ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

D. TESTARD

Type des représentations quasilibres de l'algèbre de Clifford

Annales de l'I. H. P., section A, tome 12, nº 4 (1970), p. 329-341

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__12_4_329_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XII, n° 4, 1970, p. 329-341.

Section A :
Physique théorique.

Type des représentations quasilibres de l'algèbre de Clifford

par

D. TESTARD (*)

ABSTRACT. — It is shown that the type of the representation induced by a quasi-free state may be studied in certain cases, as an application of K. M. S. boundary condition for the unique evolution which agrees this state. Some results concerning the type of Powers product of states-are obtained.

INTRODUCTION

Ce travail est une contribution à l'étude mathématique de la structure des états quasilibres du champ de Fermions.

Une méthode utile pour cette étude est basée sur le fait que ces états peuvent être considérés comme états d'équilibre pour certaines évolutions [*6*], c'est-à-dire qu'ils satisfont à la condition de Kubo-Martin-Schwinger [*15*] pour ces évolutions. Nous étudions ici les implications de propriétés d'ergodicité [*8*] pour ces états.

Après une première section, où sont rappelés les faits saillants concernant l'algèbre des relations d'anticommutation, et les états quasilibres, nous étudions du point de vue de la théorie des algèbres de Von Neumann, les « états produit » au sens de Powers. Les résultats concernant les états quasilibres sont contenus dans la troisième section.

(*) *Postal Address :* Centre de Physique Théorique, C. N. R. S., 31, chemin Joseph-Aiguier, 13-Marseille (9e) (France).

1. ALGÈBRE DE CLIFFORD ET PRODUIT DE POWERS

Soit (H, s) un espace hilbertien réel de dimension finie ou infinie dénombrable muni d'un produit scalaire symétrique :

$$(\psi, \varphi) \in \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to s(\psi, \varphi) \in \mathbb{R}$$

L'algèbre de Clifford $\mathcal{A}(\mathrm{H}, s)$ (algèbre des relations d'anticommutation) construite sur (H, s) est une algèbre involutive unifère (I désigne l'unité de $\mathcal{A}(\mathrm{H}, s)$) engendrée par les éléments $\mathrm{B}(\psi)$ dépendant linéairement de ψ et qui satisfont aux relations d'anticommutation

$$[\mathrm{B}(\psi), \mathrm{B}(\varphi)]_{+} = 2s(\psi, \varphi)\mathrm{I}. \tag{1}$$

On sait qu'il n'existe qu'une norme [*1*] sur $\mathcal{A}(\mathrm{H}, s)$ telle que le complété $\overline{\mathcal{A}(\mathrm{H}, s)}$ correspondant soit une C*-algèbre. Nous désignerons par $\overline{\mathcal{A}_p(\mathrm{H}, s)}$ (resp. $\overline{\mathcal{A}_i(\mathrm{H}, s)}$) la sous *-algèbre (resp. le sous-espace vectoriel fermé) engendré par les produits d'un nombre pair (resp. impair) de $\mathrm{B}(\psi)$. Les parties paire $\overline{\mathcal{A}_p(\mathrm{H}, s)}$ et impaire $\overline{\mathcal{A}_i(\mathrm{H}, s)}$ sont supplémentaires l'une de l'autre en ce sens que

$$\overline{\mathcal{A}(\mathrm{H}, s)} = \overline{\mathcal{A}_p(\mathrm{H}, s)} \oplus \overline{\mathcal{A}_i(\mathrm{H}, s)}.$$

Une autre caractérisation de $\mathcal{A}_p(\mathrm{H}, s)$ peut également être donnée de la façon suivante : soit α l'automorphisme unique de $\overline{\mathcal{A}(\mathrm{H}, s)}$ tel que

$$\alpha(\mathrm{B}(\psi)) = \mathrm{B}(-\psi) \tag{2}$$

$\overline{\mathcal{A}_p(\mathrm{H},s)}$ est justement l'ensemble des éléments X de $\overline{\mathcal{A}(\mathrm{H}, s)}$ laissés fixes par α :

$$\alpha(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \Leftrightarrow \mathrm{X} \in \overline{\mathcal{A}_p(\mathrm{H}, s)}$$

puisque α est isométrique [*2*].

