ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ELIANE BLANCHETON

Étude de la stabilité d'un système dynamique stationnaire par la méthode de Lyapounov

Annales de l'I. H. P., section A, tome 11, nº 1 (1969), p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1969__11_1_1_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XI, n° 1, 1969, p. 1-18.

Section A :
Physique théorique.

Étude de la stabilité d'un système dynamique stationnaire par la méthode de Lyapounov

par

Mme Eliane BLANCHETON
Professeur à la Faculté des Sciences de Caen

SOMMAIRE. — Nous définissons les points d'équilibre d'un système dynamique stationnaire dans un espace topologique régulier. Une généralisation de la deuxième méthode de Lyapounov nous donne des critères de stabilité de l'équilibre.

ABSTRACT. — We shall define equilibrium states of a stationnary dynamical system in a normal topological space. A generalisation of the second method of Lyapounov will get several criterion for the stability of the equilibrium.

I. — DÉFINITIONS GÉNÉRALES

Soit E un espace topologique. Nous supposerons E régulier. Nous supposerons de plus que E satisfait à l'axiome de séparation suivant : étant donné deux ensembles fermés F_1 et F_2 sans points communs, il existe deux ouverts U_1 et U_2, contenant respectivement F_1 et F_2, sans points communs.

Ce travail a été réalisé en liaison avec l'Institut de Recherches en Informatique et Automatique (Département d'Automatique et d'Informatique Économique).

DÉFINITION. — Nous appellerons *système dynamique stationnaire* dans E admettant le point x_0 de E comme point d'équilibre la donnée

1. d'une application θ de E dans $]0, +\infty]$,

2. d'une application $(t, x) \to q(t, x)$ définie pour $x \in \mathrm{E}$, $t \in [0, \theta(x)[$, à valeurs dans E. L'application $t \to q(t, x)$ est supposée continue sur R^+, l'application $x \to q(t, x)$ continue en x_0 pour tout $t \in \mathrm{R}^+$.

Les applications θ et q sont supposées vérifier les conditions suivantes :

DS 1. Pour tout $x \in \mathrm{E}$ et $t \in [0, \theta(x)[$, on a

$$\theta(q(t, x)) = \theta(x) - t.$$

DS 2. $q(0, x) = x$ pour tout x de E.

DS 3. Pour tout x de E, $t_1, t_2 \geqslant 0$ et $t_1 + t_2 < \theta(x)$, on a

$$q(t_1 + t_2, x) = q(t_1, q(t_2, x)).$$

DS 4. Il existe un voisinage V_0 de x_0 tel que

$$\{ x \in \mathrm{V}_0 \quad \text{et} \quad \theta(x) < +\infty \} \Rightarrow \{ \forall \mathrm{T} < \theta(x), \exists t \in [\mathrm{T}, \theta(x)[$$

tel que $q(t, x) \notin \mathrm{V}_0$ $\}$.

DS 5. On a

$$q(t, x_0) = x_0 \qquad \text{pour tout} \qquad t \in [0, \theta(x_0)[.$$

Remarque. — DS 4 et DS 5 impliquent $\theta(x_0) = +\infty$.

DÉFINITION. — On dit que x_0 est point d'équilibre stable si, pour tout voisinage V de x_0, il existe un voisinage W de x_0 tel que

$$x \in \mathrm{W} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant t < \theta(x) \Rightarrow q(t, x) \in \mathrm{V}.$$

Remarque. — D'après DS 4, si $\mathrm{V} \subset \mathrm{V}_0$, on a

$$x \in \mathrm{W} \Rightarrow \theta(x) = +\infty.$$

DÉFINITION. — On appelle *domaine d'attraction de* x_0 l'ensemble Ω des points x de E tels que $q(t, x)$ tende vers x_0 lorsque t tend vers $\theta(x)$ (obligatoirement égal à $+\infty$ d'après DS 4).

DÉFINITION. — On dit que x_0 est *point d'équilibre asymptotiquement stable* si c'est un point d'équilibre stable et si le domaine d'attraction de x_0 est un voisinage de x_0.

DÉFINITION. — On dit qu'un sous-ensemble A de E est un domaine de stabilité forte si $x \in A \Rightarrow \theta(x) = +\infty$ et si, pour tout voisinage V de x_0, il existe un nombre $T \geqslant 0$ tel que

$$x \in A \qquad \text{et} \qquad t \geqslant T \Rightarrow q(t, x) \in V.$$

Autrement dit, lorsque $t \to +\infty$, $q(t, x) \to x_0$ uniformément pour $x \in A$.

On a évidemment $A \subset \Omega$.

DÉFINITION. — On dit que x_0 est point d'équilibre asymptotiquement et uniformément stable si x_0 est point d'équilibre stable et s'il existe un voisinage x_0 qui soit un domaine de stabilité forte.

Remarque. — La stabilité asymptotique et uniforme entraîne la stabilité asymptotique. La réciproque est vraie en dimension finie si q est continue.

