

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

G. SCHIFFMANN

## Distributions centrales sur $SL(2, R)$

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 13, n° 3 (1970), p. 229-240

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1970\\_\\_13\\_3\\_229\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__13_3_229_0)

© Gauthier-Villars, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Distributions centrales sur $SL(2, \mathbb{R})$

par

G. SCHIFFMANN

Institut Henri Poincaré, Paris (\*)

On se propose de présenter les grandes étapes du calcul de la mesure de Plancherel sur  $SL(2, \mathbb{R})$ . La méthode suivie, qui fait jouer un rôle essentiel aux distributions centrales sur le groupe, a été développée par Harish-Chandra pour un groupe semi-simple arbitraire. Le lecteur intéressé par ce cas général pourra consulter notre exposé au séminaire Bourbaki (1966/7, n° 323). Pour  $SL(2, \mathbb{R})$ , on a utilisé un cours inédit de R. P. Langlands (Princeton, 1965/6).

Dans tout cet exposé, on note donc  $G$  le groupe  $SL(2, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. On appelle algèbre enveloppante de  $G$  (ou de  $\mathfrak{g}$ ) et on note  $\underline{U}$  l'algèbre des distributions de support l'origine, le produit dans cette algèbre étant le produit de convolution. On considère souvent  $\underline{U}$  comme l'algèbre des opérateurs différentiels sur  $G$ , invariants par translations à gauche (resp. à droite), en associant à tout élément  $X$  de  $\underline{U}$ , l'opérateur différentiel

$$(0) \quad f \rightarrow f * X^\vee \quad (\text{resp. } f \rightarrow X * f)$$

où  $X^\vee$  est l'image de  $X$  par l'application  $g \rightarrow g^{-1}$ .

En particulier si  $Z$  est un élément du centre  $\underline{Z}$  de  $\underline{U}$ , alors on a

$$Z * f = f * Z$$

de sorte que l'opérateur différentiel invariant à gauche associé à  $Z$  est également invariant à droite et inversement. On note  $Z_0$  l'élément de Casimir, défini à l'aide de la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  et on rappelle que  $\underline{Z} = \mathbb{C}[Z_0]$ , c'est-à-dire que *tout élément de  $\underline{Z}$  est, de façon unique, un polynôme en le Casimir  $Z_0$ .*

---

(\*) Adresse actuelle : Université de Strasbourg, Département de Mathématique, rue R. Descartes, Strasbourg.

### § 0. Quelques propriétés des représentations unitaires irréductibles de G

On choisit une fois pour toutes une mesure de Haar  $dg$  de G (on sait que G est unimodulaire). Soit  $\pi$  une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Si  $f \in L^1(G)$ , on pose

$$(1) \quad \pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg.$$

L'opérateur  $\pi(f)$  est borné et on a les propriétés suivantes :

- a)  $\pi(f * f') = \pi(f)\pi(f')$ .
- b)  $\pi(f^\sim) = \pi(f)^*$  où  $f^\sim(g) = \overline{f(g^{-1})}$ .
- c)  $\|\pi(f)\| \leq \int_G |f(g)| dg = \|f\|_1$ .

Essayons de définir  $\pi(S)$  lorsque S est une distribution sur G, à support compact. Par définition, une distribution sur G, à valeurs dans  $\mathcal{H}$ , est une application linéaire continue de l'espace  $\mathcal{D}(G)$  des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On appelle *vecteur distribution* de  $\pi$  toute distribution T sur G, à valeurs dans  $\mathcal{H}$ , telle que

$$(2) \quad T(\varepsilon_g * f) = \pi(g)T(f)$$

où  $\varepsilon_g$  est la masse + 1 au point  $g$  de G. Soit  $\tilde{\mathcal{H}}$  l'espace des vecteurs distributions de  $\pi$ . On définit une représentation  $\tilde{\pi}$  de G dans  $\tilde{\mathcal{H}}$  comme suit : si  $T \in \tilde{\mathcal{H}}$  et  $g \in G$ , alors