Nous nous intéresserons le plus souvent dans ce travail aux états ω de $\overline{\mathcal{A}(\mathrm{H}, s)}$ invariants par l'automorphisme α c'est-à-dire tels que $\omega \circ \alpha = \omega$. Nous les désignerons sous le nom *d'états pairs*. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un état soit pair est évidemment que

$$\omega \mid \overline{\mathcal{A}_i(\mathrm{H}, s)} = 0.$$

Soit $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ (à une équivalence unitaire près) d'espace de représentation, la représentation et le vecteur cyclique déduits de ω par la construction de Gelfand-Naimark-Segal. Si ω est pair, on sait, de plus, à l'aide du procédé habituel ([2] 2.12.11) construire un opérateur $\mathcal{U}$ de $\mathcal{H}$ tel que

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}, \pi(B(\psi))]_+ &= 0 \qquad \forall \psi \in H \\ \mathcal{U}\Omega &= \Omega \end{aligned} \tag{3}$$

$\mathcal{U}$ est unique avec ses propriétés. $\mathcal{U}$ est, de plus, unitaire et involutif. Nous ferons deux remarques utiles par la suite tout d'abord:

$$\pi(\overline{\mathcal{A}_p(H, s)})'' = \pi(\overline{\mathcal{A}(H, s)})'' \cap \{ \mathcal{U} \}' \tag{4}$$

où $\{ \mathcal{U} \}'$ est le commutant de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. D'autre part si $X \in \pi(\overline{\mathcal{A}(H, s)})''$ (resp. $\pi(\overline{\mathcal{A}(H, s)})'$), on a :

$$\mathcal{U}X\mathcal{U} \in \pi(\overline{\mathcal{A}(H, s)})'' \text{ (resp. } \pi(\overline{\mathcal{A}(H, s)})')$$

Une méthode de construction d'états de $\overline{\mathcal{A}(H, s)}$ a été proposée par Powers [3] : supposons que H puisse être composé en somme hilbertienne :

$$H = \sum_{n \in K}^{\oplus} H_n \tag{5}$$

et soit ω_n la restriction de ω à $\overline{\mathcal{A}(H_n, s)}$. ω est un état produit pour la décomposition (5) si ω_n est pair pour tout $n \in K$ sauf pour un indice au plus et si pour tout $(n, m) \in K \times K$, on a la relation :

$$\omega(XY) = \omega(X)\omega(Y) \tag{6}$$

pour tout $X \in \overline{\mathcal{A}(H_n, s)}$ et $Y \in \overline{\mathcal{A}(H_m, s)}$. Nous écrirons alors :

$$\omega = \widehat{\bigoplus_{n \in K}} \omega_n. \tag{7}$$

Cette notion est particulièrement intéressante en connexion avec la notion d'état quasilibre [3] [4] [14]. Un état quasilibre est un état pair tel que :

$$\omega\Big(\prod_{i=1}^{2n} B(\varphi_i)\Big) = \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^{i+1} (B(\varphi_i)B(\varphi_{2n}))\omega\Big(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n-1} B(\varphi_j)\Big) \tag{8}$$

(l'équivalence de cette définition avec celle qui apparaît dans [3], [4], [14] est montrée dans [*6*] (appendice)). Un état quasilibre est ainsi déterminé (et *vice versa*) par la donnée d'un opérateur A de H réel-linéaire et tel que

$$(8') \qquad \omega(B(\psi)B(\varphi)) = s(\psi, \varphi) + is(A\psi, \varphi),$$

avec les conditions :

$$(8'') \qquad A^* = -A \quad \text{et} \quad \| A \| \leqslant 1.$$

on montre alors [*4*] que tout état quasilibre est un état produit

$$(9) \qquad \omega = \omega_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \omega_2 \mathbin{\widehat{\oplus}} \omega_3$$

pour la décomposition

$$(10) \qquad H = H_1 \mathbin{\widehat{\oplus}} H_2 \mathbin{\widehat{\oplus}} H_3$$

telle que $\omega_1 = \omega \mid \overline{\mathcal{A}(H_1, s)}$ est un état de Fock et $\omega_2 = \omega \mid \overline{\mathcal{A}(H_2, s)}$ est l'état central quasilibre de $\overline{\mathcal{A}(H_2, s)}$. Il suffit de prendre :

$$(10') \qquad \begin{aligned} H_1 &= \operatorname{Ker}(A^2 + I) \\ H_2 &= \operatorname{Ker} A \\ H_3 &= H \ominus (H_1 \oplus H_2). \end{aligned}$$

Dans le cas qui nous intéresse, le plus souvent dans la suite, nous avons une décomposition (7) avec $K = \{ 1, 2 \}$. Supposons, par exemple, que ω_2 est pair; la représentation déduite de l'état $\omega_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \omega_2$ est décrite, à une équivalence unitaire près, de la façon suivante. L'espace de représentation est $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, le vecteur cyclique $\Omega_1 \otimes \Omega_2$ et l'on a :

$$\begin{aligned} \pi(B(\psi)) &= \pi_1(B(\psi)) \otimes \mathcal{U}_2 \qquad \text{si} \quad \psi \in H_1 \\ \pi(B(\psi)) &= I \otimes \pi_2(B(\psi)) \qquad \text{si} \quad \psi \in H_2 \end{aligned}$$

