ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. LEMIEUX
A. K. BOSE

Construction de potentiels pour lesquels l'équation de Schrödinger est soluble

Annales de l'I. H. P., section A, tome 10, nº 3 (1969), p. 259-270
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__10_3_259_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 3, 1969, p. 259-270.

Section A :
Physique théorique.

Construction de potentiels pour lesquels l'équation de Schrödinger est soluble (*) (**)

par

A. LEMIEUX
Département de Physique, Université de Sherbrooke, Québec, Canada,

et

A. K. BOSE
Département de Physique, Université de Montréal, Québec, Canada.

ABSTRACT. — Heun differential equation and its confluent forms are used to construct several new classes of solvable potentials. These equations are immediate generalizations of Riemann, Whittaker and Mathieu equations already utilized for the same purpose. Thus the Schrödinger equations formed with those potentials are solvable in terms of Heun functions and Heun confluent fonctions.

I. INTRODUCTION

Quelques auteurs [*1*]-[*4*] se sont récemment intéressés à la construction de potentiels dont les fonctions d'onde de l'équation de Schrödinger sont

(*) Ce travail fait partie d'un mémoire de maîtrise soumis par un des auteurs (A. L.) au Département de Physique de l'Université de Montréal, en septembre 1967.
(**) Travail subventionné en partie par le Conseil National de Recherches du Canada.

exprimables analytiquement en termes des fonctions spéciales de la physique mathématique. Jusqu'à présent, on a obtenu des potentiels solubles en termes des fonctions de Riemann (hypergéométriques), de Whittaker (hypergéométriques confluentes) et de Mathieu. Cependant, aucun potentiel vraiment nouveau n'a été construit; tous ayant déjà isolément été reconnus comme solubles [5] [6].

Après une modification de nature à la généraliser (section II), la méthode de Bose [2] est appliquée dans le présent travail à la construction de potentiels dont les fonctions d'onde sont exprimables en termes des fonctions de Heun (section III) et de leurs formes confluentes (section IV). Les nouvelles classes de potentiels solubles ainsi obtenues, forment les tableaux I à IV.

L'équation différentielle de Heun et les équations confluentes de Heun sont des généralisations immédiates des équations déjà utilisées aux mêmes fins. De plus, les fonctions de Heun et leurs propriétés sont bien connues [7]-[12]; les solutions de la première équation confluente de Heun sont aussi connues pour quelques cas particuliers distincts [13]-[15]; celles de la deuxième équation confluente ont récemment été déterminées et étudiées par Maroni [16] et, finalement, celles de la troisième équation confluente sont imminentes [17] (*). Notons qu'un cas particulier de l'équation de Heun fut appliqué à un autre problème de physique théorique et ses solutions ont fait l'objet d'une vaste étude de De Alfaro et autres [18].

De façon plus générale, la présente étude se justifie du fait qu'il est souhaitable de connaître tous les potentiels pour lesquels on peut résoudre l'équation de Schrödinger et exprimer ses solutions en termes de celles des équations différentielles que l'on peut actuellement résoudre. On trouve en effet parmi ceux-ci des potentiels solubles d'intérêt certain, pensons en particulier aux potentiels singuliers à l'origine pour lesquels des solutions analytiques sont hautement désirables [19] [20] et cela, quelle que soit leur forme fonctionnelle.

Notons ici, qu'au moment de soumettre leur manuscrit à l'éditeur, les présents auteurs ont pris connaissance d'un travail similaire de Vasudevan, Venkatesan et Jagannathan [21]. Dans ce dernier travail on a obtenu, d'une façon moins systématique, quelques-uns des nouveaux potentiels de la présente contribution. Ce sont des potentiels construits à partir des équations de Mathieu, de Hill, de Lamé et de l'équation d'ondes sphéroïdales. En effet, ces dernières équations sont toutes des cas particuliers de l'équation de Heun et de ses formes confluentes [12] [22].

(*) Les auteurs remercient l'éditeur d'avoir porté à leur attention les travaux de Pham Ngoe Dinh.