II. — CONDITIONS DE STABILITÉ

THÉORÈME 1. — *S'il existe une fonction réelle v, définie dans un voisinage* U *de x_0, continue en x_0, et satisfaisant aux conditions suivantes :*

a) $v(x_0) = 0$,

b) *quel que soit le voisinage* U_0 *de* x_0 *strictement contenu dans* U, *on a*

$$\lambda(U_0) = \inf_x v(x) > 0 \,;$$

la borne inférieure étant prise pour tout x appartenant au complémentaire $U - U_0$ *de* U_0 *dans* U,

c) $x \in U$, $t \in [0, \theta(x)[$ *tel que* $q([0, t], x) \subset U \Rightarrow v(q(t, x)) \leqslant v(x)$, *alors* x_0 *est point d'équilibre stable.*

Démonstration. — Nous supposerons U ouvert. Soit V un voisinage fermé de x_0 contenu dans U (ce qui est possible puisque E est supposé régulier). Puisque v est continue en x_0, il existe un voisinage W de x_0 tel que

$$x \in W \Rightarrow v(x) < \lambda(V).$$

On a nécessairement $W \subset V$. On a alors, d'après *c)* :

$$x \in W,\ t \in [0, \theta(x)[\quad \text{tel que} \quad q([0, t], x) \subset U \Rightarrow v(q(t, x)) \leqslant v(x) < \lambda(V).$$

On en déduit

$$x \in \mathrm{W},\ t \in [0,\ \theta(x)[\quad \text{tel que} \quad q([0,\ t],\ x) \subset \mathrm{U} \Rightarrow q([0,\ t],\ x) \subset \mathrm{V}.$$

Soient alors $x \in \mathrm{W}$, $\mathrm{A}_x = \{\, t \in [0,\ \theta(x)[$ tels que $q([0,\ t],\ x) \subset \mathrm{U}\,\}$, et $\mathrm{T}_x = \sup \mathrm{A}_x$. Soient V_1 et V_2 deux voisinages disjoints de V et E-U respectivement. Si T_x était différent de $\theta(x)$, $q(\mathrm{T}_x,\ x)$ serait défini et appartiendrait à U ou à E-U. Si $q(\mathrm{T}_x,\ x)$ appartenait à U, $q([0,\ \mathrm{T}_x],\ x)$ serait contenu dans U et par suite, comme nous l'avons montré ci-dessus, $q([0,\ \mathrm{T}_x],\ x)$ serait contenu dans V. Il existerait, puisque $t \to q(t,\ x)$ est continue, un voisinage I de T_x tel que $q(t,\ x) \in \mathrm{V}_1 \subset \mathrm{U}$ pour tout $t \in \mathrm{I}$, ce qui contredit la définition de T_x. D'autre part, $q(\mathrm{T}_x,\ x)$ ne peut pas appartenir à E-U car dans ce cas il existerait un voisinage I_1 de T_x tel que $q(t,\ x) \in \mathrm{V}_2$ pour tout $t \in \mathrm{I}_1$. Mais, d'après la définition de T_x, il existe une valeur t_0 de t dans I_1 telle que $t_0 \in \mathrm{A}_x$, donc telle que $q([0,\ t_0],\ x) \subset \mathrm{U}$. Mais alors, comme nous l'avons vu plus haut, on a $q(t_0,\ x) \in \mathrm{V}$. On aurait donc à la fois $q(t_0,\ x) \in \mathrm{V}$ et $q(t_0,\ x) \in \mathrm{V}_2$, ce qui n'est pas possible.

On a donc

$$\mathrm{T}_x = \theta(x).$$

Nous avons démontré que

$$x \in \mathrm{W},\ t \in [0,\ \theta(x)[\ \Rightarrow\ q(t,\ x) \in \mathrm{V},$$

c'est-à-dire que x_0 est point d'équilibre stable.

THÉORÈME 2. — *Soit x_0 un point d'équilibre stable, et soit* U *l'ensemble des points $x \in \mathrm{E}$ tels que $\theta(x) = +\infty$. S'il existe une application f de* U *dans* R^+, *continue en x_0, telle que $f(x_0) = 0$ et telle que, quel que soit le voisinage U_0 de x_0 strictement contenu dans* U *on ait* $\inf\limits_{x \in \mathrm{U}-\mathrm{U}_0} f(x) > 0$, *alors il existe une application v de* U *dans* $[0,\ +\infty]$, *continue en x_0 et satisfaisant aux conditions* a), b) *et* c) *du théorème 1.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que U est un voisinage de x_0. En effet, par définition de la stabilité, il existe un voisinage U_1 de x_0 tel que

$$x \in \mathrm{U}_1,\ t \in [0,\ \theta(x)[\ \Rightarrow\ q(t,\ x) \in \mathrm{V}_0 \text{ (notation de DS 4).}$$

On a dans ce cas $\theta(x) = +\infty$, donc $\mathrm{U}_1 \subset \mathrm{U}$.

Montrons que la fonction v définie, pour $x \in \mathrm{U}$, par

$$v(x) = \sup_{t \geqslant 0} f(q(t,\ x))$$

satisfait aux conditions *a)*, *b)* et *c)* du théorème 1.

a) $v(x_0) = 0$ d'après DS 5, et puisque $f(x_0) = 0$.