Bien entendu, si ω_1 est pair, $\omega_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \omega_2$ est lui-même pair puisque $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2$ est un opérateur autoadjoint, unitaire anticommutant avec $\pi(B(\psi))$ pour tout $\psi \in H$ et tel que :

$$(\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2)(\Omega_1 \otimes \Omega_2) = \Omega_1 \otimes \Omega_2.$$

Evidemment, si $X \in \overline{\pi_1(\mathcal{A}(H_1, s))}''$ commute (resp. anticommute) avec $\mathcal{U}_1$, alors, $X_1 \otimes I$ (resp. $X_1 \otimes \mathcal{U}_2$) est un élément de $\overline{\pi(\mathcal{A}(H_1, s)}''$ compte tenu de (4).

2. PRODUIT DE POWERS ET TYPE DES ALGÈBRES DE VON NEUMANN ENGENDRÉES

Avec les notations de la fin de la première section, nous nous proposons maintenant de déterminer le type de l'algèbre de von Neumann obtenue par fermeture faible de $\pi(\overline{\mathcal{A}(\mathrm{H}, s)})$ dans l'espace de la représentation obtenue à partir de l'état produit $\omega_1 \widehat{\otimes} \omega_2$. Une réponse partielle à cette question est donnée dans les propositions suivantes sous des hypothèses habituellement remplies dans les cas rencontrés en Physique.

PROPOSITION 2.1. — *Soit* $\omega_i\,(i = 1, 2)$, *deux états pairs de* $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}(\mathrm{H}_i, s)$ $(i = 1, 2)$. *Soit* E_i $(i = 1, 2)$, *deux projecteurs finis de* $\overline{\pi(\mathcal{A}_i)}''$ *et pairs c'est-à-dire tels que*

$$[\mathrm{E}_i, \mathcal{U}_i]_- = 0.$$

Alors $\mathrm{E}_1 \otimes \mathrm{E}_2$ *est un projecteur fini de* $\pi(\mathcal{A})''$.

On a tout d'abord le fait que $\mathrm{E}_1 \otimes \mathrm{E}_2 \in \pi(\mathcal{A})''$ car E_1 commute avec $\mathcal{U}_1$. Soit X_α une suite généralisée d'opérateurs de la boule unité de $(\mathrm{E}_1 \otimes \mathrm{E}_2)\,\pi(\mathcal{A})''\,(\mathrm{E}_1 \otimes \mathrm{E}_2)$ tendant fortement vers 0. Il suffira de montrer ([5] II lemma 5.2) que X_α^* tend fortement vers zéro. Nous montrerons que l'on a les convergences fortes :

$$(\mathcal{U}_1 \otimes \mathrm{I})\mathrm{X}_\alpha^*(\mathcal{U}_1 \otimes \mathrm{I}) + \mathrm{X}_\alpha^* \to 0 \tag{11}$$

$$-(\mathcal{U}_1 \otimes \mathrm{I})\mathrm{X}_\alpha^*(\mathcal{U}_1 \otimes \mathrm{I}) + \mathrm{X}_\alpha^* \to 0. \tag{11'}$$

En fait, nous avons :

$$(\mathcal{U}_1 \otimes \mathrm{I})\mathrm{X}_\alpha(\mathcal{U}_1 \otimes \mathrm{I}) + \mathrm{X}_\alpha \in (\mathrm{E}_1 \otimes \mathrm{E}_2)[\pi_1(\mathcal{A}_{1,p})'' \otimes \pi_2(\mathcal{A}_2)''](\mathrm{E}_1 \otimes \mathrm{E}_2)$$

car E_1 est pair d'où la convergence forte (11) ([5] II lemma 5.1 et III th. 4.1). De même :

$$(\mathrm{I} \otimes \mathcal{U}_2)(\mathrm{X}_\alpha - (\mathcal{U}_1 \otimes \mathrm{I})\mathrm{X}_\alpha(\mathcal{U}_1 \otimes \mathrm{I})) \in (\mathrm{E}_1 \otimes \mathrm{E}_2)[\pi_1(\mathcal{A}_1)'' \otimes \pi_2(\mathcal{A}_2)''](\mathrm{E}_1 \otimes \mathrm{E}_2)$$

car E_2 est pair. La suite généralisée

$$(\mathrm{I} \otimes \mathcal{U}_2)[\mathrm{X}_\alpha^* - (\mathcal{U}_1 \otimes \mathrm{I})\mathrm{X}_\alpha^*(\mathcal{U}_1 \otimes \mathrm{I})]$$

tend alors fortement vers zéro d'où la convergence forte (11').