$$(3) \quad \tilde{\pi}(g)T : f \rightarrow T(f * \varepsilon_g)$$

autrement dit G opère par convolution à droite dans  $\tilde{\mathcal{H}}$ . D'ailleurs, la formule (3) peut encore s'écrire

$$(4) \quad \tilde{\pi}(g)T = T * \varepsilon_{g^{-1}}.$$

Mais, si  $e \in \mathcal{H}$ , on peut lui associer la distribution  $T_e$  à valeurs dans  $\mathcal{H}$ ,

$$(5) \quad T_e = \pi(g)edg$$

distribution qui est définie par la fonction  $\pi(g)e$ . On vérifie de suite que  $T_e$  satisfait à la condition (2) et que

$$(6) \quad T_{\pi(g)e} = \pi(g)T_e$$

et on voit ainsi que  $\pi$  peut s'identifier à une sous-représentation de  $\tilde{\pi}$ .

Soit  $S$  une distribution scalaire sur  $G$ , à support compact; on pose

$$(7) \quad \tilde{\pi}(S)T = T * S^\vee$$

où  $S$  est l'image de  $S$  par  $g \rightarrow g^{-1}$ . En général,  $\pi(S)$  ne stabilise pas le sous-espace  $\mathcal{H}$  de  $\tilde{\mathcal{H}}$ . On est donc conduit à définir  $\pi(S)$  comme étant un opérateur non borné: son domaine de définition est l'ensemble des  $e \in \mathcal{H}$  tels que  $\tilde{\pi}(S)T_e = T_{e'}$  pour un élément  $e'$  de  $\mathcal{H}$  et on pose évidemment  $\pi(S)e = e'$ .

Appliquons ceci à  $\underline{U}$ . Un élément  $e$  de  $\mathcal{H}$  est différentiable si l'application  $g \rightarrow \pi(g)e$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}$  est indéfiniment différentiable. Soit  $\mathcal{H}^\infty$  le sous-espace des vecteurs différentiables. On sait que  $\mathcal{H}^\infty$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .

PROPOSITION 0. — *Le sous-espace  $\mathcal{H}^\infty$  est l'intersection des domaines de définition des opérateurs  $\pi(X)$  pour  $X \in \underline{U}$ ; de plus, il est stable par chacun des  $\pi(X)$ .*

On a ainsi construit, à partir de la représentation  $\pi$  de  $G$  dans  $\mathcal{H}$ , une représentation de  $\underline{U}$  dans  $\mathcal{H}^\infty$ . Bien entendu, tout ceci n'a rien à voir avec  $SL(2, \mathbb{R})$  et est valable pour n'importe quel groupe de Lie.

On suppose désormais que  $\pi$  est irréductible. Le premier résultat sérieux est le suivant :

THÉORÈME 0. — *Soit  $\pi$  une représentation unitaire irréductible de  $G$ . Si  $f \in \mathcal{D}(G)$ , alors l'opérateur  $\pi(f)$  est à trace et l'application  $f \rightarrow \text{Tr}(\pi(f))$  est une distribution sur  $G$ , appelée caractère de  $\pi$ .*

Dégageons quelques propriétés du caractère  $\xi_\pi$  de  $\pi$ . On a

$$(8) \quad \pi(\varepsilon_g * f * \varepsilon_{g^{-1}}) = \pi(g)\pi(f)\pi(g^{-1})$$

et par suite

$$(9) \quad \xi_\pi(\varepsilon_g * f * \varepsilon_{g^{-1}}) = \xi_\pi(f).$$

La distribution  $\xi_\pi$  est donc invariante par automorphismes intérieurs; on dit qu'elle est centrale. D'autre part, on peut prouver le lemme suivant :

LEMME 0. — *Soit  $\pi$  une représentation unitaire irréductible de  $G$  et  $Z \in \underline{Z}$ . L'opérateur  $\pi(Z)$  est partout défini et est une homothétie.*