Puisque f est continue en x_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V_1 de x_0, $V_1 \subset U$, tel que $x \in V_1 \Rightarrow f(x) \leqslant \varepsilon$. Puisque l'équilibre est stable, il existe un voisinage W_1 de x_0 tel que

$$x \in W_1 \quad \text{et} \quad t \in [0, +\infty[\Rightarrow q(t, x) \in V_1.$$

On en déduit que

$$x \in W_1 \quad \text{et} \quad t \in [0, +\infty[\Rightarrow f(q(t, x)) \leqslant \varepsilon,$$

donc aussi que

$$x \in W_1 \Rightarrow v(x) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui démontre la continuité de v en x_0.

b) Soit U_0 un voisinage quelconque de x_0 contenu dans U. On a, d'après la définition de v,

$$v(x) \geqslant f(q(0, x)) = f(x).$$

Par passage aux bornes inférieures, lorsque x décrit $U - U_0$, il vient

$$\inf_x v(x) \geqslant \inf_x f(x)$$

Les hypothèses faites sur f entraînent la propriété *b)*.

c) Si $x \in U$, $q(t, x) \in U$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ en raison de DS 3, et on a

$$\begin{aligned} v(q(t, x)) &= \sup_{t' \geqslant 0} f(q(t', q(t, x))) = \sup_{t' \geqslant 0} f(q(t' + t, x)) \\ &= \sup_{\tau \geqslant t} f(q(\tau, x)). \end{aligned}$$

On a donc bien

$$v(q(t, x)) \leqslant v(x)$$

pour tout $t \geqslant 0$.

Remarque. — L'ensemble U′ des points $x \in U$ tels que $v(x) < +\infty$ est un voisinage de x_0 en raison de la continuité de v en x_0, et on a

$$x \in U' \quad \text{et} \quad t \geqslant 0 \Rightarrow q(t, x) \in U'$$

d'après l'axiome DS 3.

III. — CONDITIONS DE STABILITÉ ASYMPTOTIQUE

THÉORÈME 3. — *S'il existe une fonction réelle v, définie dans un voisinage* U *de x_0, continue en x_0 et satisfaisant aux conditions suivantes :*

a) $v(x_0) = 0$,

b) *quel que soit le voisinage* U_0 *de x_0 strictement contenu dans* U, *on a*

$$\lambda(U_0) = \inf_{x \in U - U_0} v(x) > 0,$$

c) $x \in U$ *et* $t \in [0, \theta(x)[$ *tel que* $q([0, t], x) \subset U \Rightarrow v(q(t, x)) \leqslant v(x)$,

d) *pour tout* $x \in U$, $v(q(t, x))$ *tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, alors l'équilibre est asymptotiquement stable.*

Démonstration. — Notons d'abord que l'équilibre est stable. Soit V un voisinage de x_0. Nous supposerons $V \subset U \cap V_0$ (notation de DS 4). Il existe un voisinage W de x_0 tel que

$$x \in W \quad \text{et} \quad t \in [0, \theta(x)[\;\Rightarrow\; q(t, x) \in V.$$

On voit, en faisant $t = 0$, que $x \in W \Rightarrow x \in V$, donc que $W \subset V$, et $\theta(x) = +\infty$. Nous allons démontrer que W est contenu dans le domaine d'attraction Ω de x_0, c'est-à-dire que, $\forall x \in W$, $q(t, x) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

Soit V_1 un voisinage arbitraire de x_0; nous supposons $V_1 \subset W$. On a

$$\lambda(V_1) = \inf_{x \in U - V_1} v(x) > 0.$$

Puisque $v(q(t, x)) \to 0$ quand $t \to +\infty$, $\exists T_x \geqslant 0$ tel que

$$t \geqslant T_x \Rightarrow v(q(t, x)) < \lambda(V_1).$$

On en déduit que

$$t \geqslant T_x \Rightarrow q(t, x) \in V_1 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

THÉORÈME 4. — *Supposons l'équilibre asymptotiquement stable et désignons par* U *l'ensemble des points x de* E *tels que $\theta(x) = +\infty$. S'il existe une fonction f :* $U \to R^+$, *continue en x_0 telle que $f(x_0) = 0$ et* $\inf_{x \in U - U_0} f(x) > 0$ *pour tout voisinage* U_0 *de x_0 strictement contenu dans* U, *alors il existe une fonction positive v, définie dans* U, *continue en x_0, et satisfaisant aux conditions* a), b), c) *et* d), *cette dernière étant vérifiée pour tout x appartenant au domaine d'attraction* Ω.

Démonstration. — Les hypothèses du théorème 2 étant vérifiées, nous savons que la fonction v définie par

$$v(x) = \sup_{t \geqslant 0} f(q(t, x))$$

satisfait aux conditions *a), b)* et *c).* Il reste à montrer que, si l'équilibre est asymptotiquement stable, *d)* est vérifiée lorsque x est choisi dans le domaine d'attraction Ω. Par définition du domaine d'attraction, si $x \in \Omega$, quel que soit le voisinage V_1 de x_0, il existe $T_x \geqslant 0$ tel que $t \geqslant T_x \Rightarrow q(t, x) \in V_1$. Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, $V_1 = \bar{f}^1([0, \varepsilon])$ est un voisinage de x_0 dans U. Il existe donc T_x tel que

$$t \geqslant T_x \Rightarrow q(t, x) \in \bar{f}^1([0, \varepsilon[) \Leftrightarrow f(q(t, x)) < \varepsilon.$$