II. MÉTHODE GÉNÉRALE DE CONSTRUCTION DE POTENTIELS SOLUBLES

Les équations différentielles linéaires du deuxième ordre,

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0,$$

peuvent être mises sous la forme normale

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \mathrm{I}(z)\omega = 0, \tag{1}$$

d'invariant

$$\mathrm{I}(z) = q(z) - \frac{1}{2}\frac{dp(z)}{dz} - \frac{1}{4}[p(z)]^2,$$

par le changement d'inconnue

$$u = \omega \exp\left(-\frac{1}{2}\int p(z)dz\right).$$

Un changement de variable $z = \mathrm{Z}(x)$, appliqué à une équation normale, permet d'obtenir une nouvelle équation également de forme normale,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mathrm{J}(x)\varphi = 0, \tag{2}$$

s'il est accompagné du changement d'inconnue

$$\omega = \left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^{1/2}\varphi(x).$$

L'invariant transformé est donné par la relation

$$\mathrm{J}(x) = \left(\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^2 \mathrm{I}[\mathrm{Z}(x)] + \frac{1}{2}\{\mathrm{Z}(x), x\} \tag{3}$$

où

$$\{\mathrm{Z}, x\} = \left(\frac{d^3\mathrm{Z}}{dx^3}\bigg/\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2\mathrm{Z}}{dx^2}\bigg/\frac{d\mathrm{Z}}{dx}\right)^2 \tag{4}$$

est la dérivée de Schwarz de $\mathrm{Z}(x)$.

Notre problème est de découvrir et d'appliquer les changements de variable capables de transformer un invariant $\mathrm{I}(z)$ d'équation différentielle soluble, en invariants transformés $J(x)$ qui aient la forme d'invariants de Schrödinger

$$S(x) = k^2 - V(x). \tag{5}$$

Les fonctions $V(x)$ obtenues sont des énergies potentielles d'équations de Schrödinger solubles et dont les solutions sont de la forme

$$\varphi(x) = \left(\frac{dZ}{dx}\right)^{-1/2} \omega[Z(x)].$$

Pour cette raison, on dira que ces fonctions $V(x)$ sont des « potentiels solubles ».

Effectivement, chacun de ces changements de variable peut produire un potentiel soluble à plusieurs termes et nos invariants de Schrödinger ont plutôt la forme

$$S(x) = k^2 - V_1(x) - V_2(x) \ldots$$

Le nombre de termes de ces invariants dépend de la nature de l'invariant initial $I(z)$. Dans le cas des invariants de Riemann, de Whittaker et de Mathieu, on en obtient deux [*2*] [*4*]. Pour les invariants de l'équation de Heun et des équations confluentes de Heun, nous en avons quatre. Chacun de ces termes possède une forme distincte et une amplitude arbitraire. Lorsque l'un de ces termes est de la forme ax^{-2}, les trois autres forment alors un potentiel soluble pour tout moment cinétique.

III. APPLICATION A L'INVARIANT DE L'ÉQUATION DE HEUN

L'invariant de l'équation de Heun de points singuliers réguliers $z = a, b, c$ et ∞, est de la forme

$$I_H(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \left[A + Bz + \frac{C}{z-a} + \frac{D}{z-b} + \frac{E}{z-c} \right] \tag{7}$$

Les coefficients A, B, ... sont des constantes arbitraires et indépendantes déterminées uniquement par les différences d'exposants caractéristiques et du paramètre accessoire de l'équation de Heun. Dans le cas particulier $A = B = 0$, cet invariant devient l'invariant de Riemann à points singuliers $z = a, b, c$.

Pour la classe de changements de variable $z = Z(x)$, définie par l'équation

$$\left(\frac{dZ}{dx}\right)^2 = l^2(Z-a)^p(Z-b)^q(Z-c)^r \tag{8}$$

où p, q, r et l sont des paramètres arbitraires, la dérivée de Schwarz (4) est de la même forme que le produit $(dZ/dx)^2 I_H(Z)$ et nous obtenons, selon la formule (3), l'invariant transformé

$$J_H(x) = l^2(Z-a)^{p-1}(Z-b)^{q-1}(Z-c)^{r-1}\left[A'+B'Z+\frac{C'}{Z-a}+\frac{D'}{Z-b}+\frac{E'}{Z-c}\right] \tag{9}$$

où les coefficients primés sont arbitraires et indépendants :

$$A'=A+\frac{1}{16}(p+q+r-4)[(p-q-r)a+(q-r-p)b+(r-p-q)c]$$

$$B'=B+\frac{1}{16}(p+q+r)(p+q+r-4) \quad , \quad C'=C+\frac{1}{16}p(p-4)(a-b)(a-c).$$

$$D'=D+\frac{1}{16}q(q-4)(b-a)(b-c) \quad , \quad E'=E+\frac{1}{16}r(r-4)(c-a)(c-b).$$