Posons

$$(10) \quad \pi(Z) = \chi_\pi(Z)I.$$

Il est clair que  $\chi_\pi$  est un caractère de l'algèbre commutative  $\underline{Z}$ ; on l'appelle le *caractère infinitésimal* de  $\pi$ . Cela étant, pour  $f \in \mathcal{D}(\mathbf{G})$ , on a

$$(11) \quad \pi(\mathbf{Z} * f) = \chi_\pi(\mathbf{Z})\pi(f)$$

donc

$$(12) \quad \xi_\pi(\mathbf{Z} * f) = \chi_\pi(\mathbf{Z})\xi_\pi(f)$$

ou encore

$$(13) \quad \mathbf{Z}^\vee * \xi_\pi = \chi_\pi(\mathbf{Z})\xi_\pi.$$

La distribution  $\xi_\pi$  est donc distribution propre des opérateurs différentiels bi-invariants sur  $\mathbf{G}$ . Il suffit d'ailleurs d'écrire l'équation (13) pour l'opérateur de Casimir  $\mathbf{Z}_0$ . Enfin on a

$$(14) \quad \pi(f * f^\sim) = \pi(f)\pi(f)^*$$

donc

$$(15) \quad \xi_\pi(f * f^\sim) \geq 0$$

et la distribution  $\xi_\pi$  est de type positif.

En résumé, les caractères des représentations unitaires irréductibles de  $\mathbf{G}$  sont des *distributions centrales de type positif, distributions propres de l'opérateur de Casimir*.

On peut maintenant poser le problème de la formule de Plancherel. Soit  $\Omega$  l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de  $\mathbf{G}$ ; pour chaque classe  $\omega$ , choisissons un élément  $\pi_\omega$  de la classe et soit  $\mathcal{H}_\omega$  l'espace de la représentation  $\pi_\omega$ . Si  $f \in \mathcal{D}(\mathbf{G})$ , on pose

$$(16) \quad \hat{f}(\omega) = \text{Tr}(\pi_\omega(f)).$$

et on cherche à déterminer une mesure  $\mu$  sur  $\Omega$ , telle que, quelle que soit  $f$

$$(17) \quad \hat{f}(1) = \int_{\Omega} \hat{f}(\omega) d\mu(\omega).$$

Supposons qu'on sache calculer  $\mu$  et soit  $\lambda$  la représentation régulière gauche de  $\mathbf{G}$  dans  $L^2(\mathbf{G})$ :

$$(18) \quad \lambda(g)\varphi(x) = \varphi(g^{-1}x) \quad \varphi \in L^2(\mathbf{G}).$$

Sans chercher à être trop précis, on va montrer comment on peut, connaissant  $\mu$  décomposer  $\lambda$ . Si  $f \in \mathcal{D}(G)$ , alors

$$(19) \quad f * f^\sim(1) = \int_G |f(g)|^2 dg.$$

On a donc, en notant  $||| \quad |||$  la norme d'Hilbert-Schmidt

$$(20) \quad \text{Tr}(\pi_\omega(f * f^\sim)) = ||| \pi_\omega(f) |||^2$$

puis

$$(21) \quad ||f||_2^2 = \int_\Omega ||| \pi_\omega(f) |||^2 d\mu(\omega).$$

Considérons le champ d'espaces de Hilbert, de base  $(\Omega, \mu)$  et de fibre au point  $\omega$  l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}'_\omega$  des opérateurs de Hilbert-Schmidt dans  $\mathcal{H}_\omega$ . Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des sections du champ qui sont « mesurables » (il faudrait préciser...) et telles que

$$(22) \quad \int_\Omega ||| s(\omega) |||^2 d\mu(\omega) < +\infty.$$

Si on pose

$$(23) \quad (s | s') = \int_\Omega \text{Tr}(s(\omega)s'(\omega)) d\mu(\omega),$$

on munit  $\mathcal{H}$  d'une structure d'espace de Hilbert. D'après (21), l'application qui à  $f \in \mathcal{D}(G)$  associe l'élément  $\omega \rightarrow \pi_\omega(f)$  de  $\mathcal{H}$  est une isométrie du sous-espace  $\mathcal{D}(G)$  de  $L^2(G)$  dans  $\mathcal{H}$  et on peut espérer la prolonger en une isométrie de  $L^2(G)$  sur  $\mathcal{H}$ . Comme on a  $\pi_\omega(\varepsilon_g * f) = \pi_\omega(g)\pi_\omega(f)$ , on fait opérer  $G$  dans  $\mathcal{H}'_\omega$  par multiplication à gauche par  $\pi_\omega(g)$  et la représentation ainsi obtenue est factorielle de type  $\omega$ . On aura ainsi décomposé  $\lambda$  en une somme continue de représentations factorielles. Notons d'ailleurs que la construction précise et correcte est difficile à faire, même pour  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Cela étant, reprenons la formule (17); formellement, elle peut s'écrire