Si maintenant, E_α (resp. F_β) est une suite croissante de projections de $\pi_1(\mathcal{A}_1)''$ (resp. de $\pi_2(\mathcal{A}_2)''$) et tendant fortement vers $I_{\mathcal{H}_1}$ (resp. $I_{\mathcal{H}_2}$), on peut considérer :

$$E'_\alpha = E_\alpha \vee \mathcal{U}_1 E_\alpha \mathcal{U}_1$$

$$F'_\beta = F_\beta \vee \mathcal{U}_2 F_\beta \mathcal{U}_2$$

et l'on a

$$E'_\alpha \in \pi_1(\mathcal{A}_1)'' \cap (\mathcal{U}_1)'$$

$$F'_\beta \in \pi_2(\mathcal{A}_2)'' \cap (\mathcal{U}_2)'$$

ainsi que la convergence forte de E'_α (resp. F'_β) vers $I_{\mathcal{H}_1}$ (resp. $I_{\mathcal{H}_2}$) et le fait que E'_α (resp. F'_β) soient des projecteurs finis de $\pi_1(\mathcal{A}_1)''$ (resp. de $\pi_2(\mathcal{A}_2)''$) ([5] th. 5.1 corollary). La proposition 2.1 montre alors que $(E'_\alpha \otimes F'_\beta)_{\alpha,\beta}$ est une suite de projections finies de $\pi(\mathcal{A})''$ tendant fortement vers $I_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2}$.

Nous avons aissi montré le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Si* ω_1 (resp. ω_2) *est un état pair de* $\mathcal{A}_1$ (resp. $\mathcal{A}_2$) *tel que les algèbres de von Neumann* $\overline{\pi_i(\mathcal{A}_i)''}$ *soient finies* (resp. semi-finies), *l'état* $\omega_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \omega_2$ *donne lieu à une représentation finie* (resp. semi-finie).

Réciproquement, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 2.3. — *Soit* ω_1 (resp. ω_2) *un état pair de* $\mathcal{A}_1$ (resp. $\mathcal{A}_2$). *Si* ω_2 *est de type III et si le vecteur cyclique pour la représentation déduite de* $\omega_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \omega_2$ *est aussi séparateur,* $\omega_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} \omega_2$ *est de type III.*

Définissons pour $X \in \pi(\mathcal{A})''$, l'opérateur $P(X) \in \pi_2(\mathcal{A}_2)''$ par la relation valable pour tout $\Phi, \Psi \in \mathcal{H}_2$.

$$(\Phi \mid P(X) \mid \Psi) = (\Omega_1 \otimes \Phi \mid X \mid \Omega_1 \otimes \Psi).$$

Pour montrer que $P(X) \in \pi_2(\mathcal{A}_2)''$, considérons $Q \in \pi_2(\mathcal{A}_2)'$ et vérifions que :

$$[P(X), Q]_- = 0$$

en nous plaçant dans les deux cas suivants

i) $Q = \mathcal{U}_2 Q \mathcal{U}_2$
ii) $Q = - \mathcal{U}_2 Q \mathcal{U}_2$

puisque $Q = Q_+ + Q_-$ avec $Q \pm = \frac{1}{2}(Q \pm \mathcal{U}_2 Q \mathcal{U}_2)$

Q_+ et Q_- étant dans $\pi_2(\mathcal{A}_2)'$ et satisfaisant *i)* et *ii)* respectivement

Cas i) : Si $Q \in \pi_2(\mathcal{A}_2)'$, $I \otimes Q \in \pi(\mathcal{A})'$ et

$$\begin{aligned}(\Phi \mid P(X)Q \mid \Psi) &= (\Omega_1 \otimes \Phi \mid X \mid \Omega_1 \otimes Q\Psi)\\ &= (\Omega_1 \otimes \Phi \mid X(I \otimes Q) \mid \Omega_1 \otimes \Psi)\\ &= (\Omega_1 \otimes \Phi \mid (I \otimes Q)X \mid \Omega_1 \otimes \Psi)\\ &= (\Phi \mid QP(X) \mid \Psi).\end{aligned}$$

Cas ii) : Dans ce cas, $\mathcal{U}_1 \otimes Q \in \pi(\mathcal{A})'$ et

$$\begin{aligned}(\Phi \mid P(X)Q \mid \Psi) &= (\Omega_1 \otimes \Phi \mid X \mid \Omega_1 \otimes Q\Psi)\\ &= (\Omega_1 \otimes \Phi \mid X(\mathcal{U}_1 \otimes Q) \mid \Omega_1 \otimes \Psi)\end{aligned}$$

car $\mathcal{U}_1\Omega_1 = \Omega_1$

$$\begin{aligned}&= (\Omega_1 \otimes \Phi \mid (\mathcal{U}_1 \otimes Q)X \mid \Omega_1 \otimes \Psi)\\ &= (\Phi \mid QP(X) \mid \Psi).\end{aligned}$$

Nous donnons ensuite quelques propriétés de P.