Pour chaque choix d'exposants p, q et r (entiers positifs ou négatifs) capable de produire un terme constant dans cet invariant, chacune des solutions de l'équation (8) permet d'écrire un invariant de Schrödinger contenant un potentiel soluble à quatre termes distincts et indépendants. En nous limitant aux potentiels définis par des fonctions simples et explicites et pour des choix particuliers des points singuliers a, b et c, nous obtenons le tableau I de potentiels solubles. Dans cette table, tous les coefficients V_i sont arbitraires et indépendants. La transformation en équation de Heun, des équations de Schrödinger formées de ces potentiels s'effectue par les changements de variable indiqués et l'identification des coefficients V_i aux paramètres de l'équation de Heun devient immédiate. Remarquons que la suppression des limitations précitées, permettrait d'allonger considérablement ce tableau. On y verrait notamment des potentiels définis par des fonctions elliptiques. La forme jacobienne de l'équation de Lamé en serait un exemple particulier.

IV. APPLICATION AUX ÉQUATIONS CONFLUENTES DE HEUN

Les équations confluentes de Heun, dans la notation de Ince [*22*], peuvent être définies par les formules

$$[0, 2, 1_2], \quad [0, 1, 1_4] \quad \text{et} \quad [0, 0, 2_2].$$

La première, considérée par Lambe et Ward [*13*], admet deux points

TABLEAU I (*)

Potentiels solubles en termes de fonctions de Heun.

Changements de variable	Potentiels solubles
$Z=\cosh^2 \alpha x$	$\dfrac{V_1}{c-\cosh^2 \alpha x}+\dfrac{V_2}{(c-\cosh^2 \alpha x)^2}+\dfrac{V_3}{\cosh^2 \alpha x}+\dfrac{V_4}{\sinh^2 \alpha x} \quad (c\neq 0,1)$
$Z=i \sinh \alpha x$	$\dfrac{V_1}{c-\sinh \alpha x}+\dfrac{V_2}{(c-\sinh \alpha x)^2}+\dfrac{V_3}{\cosh^2 \alpha x}+\dfrac{V_4}{\cosh \alpha x \coth \alpha x} \quad (c\neq \pm 1)$
$Z=\coth^2 \alpha x$	$\dfrac{V_1}{\sinh^2 \alpha x}+\dfrac{V_2}{\cosh^2 \alpha x}+\dfrac{V_3}{(c-\coth^2 \alpha x)}+\dfrac{V_4}{(c-\coth^2 \alpha x)^2} \quad (c\neq 0,1)$
$Z=\tanh^2 \alpha x$	$\dfrac{V_1}{\cosh^2 \alpha x}+\dfrac{V_2}{\sinh^2 \alpha x}+\dfrac{V_3}{(c-\tanh^2 \alpha x)}+\dfrac{V_4}{(c-\tanh^2 \alpha x)^2} \quad (c\neq 0,1)$
$Z=\tanh \alpha x$	$V_1 \tanh \alpha x+V_2 \tanh^2 \alpha x+\dfrac{V_3}{c+\tanh \alpha x}+\dfrac{V_4}{(c+\tanh \alpha x)^2} \quad (c\neq \pm 1)$
$Z=\coth \alpha x$	$V_1 \coth \alpha x+V_2 \coth^2 \alpha x+\dfrac{V_3}{c+\coth \alpha x}+\dfrac{V_4}{(c+\coth \alpha x)^2} \quad (c\neq \pm 1)$
$Z=(d+ge^{\alpha x})$	$\dfrac{V_1}{(1+ge^{\alpha x})}+\dfrac{V_2}{(1+he^{\alpha x})}+\dfrac{V_3}{(1+ge^{\alpha x})^2}+\dfrac{V_4}{(1+he^{\alpha x})^2} \quad [h=g/(1-c)\ c\neq 0,1]$
$Z=(1+ge^{\alpha x})^{1/2}$	$\dfrac{V_1}{(1+ge^{\alpha x})^{1/2}}+\dfrac{V_2}{(1+ge^{\alpha x})}+\dfrac{V_3}{(1+ge^{\alpha x})^{3/2}}+\dfrac{V_4}{(1+ge^{\alpha x})^2}$