De

$$v(q(t, x)) = \sup_{\tau \geqslant 0} f(q(\tau, q(t, x))) = \sup_{\tau \geqslant t} f(q(\tau, x)),$$

on déduit

$$t \geqslant T_x \Rightarrow v(q(t, x)) \leqslant \varepsilon.$$

IV. — CONDITIONS DE STABILITÉ ASYMPTOTIQUE UNIFORME

THÉORÈME 5. —*Les hypothèses sont celles du théorème 3. Soit* A *un ensemble contenu dans* U *tel que*

e) $\forall x \in A$, $\theta(x) = +\infty$,
f) $x \in A$ *et* $t \in [0, +\infty[\Rightarrow q(t, x) \in U$,
g) $v(q(t, x)) \to 0$ *quand* $t \to +\infty$ *uniformément pour* $x \in A$.
Alors A *est un domaine de stabilité forte.*

Démonstration. — Soit V_1 un voisinage arbitraire de x_0 strictement contenu dans U. L'hypothèse *g)* implique qu'il existe $T \geqslant 0$ tel que

$$t \geqslant T \quad \text{et} \quad x \in A \Rightarrow v(q(t, x)) < \lambda(V_1).$$

Donc

$$t \geqslant T \quad \text{et} \quad x \in A \Rightarrow q(t, x) \in V_1.$$

THÉORÈME 6. —*Les hypothèses sont celles du théorème 4. Soit* A *un domaine de stabilité forte; alors* $v(q(t, x)) \to 0$ *lorsque* $t \to +\infty$ *uniformément pour* $x \in A$.

Démonstration. — Par hypothèse, quel que soit le voisinage V_1 de x_0, il existe $T \geqslant 0$ tel que

$$t \geqslant T \quad \text{et} \quad x \in A \Rightarrow q(t, x) \in V_1.$$

Soit $\varepsilon > 0$; on choisit $V_1 = \bar{f}^1([0, \varepsilon[)$. On montre, comme dans la démonstration du théorème 4 que

$$t \geqslant T \quad \text{et} \quad x \in A \Rightarrow v(q(t, x)) < \varepsilon.$$

THÉORÈME 7. — *S'il existe deux fonctions v et φ définies sur un voisinage* U *de x_0, à valeurs dans* R^+, *satisfaisant aux conditions suivantes :*

a) *v est continue en x_0 et $v(x_0) = 0$,*

b) *quel que soit le voisinage U_0 de x_0 strictement contenu dans* U, *on a*

$$\lambda(U_0) = \inf_{x \in U - U_0} v(x) > 0.$$

c_1) *Soit $T_x = \sup \{ t \mid q([0, t], x) \subset U \}$. L'application $t \to v(q(t, x))$ est absolument continue sur $[0, T_x[$; l'application $t \to \varphi(q(t, x))$ est intégrable sur tout compact de $[0, T_x[$ et*

$$v(q(t, x)) - v(x) = - \int_0^t \varphi(q(u, x))du \quad , \quad t \in [0, T_x[.$$

d) *Quel que soit le voisinage U_0 de x_0 strictement contenu dans* U, *on a*

$$\inf_{x \in U - U_0} \varphi(x) > 0.$$

Alors x_0 est point d'équilibre asymptotiquement et uniformément stable.

Démonstration. — Montrons d'abord que c_1*)* entraîne la propriété *c)* du théorème 1. De $-\varphi(q(t, x)) \leqslant 0$, il résulte

$$v(q(t, x)) - v(q(0, x)) \leqslant 0,$$

donc

$$v(q(t, x)) \leqslant v(x)$$

pour tout $t \in [0, T_x[$, c'est-à-dire pour tout t tel que $q([0, t], x) \subset U$.

Nous avons montré que c_1*)* entraîne *c)* et, par suite, que l'équilibre est stable.

Montrons maintenant que le domaine d'attraction Ω est voisinage de x_0.

Soit V un voisinage de x_0, $V \subset U \cap V_0$. Par définition de la stabilité, il existe un voisinage W de x_0 tel que

$$x \in W \quad \text{et} \quad t \in [0, \theta(x)[\Rightarrow q(t, x) \in V.$$

Puisque $V \subset V_0$, on a $\theta(x) = +\infty$. Il est évident que l'on a $W \subset V$. Nous allons démontrer que $W \subset \Omega$, c'est-à-dire que, $\forall x \in W$, $q(t, x) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

Soit V_1 un voisinage arbitraire de x_0 ; nous supposerons $V_1 \subset W$. Nous voulons démontrer que, pour tout $x \in W$, il existe T_x tel que

$$t \geqslant T_x \Rightarrow q(t, x) \in V_1.$$

Puisque l'équilibre est stable, il existe un voisinage W_1 de x_0 tel que

$$x \in W_1 \quad \text{et} \quad t \geqslant 0 \Rightarrow q(t, x) \in V_1.$$

On a $W_1 \subset V_1$. Si $x \in W_1$, on peut choisir $T_x = 0$. Il nous suffit donc d'étudier ce qui se passe lorsque $x \in W - W_1$. Remarquons que, s'il existait une valeur T_x de t telle que $q(T_x, x) \in W_1$, alors $q(t, q(T_x, x)) \in V_1$ pour tout $t \geqslant 0$, ou encore, d'après DS 3, $q(t, x) \in V_1$ pour tout $t \geqslant T_x$, ce qui démontrerait le théorème.