$$(24) \quad \varepsilon_1 = \int \xi_\omega d\mu(\omega)$$

et, pour se conformer à l'usage, on note  $\delta$  pour  $\varepsilon_1$ . On interprète la formule (24) comme une décomposition de  $\delta$  en somme continue de distributions centrales, distributions propres du Casimir. On va donc commencer par étudier l'ensemble de ces distributions.

§ 1. L'espace  $\mathcal{S}(G)$ 

L'objet de ce paragraphe est de définir l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur  $G$ .

Soit  $j$  l'application  $g \rightarrow (g^{-1})'$ ; c'est un automorphisme involutif de  $G$ . Les points fixes de  $j$  sont les matrices

$$k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices  $k(\theta)$  est un sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$ . Pour que  $j(g) = g^{-1}$ , il faut et il suffit que la matrice  $g$  soit symétrique; soit  $P$  l'ensemble des matrices symétriques de déterminant 1, ce n'est pas un sous-groupe de  $G$ . Tout élément  $g$  de  $G$  se décompose de façon unique  $g = kp$  avec  $k \in K$  et  $p \in P$ : c'est la *décomposition de Cartan*. De même, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  est somme directe de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$  de  $K$  et du sous-espace vectoriel  $\mathfrak{p}$  des matrices symétriques de trace nulle. Enfin l'exponentielle est un isomorphisme de  $\mathfrak{p}$  sur  $P$ . En particulier, du point de vue topologique (et même analytique)  $G$  est isomorphe à  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ .

Introduisons une « norme » sur  $G$ . Si

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

il opère dans  $\mathbb{R}^2$ :

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax + cy, bx + dy)$$

et on note  $\|g\|$  la norme de cet opérateur. Comme le déterminant de  $g$  est 1, l'une au moins de ses valeurs propres est de module supérieur ou égal à 1 et on en déduit que  $\|g\| \geq 1$ . La fonction qui joue le rôle de la norme sur  $G$ , n'est pas  $\|g\|$  mais la fonction

$$(25) \quad \sigma(g) = \text{Log } \|g\|.$$

Elle a les propriétés suivantes:

- a)  $\sigma(g) \geq 0$ .
- b)  $\sigma(gg') \leq \sigma(g) + \sigma(g')$ .
- c)  $\sigma(kgk') = \sigma(g)$  pour  $k, k' \in K$ .
- d) si  $a(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ , alors  $\sigma(a(t)) = |t|$ .

L'ensemble des matrices  $a(t)$  est un sous-groupe  $A_0$  de  $G$ . On a vu que

$G = KP$  et, si  $p \in P$ , alors il existe un  $k \in K$  tel que  $kpk^{-1}$  soit diagonale (toute matrice symétrique se diagonalise par un changement de base orthogonal); il en résulte que  $G = KAK$  c'est-à-dire que tout élément  $g$  de  $G$  s'écrit  $g = ka(t)k'$  pour des éléments  $k, k'$  convenables de  $K$  et un  $t \in \mathbb{R}$ . Remarquons de plus que  $t$  n'est pas déterminé de façon unique; on a en effet, si  $w = k(\pi/2)$ , la relation

$$(26) \quad wa(-t)w^{-1} = a(t)$$

d'où

$$g = ka(t)k' = kwa(-t)w^{-1}k'$$

et il n'y a d'ailleurs que ces deux possibilités pour  $t$ . Les propriétés *c*) et *d*) déterminent complètement  $\sigma$ .