singuliers réguliers ($z = 0, 1$) et un point singulier irrégulier de deuxième espèce à l'infini. Son invariant de forme normale peut s'écrire

$$I_1(z) = A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{(z-1)} + \frac{E}{(z-1)^2}\,. \tag{10}$$

Pour certains choix particuliers de ses coefficients, cet invariant est réductible aux invariants de Riemann, de Whittaker, de l'équation d'ondes sphéroïdales et de l'équation de classe [2, 0, 1_2]. Cette dernière équation fut étudiée et solutionnée par Ince [*14*]. Ainsi, la transformation en invariants de Schrödinger, de ce seul invariant, permet d'obtenir, entre autres, les potentiels solubles en termes des fonctions de Riemann et de Whitta-

(*) On obtient des potentiels périodiques définis par des fonctions trigonométriques circulaires, en remplaçant le paramètre α par $i\beta$. On notera aussi que nous n'avons pas introduit, dans ce tableau, tous les potentiels de formes fonctionnelles différentes que nous pourrions obtenir par l'utilisation d'identités fonctionnelles.

ker [2]. Nous obtenons aussi le potentiel coulombien à deux centres de l'ion H_2^+ d'hydrogène diatomique, soluble dans l'approximation adiabatique, en termes des fonctions d'ondes sphéroïdales [26]. On trouve ce potentiel à la première ligne du tableau II.

TABLEAU II (*)

Potentiels solubles en termes des solutions de l'équation confluente de Heun de classe [0, 2, 1_2].

Changements de variable	Potentiels solubles
$Z = x/\alpha$	$\frac{V_1}{x} + \frac{V_2}{x^2} + \frac{V_3}{\alpha - x} + \frac{V_4}{(\alpha - x)^2}$
$Z = \alpha x^2$	$V_1 x^2 + \frac{V_2}{x^2} + \frac{V_3}{(\alpha - x^2)} + \frac{V_4}{(\alpha - x^2)^2}$
$Z = ge^{\alpha x}$	$V_1 e^{\alpha x} + V_2 e^{2\alpha x} + \frac{V_3}{1 - ge^{\alpha x}} + \frac{V_4}{(1 - ge^{\alpha x})^2}$
$Z = -\sinh^2 \alpha x$	$V_1 \sinh^2 \alpha x + V_2 \sinh^4 \alpha x + \frac{V_3}{\cosh^2 \alpha x} + \frac{V_4}{\sinh^2 \alpha x}$
$Z = 1/2(1 \pm i \sinh \alpha x)$	$V_1 \sinh \alpha x + V_2 \sinh^2 \alpha x + \frac{V_3}{\cosh^2 \alpha x} + \frac{V_4}{\coth \alpha x \cosh \alpha x}$
$Z = \tanh^2 \alpha x$	$\frac{V_1}{\sinh^2 \alpha x} + \frac{V_2}{\cosh^2 \alpha x} + \frac{V_3}{\cosh^4 \alpha x} + \frac{V_4}{\cosh^6 \alpha x}$
$Z = \coth^2 \alpha x$	$\frac{V_1}{\cosh^2 \alpha x} + \frac{V_2}{\sinh^2 \alpha x} + \frac{V_3}{\sinh^4 \alpha x} + \frac{V_4}{\sinh^6 \alpha x}$
$Z = \frac{1}{1 + ge^{\alpha x}}$	$\frac{V}{1 + ge^{\alpha x}} + \frac{V_2}{(1 + ge^{\alpha x})^2} + \frac{V_3}{(1 + ge^{\alpha x})^3} + \frac{V_4}{(1 + ge^{\alpha x})^4}$
$Z = 1/2(1 - \tanh \alpha x)$	$V_1 \tanh \alpha x + V_2 \tanh^2 \alpha x + V_3 \tanh^3 \alpha x + V_4 \tanh^4 \alpha x$
$Z = 1/2(1 - \coth \alpha x)$	$V_1 \coth \alpha x + V_2 \coth^2 \alpha x + V_3 \coth^3 \alpha x + V_4 \coth^4 \alpha x$