Raisonnant par l'absurde, nous supposerons que, $\forall t \in [0, +\infty[$, $q(t, x) \notin W_1$. Posons

$$\mu = \inf_{y \in U - W_1} \varphi(y) > 0.$$

On a

$$v(q(t, x)) - v(x) \leqslant -\mu t.$$

Pour $t \geqslant \dfrac{v(x)}{\mu}$, $v(q(t, x))$ serait négatif, ce qui contredit l'hypothèse que v est à valeurs dans R^+.

Démontrons enfin que W est un domaine de stabilité forte, c'est-à-dire qu'il existe T tel que $t \geqslant T$ et $x \in W \Rightarrow q(t, x) \in V_1$.

Définissons T'_x par

$$T'_x = 0 \qquad \text{si} \qquad x \in W_1,$$

$$T'_x = \inf \{ t \mid q(t, x) \in W_1 \} \qquad \text{si} \qquad x \notin W_1.$$

On peut, sans perte de généralité, supposer W_1 fermé. Si $x \notin W_1$, on a $T'_x \neq 0$. Dans ce cas, pour tout $t \in [0, T'_x[$, on a

$$\mu t \leqslant v(x) - v(q(t, x)).$$

Puisque $q(t, x) \in U - W_1$ pour $t \in [0, T'_x[$, on a

$$v(q(t, x)) \geqslant \lambda(W_1) > 0,$$

donc

$$\mu t \leqslant v(x) - \lambda(W_1).$$

Puisque v est continue en x_0, pour tout $M > 0$, $\exists$ un voisinage W_0 de x_0 tel que

$$x \in W_0 \Rightarrow v(x) \leqslant M.$$

Si nous supposons $W \subset W_0$, on voit que

$$t \in [0, T'_x[\Rightarrow \mu t \leqslant M - \lambda,$$

donc

$$T'_x \leqslant \frac{M - \lambda}{\mu}.$$

Nous en déduisons que

$$x \in W \quad \text{et} \quad t > \frac{M - \lambda}{\mu} \Rightarrow q(t, x) \in V_1.$$

THÉORÈME 8. — *Soit f une fonction positive, définie et continue sur un voisinage* U *de x_0, telle que $f(x_0) = 0$. S'il existe un voisinage $A \subset U$ de x_0 qui soit un domaine de stabilité forte, il existe une fonction positive v, définie sur un voisinage* V *de x_0, et une fonction ψ continue de R^+ dans R^+, strictement croissante, telles que*

a) $v(x_0) = 0$,

c_2) $t \to v(q(t, x))$ *est différentiable et*

$$\frac{\partial}{\partial t} v(q(t, x)) = -\psi(f(q(t, x))),$$

pour tout $x \in V$ et pour tout $t > 0$.

Si tout point de E *admet un système fondamental dénombrable de voisinages, v est continue.*

Si de plus les deux conditions suivantes sont satisfaites

1° *quel que soit le voisinage U_0 de x_0 strictement contenu dans* U, *on a*

$$\inf_{x \in U - U_0} f(x) = \alpha(U_0) > 0,$$

2° *quel que soit le voisinage fermé U_1 de x_0, quel que soit le voisinage ouvert U_0 de x_0, $U_0 \supset U_1$, il existe $T_1 > 0$ tel que*

$$t \in [0, T_1[\quad \text{et} \quad x \in E - U_0 \Rightarrow q(t, x) \notin U_1,$$

alors on a aussi

$$\inf_{x \in U - U_0} v(x) > 0$$

Démonstration. — La fonction f est continue en x_0. Il existe donc un voisinage de x_0 sur lequel elle est bornée. Nous supposerons que ce voisinage est U et nous poserons

$$M = \sup_{x \in U} f(x).$$

Puisque x_0 est point d'équilibre stable, il existe un voisinage W de x_0 tel que

$$x \in W \quad \text{et} \quad t \geqslant 0 \Rightarrow q(t, x) \in A.$$

Définissons le voisinage V de x_0 par

$$V = \{ q(t, x) \quad \text{avec} \quad x \in W \quad \text{et} \quad t \geqslant 0 \}.$$

On a

$$W \subset V \subset A.$$

Si $y \in V$, il existe $x \in W$ et $\tau \geqslant 0$ tels que $y = q(\tau, x)$. Mais alors $q(t, y) = q(t + \tau, x) \in V$ pour tout $t \geqslant 0$.

Considérons alors la fonction σ_1 définie par

$$\sigma_1(t) = \sup_{\substack{t' \geqslant t \\ x \in V}} f(q(t', x)).$$

σ_1 est définie sur R^+, positive, majorée par M, décroissante. On a

$$\sigma_1(t) \geqslant f(q(t, x))$$

pour tout $x \in V$ et pour tout $t \geqslant 0$.