LEMME 2.4.

i) P *est une application linéaire de* $\pi(\mathcal{A})''$ *dans* $\pi_2(\mathcal{A}_2)''$
ii) $P(I \otimes I) = I$
iii) $P(X) \geqslant 0$ *pour* $X \geqslant 0$
iv) $P(XYZ) = X(I \otimes P(Y))Z$, *si* $X, Z \in I \otimes \pi_2(\mathcal{A}_2)'' \subset \pi(\mathcal{A})''$
v) $\| P(X) \| \leqslant \| X \|$
vi) $P(X)^*P(X) \leqslant P(X^*X)$
vii) P *est fortement et faiblement continue*
viii) $P(X^*X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Les propriétés *i)* à *iv)* sont évidentes ainsi que la continuité faible de P; *viii)* est simplement le fait que $\Omega_1 \otimes \Omega_2$ est séparateur. Prouvons *vi)*; si $\psi \in \mathcal{H}_2$, on a :

$$\begin{aligned}(\Psi \mid P(X^*X) \mid \Psi) &= (\Omega_1 \otimes \Psi \mid X^*X \mid \Omega_1 \otimes \Psi)\\ &\geqslant \sum_{\alpha \in K} (\Omega_1 \otimes \Psi \mid X^* \mid \Omega_1 \otimes \Phi_\alpha)(\Omega_1 \otimes \Phi_\alpha \mid X \mid \Omega_1 \otimes \Psi)\end{aligned}$$

où $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in K}$ est un base orthonormée de $\mathcal{H}_2$.

$$\begin{aligned}&= \sum_{\alpha \in K} (\Psi \mid P(X)^* \mid \Phi_\alpha)(\Phi_\alpha \mid P(X) \mid \Psi)\\ &= (\Psi \mid P(X)^*P(X) \mid \Psi)\end{aligned}$$

v) et la continuité forte de P sont maintenant évidentes car :

$$\begin{aligned}\| \mathrm{P}(\mathrm{X})\Psi \|^2 &= (\Psi \mid \mathrm{P}(\mathrm{X})^*\mathrm{P}(\mathrm{X}) \mid \Psi) \leqslant (\Psi \mid \mathrm{P}(\mathrm{X}^*\mathrm{X}) \mid \Psi) \\ &= (\Omega_1 \otimes \Psi \mid \mathrm{X}^*\mathrm{X} \mid \Omega_1 \otimes \Psi) = \| \mathrm{X}(\Omega_1 \otimes \Psi) \|^2 \\ &\leqslant \| \mathrm{X} \|^2 \| \Omega_1 \otimes \Psi \|^2 = \| \mathrm{X} \|^2 \| \Psi \|^2.\end{aligned}$$

Venons-en à la démonstration du théorème 2.3 (C'est une adaptation de la démonstration de Sakai ([*5*] th. 4.4) dans le cas du produit tensoriel habituel).

Soit Z un projecteur central de $\pi(\mathcal{A})''$ tel que $\pi(\mathcal{A})''\mathrm{Z}$ soit semi-finie et soit E un projecteur fini non nul de $\pi(\mathcal{A})''\mathrm{Z}$. On a donc (2.4 (*viii*))

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}) \neq 0.$$

On sait alors trouver un nombre $\lambda > 0$ et un projecteur $\mathrm{F} \neq 0$ de $\mathrm{I} \otimes \pi_2(\mathcal{A}_2)''$ tels que :

$$\lambda \mathrm{F} \leqslant \mathrm{I} \otimes \mathrm{P}(\mathrm{E}).$$

Soit X_α ($\| \mathrm{X}_\alpha \| \leqslant 1$ $\mathrm{X}_\alpha \in \mathrm{F}(\mathrm{I} \otimes \pi_2(\mathcal{A}_2)'')\mathrm{F}$ une suite généralisée tendant fortement vers zéro, on a la convergence forte :

$$\mathrm{X}_\alpha \mathrm{E} \to 0$$

d'où la convergence forte de la suite ([*5*] 2 lemma 5.1)

$$\mathrm{E}\mathrm{X}_\alpha^* \to 0$$

et par suite (*vi* et *iv*)

$$\mathrm{I} \otimes \mathrm{P}(\mathrm{E}\mathrm{X}_\alpha^*) = (\mathrm{I} \otimes \mathrm{P}(\mathrm{E}))\mathrm{X}_\alpha^* \to 0 \text{ (fortement)}$$

d'où :

$$\mathrm{X}_\alpha^* = [\mathrm{F}(\mathrm{I} \otimes \mathrm{P}(\mathrm{E}))\mathrm{F} + (\mathrm{I} - \mathrm{F})]^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{I} \otimes \mathrm{P}(\mathrm{E}))\mathrm{X}_\alpha^*$$

tend fortement vers zéro. L'involution $\mathrm{X} \to \mathrm{X}^*$ étant continu sur les ensembles bornés de $\mathrm{F}(\mathrm{I} \otimes \pi_2(\mathcal{A}_2)'')\mathrm{F}$, F est un projecteur fini de $\mathrm{I} \otimes \pi_2(\mathcal{A}_2)''$ qui n'est donc pas de type III. Nous avons abouti à une contradiction et le théorème 2.3 est démontré.