La deuxième équation confluente de Heun admet un point singulier régulier à l'origine et un point singulier irrégulier de quatrième espèce à l'infini. Elle est une généralisation de l'équation de Whittaker ; Maroni [16] vient d'en étudier les solutions et leurs propriétés en liaison avec les fonctions hypergéométriques confluentes. Son invariant est de la forme

$$I_2(z) = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + C + Dz - z^2. \tag{11}$$

(*) Voir note sous le tableau I.

Finalement, la troisième équation confluente de Heun est une généralisation de l'équation de Mathieu [0, 0, 2_1] et Maroni [*17*] se propose également d'en étudier les solutions. Son invariant s'écrit

$$I_3(z) = A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z^3} + \frac{E}{z^4}. \tag{12}$$

Ces deux derniers invariants sont des plus intéressants puisqu'ils généralisent l'invariant de Whittaker qui a permis la construction des potentiels solubles les plus fondamentaux, soit ceux de Coulomb et de l'oscillateur harmonique.

L'application à l'invariant (10) des changements de variables définis par l'équation

$$(dZ/dx)^2 = l^2 Z^p (Z-1)^q \tag{13}$$

et l'application aux invariants (11) et (12) des changements de variables définis par

$$(dZ/dx)^2 = l^2 Z^p, \tag{14}$$

TABLEAU III

Potentiels solubles en termes des solutions de l'équation confluente de Heun de classe [0, 1, 1_4].

Changements de variable	Conditions (*)	Potentiels solubles
$Z = ge^{\alpha x}$	$V_4 \neq 0$	$V_1 e^{\alpha x} + V_2 e^{2\alpha x} + V_3 e^{3\alpha x} + V_4 e^{4\alpha x}$
$Z = \alpha x^2$	$V_4 \neq 0$	$\frac{V_1}{x^2} + V_2 x^2 + V_3 x^4 + V_4 x^6$
$Z = \alpha x$	$V_4 \neq 0$	$\frac{V_1}{x^2} + \frac{V_2}{x} + V_3 x + V_4 x^2$
$Z = \alpha x^{2/3}$	$V_4 \neq 0$	$\frac{V_1}{x^2} + \frac{V_2}{x^{4/3}} + \frac{V_3}{x^{2/3}} + V_4 x^{2/3}$
$Z = \alpha x^{1/2}$	$k^2 \neq 0$	$\frac{V_1}{x^2} + \frac{V_2}{x} + \frac{V_3}{x^{1/2}} + \frac{V_4}{x^{3/2}}$

(*) Ces conditions sont dues à la présence de seulement quatre paramètres arbitraires dans l'invariant (11). Le cinquième paramètre nécessaire est fourni par la constante $\alpha \neq 0$.

nous permettent d'obtenir les tableaux II, III et IV de potentiels solubles en termes des fonctions confluentes de Heun. Ces changements de variable sont des cas particuliers de ceux définis par l'équation (8) et ils nous sont suggérés par la forme des invariants (10), (11) et (12) et la relation (3).

TABLEAU IV

Potentiels solubles en termes des solutions de l'équation confluente de Heun de classe $[0, 0, 2_2]$.

Changements de variable	Potentiels solubles
$Z = \alpha x$	$V_1/x + V_2/x^2 + V_3/x^3 + V_4/x^4$
$Z = \alpha x^2$	$V_1 x^2 + V_2/x^2 + V_3/x^4 + V_4/x^6$
$Z = g e^{\alpha x}$	$V_1 e^{2\alpha x} + V_2 e^{\alpha x} + V_3 e^{-\alpha x} + V_4 e^{-2\alpha x}$

Notons en particulier, à la troisième ligne du tableau III, la présence du terme linéaire de l'effet Stark. En effet pour V_4 ($\neq 0$) très petit, ce potentiel fournit une bonne approximation de l'effet d'un champ électrique uniforme sur l'atome d'hydrogène. De plus, pour $V_2 = 0$, nous obtenons l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique plongé dans le même champ. Dans ces deux cas, l'équation radiale réduite de Schrödinger est soluble pour tout moment cinétique.