Soit  $e_2$  le deuxième vecteur de base dans  $\mathbb{R}^2$ :  $e_2 = (0, 1)$ . Prenons comme norme dans  $\mathbb{R}^2$  la norme euclidienne (on l'a implicitement supposé dans la définition de  $\|g\|$ ) et posons

$$(27) \quad \Xi(g) = \int_K \|e_2kg\|^{-1}dk = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \|e_2k(\theta)g\|^{-1}d\theta.$$

La fonction  $\Xi$  est bi-invariante par  $K$ :  $\Xi(kgk') = \Xi(g)$  et de plus

$$(28) \quad \int_G \Xi^2(g)(1 + \sigma(g))^{-r}dg < +\infty \quad \text{pour } r > 3.$$

Soit  $\mathcal{S}(G)$  l'ensemble des fonctions définies sur  $G$ , à valeurs complexes, indéfiniment dérivables et telles que, quels que soient  $X, Y \in \underline{U}$  et  $r \in \mathbb{R}$ , on ait

$$(29) \quad \sup_g |\Xi^{-1}(g)(1 + \sigma(g))^r(X * f * Y)(g)| < +\infty.$$

On prend comme semi-normes sur  $G$  les expressions ci-dessus et, muni de ces semi-normes,  $\mathcal{S}(G)$  est localement convexe et complet. Sans l'introduction du facteur  $\Xi$  dans les semi-normes, les fonctions à décroissance rapide ne seraient pas de carré intégrable sur  $G$ . Avec la définition posée, elles sont de carré intégrable mais elles ne sont pas intégrables.

**THÉORÈME 1.** — 1) On a les inclusions  $\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{S}(G) \subset L^2(G)$  et ces inclusions sont continues.

2) Pour le produit de convolution,  $\mathcal{S}(G)$  est une algèbre topologique complète et les translations à gauche et à droite sont continues de  $\mathcal{S}(G)$  dans  $\mathcal{S}(G)$ .

Une distribution tempérée est une distribution qui se prolonge en une forme linéaire continue sur  $\mathcal{S}(G)$ . On notera que les fonctions constantes ne sont pas des distributions tempérées puisque  $\mathcal{S}(G) \not\subset L^1(G)$ .



## § 2. Les moyennes sur les orbites

Revenons au problème posé à la fin du paragraphe 1 : décomposer  $\delta$  en une somme continue de distributions centrales, distributions propres du Casimir. La première chose à faire est d'étudier les distributions centrales sur  $G$ .

Faisons opérer  $G$  dans lui-même par automorphismes intérieurs. On obtient une partition de  $G$  en orbites, l'orbite d'un point  $x$  étant l'ensemble des  $g x g^{-1}$  pour  $g \in G$ . Comme les valeurs propres sont constantes le long d'une orbite, il est facile de classifier ces orbites. On distingue :

- a) les orbites *hyperboliques*. Elles sont paramétrées par les points  $\pm a(t)$  avec  $t \neq 0$ ; d'après (26)  $\pm a(-t)$  appartient à l'orbite de  $\pm a(t)$ ;
- b) les orbites *elliptiques*. Elles sont paramétrées par les points de  $K$ , exceptés  $\{+1, -1\}$ ;
- c) deux orbites *singulières*, réduites à un point  $+1$  et  $-1$ ;
- d) quatre orbites *paraboliques*. Les représentants sont, par exemple

$$\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit  $\Gamma$  une orbite; supposons qu'elle porte une mesure  $d\gamma$ , invariante par  $G$ . L'application

$$f \rightarrow \int_{\Gamma} f(\gamma) d\gamma$$

est, au moins formellement, une distribution sur  $G$ , et elle est centrale. On peut espérer exprimer toute distribution centrale sur  $G$  à l'aide de ces distributions. En fait, la situation n'est simple que pour les orbites régulières, c'est-à-dire elliptiques et hyperboliques. Énonçons les résultats.

Soit  $A$  le sous-groupe ensemble des matrices  $\pm a(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Il a deux composantes connexes  $\pm A_0$  et chacune d'elles est, de façon évidente, isomorphe à  $\mathbb{R}$ . On dit qu'une fonction définie sur  $A$  est indéfiniment dérivable, à décroissance rapide si sa restriction à chaque composante connexe l'est (la décroissance rapide est prise ici au sens usuel de  $\mathbb{R}$ ).