Rappelons pour mémoire le résultat suivant [*4*].

PROPOSITION 2.5. — *Soit* ω_1 (resp. ω_2) *un état pair de* $\mathcal{A}_1$ (resp. $\mathcal{A}_2$). *Si* ω_1 *est pur, l'algèbre de von Neumann engendrée par la représentation* $\omega_1 \widehat{\otimes} \omega_2$ *est spatialement isomorphe au produit tensoriel des algèbres de von Neumann engendrées par les représentations déduites de* ω_1 *et* ω_2.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier les types des algèbres de von Neumann engendrées par les représentations déduites des états quasilibres et ce sera l'objet de la section suivante.

3. TYPE DES REPRÉSENTATIONS QUASILIBRES DE L'ALGÈBRE DES C. A. R.

Dans toute cette section H est de cette dimension infinie, A désigne un opérateur de H satisfaisant (8″), ω_A est l'état quasilibre défini par (8′), ($\mathcal{H}_A$, π_A, Ω_A) caractérise la représentation cyclique déduite de ω_A.

La restriction de A au supplémentaire orthogonal $H_2^\perp$ de $H_2 = \text{Ker } A$ (cf. (10′)) est notée A′. La décomposition polaire de A

$$A = J\,|\,A\,|$$

fournit une structure complexe de $H_2^\perp$ définie par

$$(\alpha + i\beta) = \alpha\Psi + \beta J\Psi \qquad \Psi \in H_2^\perp \qquad \alpha, \beta \text{ réels}$$

pour laquelle A′ est un opérateur antihermitique. SpA′ désignera le spectre de A′ pour cette structure complexe.

Nous commençons par un cas particulier :

LEMMA 3.1. — *Si* $H_1 = \ker(A^2 + 1) = \{ 0 \}$, *si* $H_2 = \ker A = \{ 0 \}$ *et si* SpA′ *est continu* ω_A *est de type III.*

Soit T(t) l'unique évolution monoparticulaire pour laquelle ω_A satisfait la condition de Kubo-Martin-Schwinger pour $\beta = 1$ [*6*], ω_A est donc invariant [*6*] pour cette évolution et il existe donc un groupe d'unitaire $\mathcal{U}_A(t)$ tel que :

$$\mathcal{U}_A(t)\Omega_A = \Omega_A \qquad \text{et} \qquad \pi_A(B(T_t(\psi)) = \mathcal{U}_A(t)\pi_A(B(\psi))\mathcal{U}_A(t)^{-1}$$

Le vecteur cyclique Ω_A est aussi séparateur et puisque ω_A n'est pas une trace sur $\overline{\mathcal{A}(H, s)}$ il suffit, compte tenu de ([7] th. 2.4), de montrer que Ω_A est le seul vecteur invariant par $\mathcal{U}_A(t)$, à un multiple scalaire près. Nous montrerons le lemme plus général suivant :

LEMMA 3.2. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $[\Omega_A]$ *est le seul vecteur invariant par* $\mathcal{U}_A(t)$ *à un multiple scalaire près.*
ii) $[\Omega_A]$ *est le seul projecteur de rang fini de* $\mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ *qui commute avec* $\mathcal{U}_A(t)$.

iii) $\mathrm{Sp}A'$ *est continu.*

iv) $\mathcal{M}(\,|\,s(\mathrm{T}(t)\psi, \varphi)\,|^2) = 0 \qquad \forall \psi, \varphi \in \mathrm{H}.$

v) $\mathcal{M}(\,|\,s(\mathrm{T}(t)\psi, \varphi)\,| \qquad \forall \psi, \varphi \in \mathrm{H}$

où
$$\mathcal{M}(f(t)) = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}} f(t)dt.$$

Les propriétés *iii), iv), v)* sont évidemment équivalentes car les spectres de A′ et de T(t) sont simultanément continus, compte tenu du fait que l'application $f \to \mathcal{M}(f)$ est une forme positive de la C*-algèbre des fonctions continues et bornées sur R et, que l'on a donc :

$$\mathcal{M}(\,|f|\,)^2 \leqslant (\,|f|^2)$$
$$\mathcal{M}(|f|^2)^2 \leqslant \mathcal{M}(|f|)\mathcal{M}(|f|^3).$$

