a^2 = \frac{1}{2}\left\{p^2 + q^2 + \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2\cos^2\gamma}\right\} \tag{8.8a}$$

$$b^2 = \frac{1}{2}\left\{p^2 + q^2 - \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2\cos^2\gamma}\right\} \tag{8.8b}$$

Il est aisé de voir que les champs électriques :

$$\tilde{a}_\mu = (k_\sigma u^\sigma)^{-1}\tilde{a}_{\mu\nu}u^\nu \qquad \text{et} \qquad \tilde{b}_\mu = (k_\sigma u^\sigma)^{-1}\tilde{b}_{\mu\nu}u^\nu \tag{8.9}$$

où le vecteur unitaire $u^\alpha = \lambda_0^\alpha$ détermine le système de référence physique, sont tels que :

$$\frac{\tilde{a}_\mu \tilde{a}^\mu}{a_\sigma a^\sigma} + \frac{\tilde{b}_\mu \tilde{b}^\mu}{b_\sigma b^\sigma} = 1 \tag{8.10}$$

ce qui signifie que le champ électrique $(\tilde{a}_\mu + \tilde{b}_\mu)$ décrit en *un point fixe* de l'espace associé à u^α et au cours du temps, une ellipse de demi-axes a et b, l'angle θ des deux vecteurs p^μ et a^μ étant déterminé par :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\sigma \tag{8.11}$$

La lumière est alors dite *elliptiquement polarisée.*

Les paramètres suivants sont alors tous différents de zéro :

$$\begin{gathered} s_0 = p^2 + q^2 \qquad s_1 + is_2 = 2p\cdot q\sin\gamma e^{i\sigma} \\ s_3 = \sqrt{(p^2 - q^2)^2 + 4p^2q^2\cos^2\gamma} \end{gathered} \tag{8.12}$$

et vérifient :

$$s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 = 0 \tag{8.13}$$

Nous les appelons *paramètres généralisés de Stokes.*

a) La lumière est polarisée *elliptique droite ou gauche* au point considéré suivant que $s_2 > 0$ ou $s_2 < 0$, tandis que s_0, s_1 et s_3 sont tous différents de zéro.

b) La lumière est dite polarisée *circulaire* lorsque :

(8.14*a*) $$s_3 = 0 \rightarrow p^2 = q^2, \quad \cos\gamma = 0$$

(8.14*b*) $$s_1 = 0 \rightarrow \cos\sigma = 0$$

mais d'après (8.7), σ est indéterminé lorsque (8.14*a*) est vérifié; nous adopterons par convention $\cos\sigma = \frac{\pi}{2}$. Cette polarisation circulaire est *droite* ou *gauche* suivant que :

(8.14*c*) $$s_0 = s_2 \quad \text{ou} \quad s_0 = -s_2$$

c) La lumière est dite *linéairement polarisée* lorsque :

(8.15) $$s_0 = s_3 \quad s_1 = 0 \quad s_2 = 0 \rightarrow \sin\gamma = 0$$

d) Deux faisceaux lumineux sont de polarisations opposées lorsque :

(8.16) $$s_i = -\alpha s_i \qquad s_0 = \alpha s_0 \qquad \alpha > 0$$

Le degré de polarisation de la lumière issue de deux faisceaux lumineux de polarisations opposées est :

(8.16) $$\tau = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

La lumière est complètement polarisée si $\alpha = 0$ et incohérente si $\alpha = 1$.

9. — PARAMÈTRES GÉNÉRALISÉS DE STOKES ET GROUPE LOCAL DE LORENTZ

Lors d'une transformation locale de Lorentz :

(2.3) $$\lambda_{a'}{}^{\alpha} = \Lambda_{a'}{}^{b}\lambda_b^{\alpha}$$

a) les grandeurs de phase sont invariantes par définition;

b) les quantités p^2, q^2 et $\cos\gamma$ sont invariantes, compte tenu des conditions de transversalité (8.3*d*) et (8.3*e*) du champ électromagnétique considéré;

c) les deux composantes $p_{\mu\nu}$ et $q_{\mu\nu}$ du champ $\psi_{\mu\nu}$ se transforment de manière indépendante, la phase φ étant invariante.

Les paramètres généralisés de Stokes sont, par suite, invariants par (2.3) [*10*]. L'état local de polarisation de la lumière est donc indépendant du repère local orthonormé choisi pour effectuer l'interprétation physique locale.

Remarque. Il est clair que les paramètres généralisés de Stokes définissent le même état de polarisation, lorsqu'on effectue un changement local de jauge, ce qui rend cette caractérisation de la polarisation compatible avec la C-équivalence.

10. — PROPAGATION DES PARAMÈTRES GÉNÉRALISÉS DE STOKES

Les grandeurs de phase introduites dans le § 8 sont, d'après (8.2*b*), invariantes au cours de la propagation du champ $\psi_{\mu\nu}$.

D'autre part, ce champ étant intégrable, on a :

$$d = \bar{d} \tag{10.1}$$

Le champ $\psi'_{\mu\nu}$ au point voisin M′ (MM′ correspondant à la variété $\triangle u$ du paramètre sur la géodésique isotrope) est :

$$\psi'_{\mu\nu} = (1 + d\triangle u)\psi_{\mu\nu} + \underset{e}{\psi}_{\mu\nu} \tag{10.2a}$$

$$\underset{e}{\psi}_{\mu\nu} = \mathcal{R}(\varepsilon_{\mu\nu} + j\tau_{\mu\nu})e^{-j\varphi}\triangle u \tag{10.2b}$$

$$\varepsilon_{\mu\nu} = k_\mu\varepsilon_\nu - k_\nu\varepsilon_\mu \qquad \tau_{\mu\nu} = k_\mu\tau_\nu - k_\nu\tau_\mu \tag{10.2c}$$