Montrons que $\sigma_1(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. V est contenu dans A qui est par hypothèse un domaine de stabilité forte. Donc, quel que soit le voisinage V_1 de x_0, $V_1 \subset V$, $\exists T \geqslant 0$ tel que

$$x \in V, \quad t \geqslant T \Rightarrow q(t, x) \in V_1.$$

Soit ε un nombre strictement positif arbitraire. Prenons $V_1 = \bar{f}^1([0, \varepsilon[)$ qui est bien un voisinage de x_0 puisque f est continue. On a alors

$$x \in V \quad \text{et} \quad t \geqslant T \Rightarrow f(q(t, x)) < \varepsilon \Rightarrow \sigma_1(T) \leqslant \varepsilon,$$

donc, puisque σ_1 est décroissante,

$$t \geqslant T \Rightarrow \sigma_1(t) \leqslant \varepsilon.$$

Enfin de

$$\sigma_1(t) = \sup_{\substack{t \geqslant 0 \\ x \in V}} f(q(t + \tau, x)),$$

on déduit que σ_1, borne supérieure d'une famille de fonctions continues, est s. c. i.

Soit alors $\sigma_2 : R^+ \to R^+$, strictement décroissante, telle que $\sigma_2(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$; posons

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t).$$

σ est une application de R^+ dans R^+, strictement décroissante, telle que $\sigma(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$; $\sigma(t)$ n'est nul pour aucune valeur finie de t. Nous poserons

$$\sigma(0) = r_0.$$

σ, étant strictement monotone, admet au plus une infinité dénombrable (t_i) de points de discontinuité de première espèce. On peut supposer $t_i < t_{i+1}$ pour tout i. Dans l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, σ est continue et admet une fonction réciproque définie sur $]\sigma(t_i^-), \sigma(t_i^+)[$. On désigne par τ la fonction réciproque de σ complétée, sur les segments $[\sigma(t_i^-), \sigma(t_i^+)]$ par des segments de droite, de sorte que τ soit une fonction continue de $]0, r_0]$ dans R^+. On posera aussi $\tau(0) = +\infty$: τ est ainsi définie sur $[0, r_0]$, décroissante, et

$$\tau(\sigma(t)) = t$$

pour tout $t \geqslant 0$.

On considère alors la fonction ψ définie sur $[0, r_0]$ par

$$\psi(r) = \frac{1}{r_0}\int_0^r \min\left(1, \frac{1}{[\tau(u)]^2}\right) du.$$

On peut la prolonger à $[0, +\infty[$ de façon arbitraire, par exemple en choisissant

$$\psi(r) = \psi(r_0) + a(r - r_0),$$

où a désigne une constante strictement positive, pour tout $r \geqslant r_0$. La fonction ψ est continue, strictement croissante ; sur $[0, r_0]$ on a à la fois

$$\psi(r) \leqslant \frac{r}{r_0} \leqslant 1$$

et

$$\psi(r) \leqslant \frac{r}{r_0} \sup_{u \in [0, r_0]} \frac{1}{[\tau(u)]^2} \leqslant \frac{1}{[\tau(r)]^2},$$

puisque τ est décroissante.

Pour tout $x \in V$ et $t \geqslant 0$, on a

$$f(q(t, x)) \leqslant \sigma_1(t) < \sigma(t) \leqslant \sigma(0) = r_0,$$

donc

$$\psi(f(q(t, x))) \leqslant \frac{1}{[\tau(f(q(t, x)))]^2} \leqslant \frac{1}{[\tau(\sigma(t))]^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale

$$v(x) = \int_0^{+\infty} \psi(f(q(t, x)))dt$$

est donc convergente. Si tout point de E admet une base fondamentale dénombrable de voisinages, v est continue en x_0. On a de plus

$$v(q(t, x)) = \int_0^{+\infty} \psi(f(q(u + t, x)))du = \int_t^{+\infty} \psi(f(q(u, x)))du,$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t} v(q(t, x)) = -\psi(f(q(t, x))).$$

Remarquons que cette équation entraîne, pour $t = 0$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} v(q(t, x))\right]_{t=0} = -\psi(f(x)),$$

et que, réciproquement, cette dernière équation entraîne $c_2)$ puisque

$$\frac{\partial}{\partial t} v(q(t, x)) = \left.\frac{\partial}{\partial \tau} v(q(t + \tau, x))\right]_{\tau=0} = \left.\frac{\partial}{\partial \tau} v(q(\tau, q(t, x)))\right]_{\tau=0} = -\psi(f(q(t, x))).$$

Supposons enfin les conditions 1) et 2) du théorème 8 satisfaites et soit U_0 un voisinage ouvert de x_0 strictement contenu dans V, domaine de définition de v. Soit U_1 un voisinage fermé de x_0 contenu dans U_0. Pour $x \in V - U_0$, soit $T_1 > 0$ tel que

$$t \in [0, T_1[\quad \text{et} \quad x \in V - U_0 \Rightarrow q(t, x) \notin U_1.$$

On a alors, d'après 1) et puisque ψ est strictement croissante, $t \in [0, T_1[$ et $x \in V - U_0 \Rightarrow f(q(t, x)) \geqslant \alpha(U_1) > 0 \Rightarrow \psi(f(q(t, x))) \geqslant \psi(\alpha(U_1)) > 0$. On en déduit

$$v(x) \geqslant \int_0^{T_1} \psi(\alpha(U_1))dt = T_1\psi(\alpha(U_1)) > 0$$

pour tout $x \in V - U_0$.