Prouvons *iv)* $\Rightarrow$ *ii)*; il suffit de voir [*8*] que :

(12)
$$\mathcal{M}(\,|\,\omega_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}(t)\mathrm{Y}) - \omega_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})\omega_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y})\,|\,) = 0$$

pour
$$\mathrm{X} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{B}(\varphi_i)$$
$$\mathrm{Y} = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{B}(\psi_i).$$

Si $n = m = 1$ ou $n = 2$ $m = 1$, la propriété (12) est évidente compte tenu de *v)* et du fait que ω_{A} est pair. Dans le cas général, nous raisonnons par récurrence; on a (8) :

$$|\,\omega(\mathrm{X}(t)\mathrm{Y}\mathrm{B}(\psi)) - \omega(\mathrm{X})\omega(\mathrm{Y}\mathrm{B}(\psi))\,|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\,\omega(\mathrm{B}(\varphi_i(t))\mathrm{B}(\psi))\,| \left|\omega\Big(\prod_{j\neq i}^{n} \mathrm{B}(\varphi_j(t))\mathrm{Y}\Big)\right|$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} |\,\omega(\mathrm{B}(\psi_i)\mathrm{B}(\psi))\,| \left|\omega\Big(\mathrm{X}(t)\prod_{j\neq i}^{m}\mathrm{B}(\psi_j)\Big) - \omega(\mathrm{X})\omega\Big(\prod_{j\neq i}^{m}\mathrm{B}(\psi_j)\Big)\right|$$

Le 1$^{\text{er}}$ terme du 2$^{\text{e}}$ membre a une moyenne nulle d'après *iv)* et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour la moyenne. Le deuxième terme a une moyenne nulle compte tenu de l'hypothèse de récurrence.

La relation (12) est alors démontrée dans tous les cas compte tenu de l'invariance de ω_A et du fait que

$$\mathcal{M}(f) = \mathcal{M}(\check{f})$$

avec

$$\check{f}(t) = f(-t).$$

Pour montrer que *i)* $\Rightarrow$ *iii)*, supposons qu'il existe ψ et a (évidemment $0 < a < 1$) tel que $\| \psi \| = 1$ et

$$A\psi = ia\psi$$

on a donc :

$$T(t)\psi = e^{i\omega_0 t}\psi = (\cos \omega_0 t + J \sin \omega_0 t)\, \psi$$

avec

$$Th \frac{\omega_0}{2} = a.$$

Dans ces conditions :

$$B(T(t)\psi)B(T(t)J\psi) = B(\psi)B(J\psi)$$

et le vecteur $\pi_A(B(\psi)B(J\psi))\Omega_A$ est invariant de norme 1, il est non proportionnel à Ω_A car :

$$\begin{aligned}(\Omega_A \mid \pi_A(B(\psi))\pi_A B(J\psi) \mid \Omega_A) &= s(\mid A \mid \psi, \psi)\\ &= a < 1.\end{aligned}$$

Le lemme 3.2 et le lemme 3.1 sont ainsi démontrés.

Nous arrivons ainsi aux principaux résultats de cette section (les notations sont celles de (10')).

THÉORÈME 3.3. — *Soit* ω_A *un état quasilibre tel que* SpA' *ne soit pas purement discret. On a alors dans la classification.*

i) si $H_2 = \{ 0 \}$ ω_A *est factoriel; plus précisément* ω_A *est*

ia) de type III si $H_3 \neq \{ 0 \}$.

ib) pur si $H_3 = \{ 0 \}$.

ii) si dim $H_2 = p < \infty$ *et si*

iia) $H_3 \neq \{ 0 \}$ ω_A *est de type III factoriel si p est pair.*

iib) $H_3 = \{ 0 \}$ ω_A *est de type* I_∞ *factoriel si p est pair.*

iii) si dim $H_2 = \infty$ ω_A *est factoriel; plus précisément si*

iiia) $H_3 \neq \{ 0 \}$ ω_A *est de type III.*

iiib) $H_3 = \{0\}$ $\dim H_1 < \infty$ ω_A *est de type* II_1.
iiic) $H_3 = \{0\}$ $\dim H_1 = \infty$ ω_A *est de type* II_∞.

Les assertions relatives à la factorialité ont été rappelées par souci de complétude et sont déjà connues depuis (9). *i)* est une conséquence immédiate des théorèmes 2.3 et lemme 3.1 puisque l'hypothèse sur le spectre de A′ montre que $\dim H_3 = \infty$; de même pour les cas *iia)* et *iiia)*.

Pour le cas *iib)* $H_3 = \{0\}$ alors $\dim H_1 = \infty$, le fait que $\overline{\mathcal{A}(H, s)}$ soit de dimension finie si H est lui-même de dimension finie permet de conclure. De même pour les cas *iiib)*, compte tenu de la proposition 2.5 et du fait, bien connu, que l'état central est de type II_1 si $\dim H = \infty$. Le cas *iiic)* se traite de la même façon.