V. CONCLUSION

Nous avons construit à toute fin pratique, tous les potentiels indépendants de la vitesse, dont on peut déterminer analytiquement les fonctions d'onde des équations de Schrödinger qu'ils peuvent former. En fait, l'exigence de potentiels indépendants de la vitesse est une condition limitative et sa relaxation permettrait d'élargir sensiblement la famille des potentiels solubles. Par contre, nous n'avons pas imposé la condition beaucoup plus restreignante que serait l'exigence de la présence d'un terme moment cinétique en x^{-2} dans l'invariant de Schrödinger. Cependant, dans plusieurs cas, ce terme apparaît naturellement et dans d'autres cas, nous notons fréquemment la présence d'un terme dont le comportement à l'origine est identique au terme moment cinétique et qui pourrait le simuler dans certaines applications. Nous avons sciemment omis les potentiels solubles qui ne sont pas définis en termes de fonctions élémentaires et explicites.

Pour générer d'autres types de potentiels solubles, il faudrait maintenant considérer des classes de changements de variables autres que celle que nous avons employée (équation (8)). Mais à cause de la structure de l'invariant transformé (équation (3)), ces classes de changements de variable devraient jouir de propriétés suffisamment limitatives pour qu'on puisse douter sérieusement de leur existence. En effet, elles devraient produire une dérivée de Schwarz (équation (4)), expression assez complexe en soi, qui soit compatible avec l'invariant initial de l'équation différentielle considérée, tout en produisant des invariants de Schrödinger contenant, par définition, un terme constant et des termes fonctionnels dont les amplitudes sont arbitraires et indépendantes.

Une seconde méthode de construction de potentiels solubles consisterait dans l'utilisation du théorème de Darboux [*23*]. Or, il est permis d'être pessimiste quant à cette possibilité. Certains auteurs [*1*] [*4*] l'ont suggérée sans en tirer des résultats originaux. L'application de ce théorème aux équations les plus simples produit des potentiels déjà construits, dans ce travail ou ailleurs, et dont les amplitudes ne sont pas arbitraires [*23*] ou indépendantes des autres paramètres comme la portée des potentiels [*4*].

En plus de nouveaux potentiels solubles, les potentiels que nous avons construits fournissent plusieurs exemples de « superposition de potentiels ». En effet, on constate par exemple, que la somme de certains potentiels solubles en termes de fonctions hypergéométriques ou hypergéométriques confluentes est soluble en termes de fonctions de Heun ou de fonctions confluentes de Heun. Notons quelques exemples précis :

a) Les potentiels

$$V_1(x) = \frac{V_{11}}{1 + ge^{\alpha x}} + \frac{V_{12}}{(1 + ge^{\alpha x})^2}$$

et

$$V_2(x) = \frac{V_{21}}{1 + he^{\alpha x}} + \frac{V_{22}}{(1 + he^{\alpha x})^2}$$

sont individuellement solubles en termes de fonctions hypergéométriques [*2*] et le potentiel résultant de leur superposition,

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x)$$

est soluble en termes de fonctions de Heun pour tout $g \neq h$ et tout V_{ij} (tableau I).

b) Les potentiels de Coulomb et de l'oscillateur harmonique sont individuellement solubles en termes de fonctions hypergéométriques confluentes et leur superposition est soluble en termes de « fonctions de Maroni » [*16*] pour tout moment cinétique (tableau III).

Un autre aspect intéressant du présent travail est que les équations confluentes de Heun nous ont permis la construction de plusieurs potentiels singuliers à l'origine, dont les solutions explicites sont hautement désirables (Les références [*19*] et [*20*] fournissent une bibliographie détaillée à cet effet). En effet, nous avons construit des potentiels en x^{-n} avec $n = 3$, 4 et 6, tous accompagnés d'un terme moment cinétique. Jusqu'à maintenant, seul le potentiel en x^{-4} était reconnu comme soluble et il fut récemment étudié par plusieurs auteurs [*3*] [*4*] [*24*] [*25*].