V. — CONDITIONS D'INSTABILITÉ

THÉORÈME 9. — *S'il existe une fonction réelle v, définie sur un voisinage* U *de* x_0, *continue en* x_0, *et une fonction réelle* φ, *définie sur* U, *telle que*

a) $v(x_0) = 0$,

b) x_0 *est point adhérent à l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des* $x \in \mathrm{U}$ *tels que* $v(x) > 0$,

c) *pour tout* $x \in \mathrm{U}$, *la fonction* $t \to \varphi(q(t, x))$ *supposée définie sur l'intervalle* $[0, \mathrm{T}_x[$, *où*

$$\mathrm{T}_x = \sup \{ t \mid \quad \textit{tels que} \quad q([0, t], x) \subset \mathrm{U} \},$$

est intégrable sur tout compact de $[0, \mathrm{T}_x[$,

d) *pour tout* $x \in \mathrm{U}$, *la fonction* $t \to v(q(t, x))$ *est absolument continue e t*

$$v(q(t, x)) - v(x) = \int_0^t \varphi(q(u, x))du,$$

e) *il existe une constante strictement positive* λ *telle que*

$$x \in \mathrm{U} \quad \textit{et} \quad v(x) \geqslant 0 \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \lambda v(x),$$

alors x_0 *est un point d'équilibre instable.*

Démonstration. — Nous devons démontrer qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que, quel que soit le voisinage W de x_0, il existe $x \in \mathrm{W}$ et $t \in [0, \theta(x)[$ tel que $q(t, x) \notin \mathrm{V}$.

Soit $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ un voisinage de x_0 dans lequel $v(x)$ est borné, ce qui est possible puisque v est continue en x_0, et contenu dans V_0 (notation de DS 4). Soit W un voisinage quelconque de x_0. D'après *b)*, il existe $x \in \mathrm{W} \cap \mathcal{E}$. Si $\theta(x) \neq +\infty$, le théorème résulte de l'axiome DS 4. Supposons donc $\theta(x) = +\infty$. Raisonnant par l'absurde, supposons que $q(t, x) \in \mathrm{V}$ pour tout $t \geqslant 0$. Puisque $v(q(0, x)) = v(x) > 0$, il existe t_0 strictement positif tel que $v(q(t, x)) > 0$ pour $t \in [0, t_0[$. Dans cet intervalle, Log $(v(q(t, x))$ est défini et est une fonction continue de t. On a alors, en tout point de $[0, t_0[$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Log} v(q(t, x)) - \operatorname{Log} v(x) = \frac{\varphi(q(t, x))}{v(q(t, x))} \geqslant \lambda.$$

Par intégration, il vient

$$\operatorname{Log} v(q(t, x)) - \operatorname{Log} v(x) \geqslant \lambda t,$$

et, passant aux exponentielles,

$$v(q(t, x)) \geqslant v(x) e^{\lambda t}.$$

Cette équation montre que $v(q(t, x)) > 0$ quel que soit $t \geqslant 0$. De plus $v(q(t, x))$ augmente indéfiniment avec t, ce qui contredit le fait que v est borné dans V.

THÉORÈME 10. — *Si x_0 est un point d'équilibre instable, il existe une fonction positive v, définie sur un voisinage* U *de x_0, bornée sur* U, *telle que $v(x_0) = 0$, telle que x_0 soit un point adhérent à l'ensemble des x de* E *avec $v(x) > 0$, et telle que l'on ait*

$$x \in \mathrm{U} \quad \textit{et} \quad t \in [0, \theta(x)[\quad \textit{avec} \quad q([0, t], x) \subset \mathrm{U} \Rightarrow v(q(t, x) \geqslant v(x)e^t.$$

Démonstration. — Puisque l'équilibre est instable, il existe un voisinage U de x_0 ayant la propriété suivante :

(P) : quel que soit le voisinage V de x_0, $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, il existe un couple (t, x), où $x \in \mathrm{V}$ et $t \in [0, \theta(x)[$, tel que $q(t, x) \notin \mathrm{U}$.

Remarquons que, si la propriété (P) est vraie pour U, elle est vraie pour tout voisinage de x_0 contenu dans U; nous pouvons donc, sans perte de généralité, supposer $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}_0$ (notation de DS 4). Soit alors $x \in \mathrm{U}$. On définit τ_x de la façon suivante :

1^er^ cas : $\forall t \in [0, \theta(x)[$, $q(t, x) \in \mathrm{U}$ (ce qui entraîne $\theta(x) = +\infty$). On pose alors $\tau_x = +\infty$.

2^e^ cas : $\exists t_x \in [0, \theta(x)[$ tel que $q(t, x) \notin \mathrm{U}$. On pose

$$\tau_x = \inf \{ t \quad \text{tels que} \quad t \in [0, \theta(x)[\quad \text{et} \quad q(t, x) \notin \mathrm{U} \}$$

On pose ensuite

$$v(x) = e^{-\tau_x}.$$

On a $v(x_0) = 0$. De $\tau_x \geqslant 0$, on déduit $v(x) \leqslant 1$. L'ensemble des x tels que $v(x) > 0$ est aussi l'ensemble des x tels que $\tau_x \neq +\infty$. Il est adhérent à x_0 puisque U possède la propriété (P). Enfin, pour tout $x \in \mathrm{U}$, pour tout $t \in [0, \theta(x)[$ avec $q([0, t], x) \subset \mathrm{U}$, on a

$$\tau_{q(t,x)} = \tau_x - t,$$

donc

$$v(q(t, x)) = v(x)e^t.$$

VI. — EXEMPLE

Les notations introduites dans ce paragraphe sont celles de Lions (*Équations différentielles opérationnelles*, 1961). Ce livre sera désigné par [*1*].