Une autre classification peut être donnée qui fait appel à la notion d'espace propre de A. Un sous-espace E de H est dit espace propre de A si $E \neq \{0\}$ et si $E = H_2$ ou bien si E est sous-espace propre de A′. Dans ce dernier cas E est un sous-espace vectoriel complexe de $H_2^{\frac{1}{2}}$ pour la structure complexe précédemment donnée sur cet espace. Nous avons alors le :

THÉORÈME 3.4. — *Si les espaces propres de* A *sont de dimension infinie,* ω_A *est factoriel et on a :*

i) si $H_3 = H_2 = \{0\}$ ω_A *est pur.*
ii) si $H_1 = H_3 = \{0\}$ ω_A *est de type* II_1.
iii) si $H_3 = \{0\}$, $H_1H_2 \neq \{0\}$ ω_A *est de type* II_∞.
iv) si $H_3 \neq \{0\}$ ω_A *est de type III.*

La seule difficulté vient du cas $H_3 \neq \{0\}$ et SpA' purement discret. Il suffit donc (th. 2.3) de discuter le cas où $A = \lambda J$ avec $0 < \lambda < 1$ et où J est une complexification particulière de H et de montrer que ω_A est de type III. Le résultat est bien connu [*10*], [*11*], [*12*].

Le théorème 3.4 se présente comme une généralisation du th. 2.3.11 de [*4*]. Il sera, en effet applicable dans la situation suivante :

H est un espace de Hilbert complexe, pour le produit scalaire

$$(\psi, \varphi) \to (\psi \mid \varphi)$$

avec
$$s(\psi, \varphi) = \mathrm{Re}(\psi \mid \varphi),$$

G un groupe topologique, $\mathcal{U}$ une représentation unitaire faiblement continue telle que la moyenne de Godement [*13*] de la fonction $g \to |(\psi, \mathcal{U}(g)\varphi)|^2$ soit nulle. On suppose que ω_A est invariant par le groupe d'automorphisme défini par :

$$\alpha_g(B(\psi)) = B(\mathcal{U}(g)\psi).$$

Il suffit d'adapter la démonstration de la proposition 2.3.6 de [*4*].
En particulier :

THÉORÈME 3.5. — *Si* $H = L^2(R^\nu)$ *et si* ω_A *est invariant par un sous-groupe de* R^ν *(non réduit à* $\{ 0 \}$*) agissant selon :*

$$\alpha_a(B(\psi)) = B(\psi_a)$$
$$\psi_a(x) = \psi(x - a)$$

La classification du théorème 3.4 *est valable.*

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ici M. le Professeur D. KASTLER pour son aide fructueuse pendant la réalisation de ce travail. Je remercie également F. ROCCA, M. SIRUGUE et M. WINNINK pour de nombreuses discussions.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] D. SHALE et W. F. STINESPRING, *Ann. Math.*, t. **80**, 1964, p. 365.
[*2*] J. DIXMIER, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris.
[*3*] R. T. POWERS, Princeton Thesis, 1967.
[*4*] J. MANUCEAU, F. ROCCA et D. TESTARD, *Commun. Math. Phys.*, t. **12**, 1969, p. 43.
[*5*] S. SAKAI, W+-Algebras (Yale University Mineographied), 1962.
[*6*] F. ROCCA, M. SIRUGUE et D. TESTARD, To appear in *Commun. Math. Phys.*
[*7*] E. STØRMER, *Commun. Math. Phys.*, t. **6**, 1967, p. 194.
[*8*] S. DOPLICHER et D. KASTLER, *Commun. Math. Phys.*, t. **7**, 1968, p. 1.
[*9*] F. ROCCA, M. SIRUGUE, D. TESTARD et M. WINNINK, *Critère de factorialité des états quasilibres de l'algèbre de Clifford* (à paraître).
[*10*] G. RIDEAU, *Commun. Math. Phys.*, t. **9**, 1968, p. 229.
[*11*] R. T. POWERS, *Ann. Math.*, t. **86**, 1967, p. 138.
[*12*] L. PUKANSKI, *Publicaciones Mathematicæ*, t. **4**, 1965, p. 135.
[*13*] GODEMENT, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **63**, 1948, p. 1.
[*14*] E. BALSLEV, J. MANUCEAU et A. VERBEURE, *Commun. Math. Phys.*, t. **8**, 1968, p. 315.
[*15*] R. HAAG, N. M. HUGENHOLTZ et M. WINNINK, *Commun. Math. Phys.*, t. **5**, 1967, p. 215.

(Manuscrit reçu le 18 novembre 1969).