$$\varepsilon^\mu = (e_1\overset{1}{A}\cos\delta_1 - e_2\overset{2}{A}\cos\delta_2)\lambda_1^\mu - (e_1\overset{2}{A}\cos\delta_2 + e_2\overset{1}{A}\cos\delta_1)\lambda_2^\mu \tag{10.2d}$$

$$\tau^\mu = (e_1\overset{1}{A}\sin\delta_1 - e_2\overset{2}{A}\sin\delta_2)\lambda_1^\mu - (e_1\overset{2}{A}\sin\delta_2 + e_2\overset{1}{A}\sin\delta_1)\lambda_2^\mu \tag{10.2e}$$

$$e = e_1 + ie_2 \tag{10.2f}$$

On peut donc écrire au point M′ :

$$\psi'_{\mu\nu} = (p'_{\mu\nu} + jq'_{\mu\nu})e^{-j\varphi} \tag{10.3a}$$

avec :

$$p'_\mu = (1 + d\triangle u)p_\mu + \varepsilon_\mu\triangle u \qquad q'_\mu = (1 + d\triangle u)q_\mu + \tau_\mu\triangle u \tag{10.3b}$$

Les paramètres généralisés de Stokes au point M′ peuvent dès lors être définis à partir de p'_μ et q'_μ de la même manière qu'au point M. Les expressions (10.3*b*) de p'_μ et q'_μ montrent que dans le cas général, les paramètres généralisés de Stokes sont au point M′ différents de ceux définis en M; le type de polarisation de la lumière varie donc d'un point à l'autre [*7*] lors de sa propagation dans un espace de Riemann dont la structure est déterminée par la distribution d'énergie présente. L'étude explicite de ces variations fera l'objet d'un travail ultérieur.

Mais lorsque le champ singulier intégrable considéré est hypersingulier ($e = 0$), le champ $\psi'_{\mu\nu}$ se réduit $(1 + d\triangle u)\psi_{\mu\nu}$ et décrit une lumière de même type de polarisation que $\psi_{\mu\nu}$, puisque les paramètres généralisés de Stokes sont indépendants d'un changement local de jauge.

11. — RÉSUMÉ

L'étude précédente nous a montré qu'à l'égard de la polarisation de la lumière monochromatique, les champs électromagnétiques singuliers intégrables se divisent en deux classes :

a) les champs hypersinguliers ($e = 0$) qui se comportent comme des cas purs stables au cours de leur propagation;

b) les champs singuliers généraux qui révèlent que le champ de gravitation agit à l'égard de la polarisation comme un milieu polarisable.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] M. Born et E. Wolf, Théorie classique de la polarisation de la lumière monochromatique (Nombreuses références), *Principles of optics*, Pergamon, 1965.

[*2*] M. Chevreton, Caractérisation des ondes planes par les champs constants dans un espace d'Einstein du vide, *C. R.*, t. 262, 1966, p. 1227.

[*3*] J. Ehlers, P. Jordan et R. Sachs, Étude des congruences géodésiques isotropes (le tenseur de distorsion y est défini par rapport à la métrique du 2-plan orthogonal à k^α), *Akad. wiss. Lit. Mainz Abh. Math.-Nat. kl.*, n° 1, 1961.

[*4*] S. Kichenassamy, Nécessité et signification de la C-équivalence, *Proc. Matscience Symposium Bangalore*, Plenum Press, New York, vol. 5, 1965, p. 107; *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 4, 1966, p. 139.

[*5*] S. Kichenassamy, Rapports entre le groupe de Lorentz et le groupe conforme; ici rapports entre (2.7), (2.8) et (2.9), *Bol. Univ. Paranà Fis. Teor.*, 1967 *(à paraître)*; et M. Baktavatsalou, *C. R.*, t. 260, 1965, p. 6303.

[5*] S. KICHENASSAMY, L'étude des champs électromagnétiques singuliers dans des espaces dont le tenseur de Weyl est algébriquement spécial est effectuée dans : *C. R.*, t. 266 A, 1968, p. 509 et *J. Math. Phys.*, 1968 *(à paraître)* *(Note ajoutée à la correction des épreuves).*

[6] A. LICHNEROWICZ, Ondes et radiations électromagnétiques en Relativité générale, *Ann. Mat. pura ed appl.*, t. 50, 1960, p. 1 (cf. référence suivante).

[7] L. MARIOT, Étude des champs singuliers intégrables. Établit sous des hypothèses restrictives, que les états de polarisation circulaire droite et gauche sont des cas purs qui se conservent en Relativité générale ($\Phi_{\alpha\beta}k^{\beta} = 0$ dans un domaine de $V_4 \rightarrow k^{\sigma}\nabla_{\sigma}k_{\alpha} = 0$; inversement $k^{\sigma}\nabla_{\sigma}k_{\alpha} = 0$ et $\Phi_{\alpha\beta}k^{\beta} = 0$ sur une hypersurface S de genre espace $\rightarrow k^{\beta}k^{\sigma}\nabla_{\sigma}\varphi_{\alpha\beta} = 0$, ou colinéaire à k_{α} ou tangent à S (permanence du champ singulier)), *Rend. di Mat.*, t. 18, 1959, p. 178.

[8] I. ROBINSON, La congruence associée à k^{α} est sans distorsion, *J. Math.*, t. 2, 1961, p. 296.

[9] R. SACHS, *Proc. Roy. Soc.*, t. A 264, 1961, p. 309 (cf. [3]).

[10] DAVID S. DE YOUNG, Invariance des paramètres habituels de Stokes par le groupe de Lorentz par une méthode spinorielle, *J. Math. Phys.*, t. 7, 1966, p. 196.

Manuscrit reçu le 28 novembre 1967.