On considère deux espaces de Hilbert V et H avec $\mathrm{V} \subset \mathrm{H}$ algébriquement et topologiquement (au sens : l'injection de V dans H est continue). Si u et v sont deux éléments de V, $((u, v))$ désigne leur produit scalaire, et $\| u \| = ((u, u))^{\frac{1}{2}}$; si $f, g \in \mathrm{H}$, (f, g) désigne leur produit scalaire dans H et $|f| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$. De l'inclusion topologique, il résulte que

$$(1) \qquad | v | \leqslant k \| v \|, \qquad v \in \mathrm{V}, \qquad k = \mathrm{Cte}.$$

On supposera V dense dans H.

On désigne par $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur V, c'est-à-dire une application $u, v \to a(u, v)$ de $\mathrm{V} \times \mathrm{V}$ dans $\mathbb{C}$, qui soit linéaire en u, semi-linéaire en v, avec

$$(2) \qquad | a(u, v) | \leqslant \mathrm{C}_1 \| u \| \quad \| v \|, \qquad \mathrm{C}_1 = \mathrm{Cte}.$$

On désigne par N l'ensemble (éventuellement réduit à $\{ 0 \}$) des $u \in \mathrm{V}$ pour lesquels la forme semi-linéaire $v \to a(u, v)$ est continue sur V pour la topologie induite par H. Alors, V étant dense dans H, la forme $v \to a(u, v)$ se prolonge par continuité en une forme linéaire continue sur H, donc de la forme

$$(3) \qquad a(u, v) = (\mathrm{A}u, v), \qquad \mathrm{A}u \in \mathrm{H}.$$

On définit ainsi un opérateur linéaire, en général non borné, A, de domaine $\mathrm{D(A)} = \mathrm{N}$.

Nous supposerons désormais les espaces V *et* H *séparables.*

PROBLÈME 1. — Trouver une fonction $u \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(-\infty, +\infty; \mathrm{V})$ avec les conditions

$$u \text{ est nulle (p. p.) pour } t < 0,$$

$$(4) \qquad a(u(t), v) + \frac{d}{dt}(u(t), v) = (u_0, v)\delta \qquad \forall v \in \mathrm{V},$$

où u_0 est donné dans H, δ est la masse de Dirac à l'origine, et $\frac{d}{dt}(u(t), v)$ désigne la dérivée, au sens des distributions sur $]-\infty, +\infty[$ de la fonction $t \to (u(t), v)$.

Lions démontre dans [*1*] le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — On suppose que a vérifie toutes les hypothèses précédentes ainsi que l'hypothèse suivante :

il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\mathrm{Re}\, a(v, v) \geqslant \alpha \| v \|^2$$

pour tout $v \in \mathrm{V}$.

Dans ces conditions, le problème 1 admet une solution unique

$$u \in L^2_{loc}(-\infty, +\infty; V).$$

Après modification *éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, la fonction* u *est continue de* $]0, +\infty[$ *dans* H *fort, avec* $u(0) = u_0$. *Pour tout* $T > 0$, *si on désigne par* u_T *la restriction de* u *à* $[0, T]$, *l'application* $u_0 \to u_T$ *est continue de* H *dans l'espace* $C(0, T; H)$ *des fonctions continues sur* $[0, T]$ *à valeurs dans* H, *espace muni de la topologie de la convergence uniforme. Cette solution vérifie*

$$|u(t)|^2 + 2\mathrm{Re}\int_0^t a(u(s), u(s))ds = |u_0|^2,$$

et ceci quel que soit $t \in [0, +\infty[$.

Ce théorème montre que les applications $(t, u_0) \to u(t)$ et $\theta : u_0 \to \theta(u_0) = +\infty$ définissent un système dynamique stationnaire admettant l'origine pour point d'équilibre (dans H).

La fonction v vérifie par

$$v(x) = |x|^2$$

satisfait visiblement aux conditions *a), b), c)* et *d)* du théorème 7 du chapitre IV. On a ici

$$\frac{d}{dt} v(u(t)) = -2\mathrm{Re}\, a(u(t), u(t)),$$

donc

$$\varphi(x) = 2\mathrm{Re}\, a(x, x) \geqslant 2\alpha \| x \|^2 \geqslant \frac{2\alpha}{k^2} | x |^2,$$

ce qui prouve que l'origine est point d'équilibre uniformément et asymptotiquement stable.

PROBLÈME 2. — Soit W un espace de Hilbert avec $V \subset W \subset H$, toutes les inclusions étant algébriques et topologiques. On donne une forme sesquilinéaire continue sur V, dépendant de $w \in W$: $a(u, v; w)$, la dépendance en w étant non nécessairement linéaire, avec les hypothèses suivantes :

1° Pour $u, v \in L^2_{loc}(0, +\infty; V)$, $w \in L^2_{loc}(0, +\infty; W)$ la fonction $t \to a(u(t), v(t); w(t))$ est mesurable;

2° $| a(u\ v; w) | \leqslant M \| u \| \ \| v \|$ M étant une constante indépendante de w;