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] A. Bhattacharjie et E. C. G. Sudarshan, *Nuov. Cim.*, t. **25**, 1962, p. 864.
[*2*] A. K. Bose, *Nuov. Cim.*, t. **32**, 1964, p. 679 et *Phys. Lett.*, t. **1**, 1963, p. 245.
[*3*] R. M. Spector, *J. Math. Phys.*, t. **5**, 1964, p. 1185.
[*4*] H. H. Aly et R. M. Spector, *Nuov. Cim.*, t. **38**, 1965, p. 149.
[*5*] C. Eckart, *Phys. Rev.*, t. **35**, 1930, p. 1303.
P. M. Morse, *Phys. Rev.*, t. **34**, 1929, p. 57.
N. Rosen et P. M. Morse, *Phys. Rev.*, t. **42**, 1932, p. 210.
G. Manning et N. Rosen, *Phys. Rev.*, t. **44**, 1933, p. 953.
G. Pöschl et E. Teller, *Z. Physik*, t. **83**, 1933, p. 143.
L. Hulthén et M. Sugarawa, *Encyclopedia of Physics*, vol. 39 (Berlin, 1959).
R. D. Woods et D. S. Saxon, *Phys. Rev.*, t. **95**, 1954, p. 577.
E. Vogt et G. H. Wannier, *Phys. Rev.*, t. **95**, 1954, p. 1190.
[*6*] L. Infeld et T. E. Hull, *Rev. Mod. Phys.*, t. **23**, 1951, p. 21.
[*7*] K. Heun, *Math. Annalen*, t. **33**, 1889, p. 161.
[*8*] E. B. Van Vleck, *Amer. J. Math.*, t. **21**, 1899, p. 126.
[*9*] A. Erdélyi, *Quart. J. of Math.* (Oxford), t. **13**, 1944, p. 62.
[*10*] A. Erdélyi, *Duke Math. J.*, t. **9**, 1942, p. **48**.
[*11*] C. Snow, *Hypergeometric and Legendre Functions...*, N. B. S.-A. M. S., vol. 19, 2e éd., ch. 7 (Washington, 1952).
[*12*] A. Erdélyi et autres, *Higher Transcendental Functions*, vol. 3, p. 57 (McGraw-Hill, N. Y., 1955).
[*13*] G. G. Lambe et D. R. Ward, *Quart. J. Math.* (Oxford), t. **5**, 1934, p. 81.
[*14*] E. L. Ince, *London Math. Soc. Proc.*, (2), t. **23**, 1924, p. 56 et t. **25**, 1926, p. 53.
[*15*] C. Flammer, *Spheroidal Wave functions* (Stanford Univ. Press, 1957).
[*16*] P. Maroni, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **264** *A*, 1967, p. 503.
[*17*] P. Maroni, Communication privée (juillet 1967).
Pham Ngoc Dinh, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **266** A, 1968, p. 283 et 342; Thèse Doctorat Spécialité, Paris, 7 juin 1968.
[*18*] V. de Alfaro, M. Fiamberti, E. Predazzi et C. Rossetti, *Nuov. Cim.*, t. **29**, 1963, p. 1367.
[*19*] R. M. Spector, *Nuov. Cim.*, t. **45** *A*, 1966, p. 924.

[20] R. M. Spector, *J. Math. Phys.*, t. **8**, 1967, p. 2357.
[21] R. Vasudevan, K. Venkatesan et G. Jagannathan, *Suppl. Nuov. Cim.*, t. **5**, 1967, p. 621.
[22] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equation*, ch. 20 (Dover, N. Y., 1956).
[23] Référence [22], p. 132.
[24] H. H. Aly et H. J. M. Müller, *J. Math. Phys.*, t. **7**, 1966, p. 1.
[25] H. H. Aly et H. J. M. Müller, *Math. Phys.*, t. **8**, 1967, p. 367.
[26] C. A. Coulson et A. Joseph, *Proc. Phys. Soc.*, t. **90**, 1967, p. 887.

Manuscrit reçu le 28 octobre 1968.