THÉORÈME 2. — Soit  $f \in \mathcal{S}(G)$ . Posons, pour  $t \neq 0$ ,

$$(30) \quad F_f^\wedge(\varepsilon a(t)) = |e^t - e^{-t}| \int_{G/A} f(g \varepsilon a(t) g^{-1}) dg \quad \varepsilon = \pm 1.$$

- 1) Cette intégrale est absolument convergente et  $F_f^\wedge$  se prolonge en une fonction partout définie sur  $A$ , qui appartient à  $\mathcal{S}(A)$ .

- 2) L'application  $f \rightarrow F_f^\Delta$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{G})$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{A})$  est continue.  
 3)  $F_{z_0 * f}^\Delta = 1/2(d^2/dt^2 - 1)F_f^\Delta$ .  
 4)  $F_f^\Delta(\varepsilon a(t)) = F_f^\Delta(\varepsilon a(-t))$ .

On va faire quelques commentaires. Dans la formule (30) on a noté  $dg$  une mesure invariante sur l'espace homogène  $\mathbb{G}/\mathbb{A}$ . Cet espace homogène paramètre l'orbite de  $\varepsilon a(t)$  pour  $t \neq 0$ . Il suffit en effet de vérifier que le centralisateur de  $\varepsilon a(t)$  dans  $\mathbb{G}$  est  $\mathbb{A}$ , ce qui est évident. L'intégrale (30) peut donc bien s'interpréter comme la valeur moyenne de  $f$  sur une orbite hyperbolique. Le facteur  $|e^t - e^{-t}|$  est ici pour des raisons techniques. Notons simplement qu'il est nul pour  $t = 0$  alors que l'intégrale elle-même devient infinie pour  $t = 0$  puisque  $\varepsilon a(0)$  est dans le centre de  $\mathbb{G}$ . Mais  $F_f^\Delta$  qui est le produit des deux à une limite. Le point 3) est essentiel pour la suite. L'opérateur  $Z_0$  est bi-invariant donc « constant » le long des orbites. Distinguons dans  $Z_0$ , les dérivations le long de l'orbite et les dérivations transversales. Les dérivations le long de l'orbite donnent 0 quand on intègre (l'intégrale de la dérivée d'une fonction nulle à l'infini est 0) et les dérivations transversales donnent des dérivations sur  $\mathbb{A}$ , à savoir  $1/2(d^2/dt^2 - 1)$ . Enfin le point 4) est évident :  $\varepsilon a(t)$  et  $\varepsilon a(-t)$  appartiennent à la même orbite. Considérons le cas des orbites elliptiques.

THÉORÈME 3. — Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{G})$ ; pour  $\theta \neq n\pi$ , posons

$$(31) \quad F_f^K(k(\theta)) = \sin \theta \int_{\mathbb{G}/\mathbb{K}} f(gk(\theta)g^{-1})dg.$$

1. Cette intégrale est absolument convergente; considérons  $F_f^K$  comme une fonction de  $\theta$ . Elle est indéfiniment dérivable pour  $\theta \neq n\pi$ , et, sur chaque intervalle fermé  $[n\pi, (n+1)\pi]$ , elle se prolonge en une fonction indéfiniment dérivable.

2.  $F_{z_0 * f}^K = -1/2(d^2/d\theta^2 + 1)F_f^K$ .

3. Quel que soit  $k \geq 0$ , il existe une semi-norme continue  $v_k$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{G})$  telle que, quelle que soit  $f$ , on ait

$$\sup |d^k/d\theta^k F_f^K(k(\theta))| \leq v_k(f).$$

4. La fonction  $d/d\theta F_f^K(k(\theta))$  se prolonge en une fonction continue de  $\theta$  et

$$(32) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} d/d\theta F_f^K(k(\theta)) = -\pi f(1), \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi} d/d\theta F_f^K(k(\theta)) = \pi f(-1)$$

Par contre, la fonction  $F_f^K$  a des sauts aux points  $\theta = 0, \pi$ . On a

$$(33) \quad F_f^K(k(0^+)) - F_f^K(k(0^-)) = \pi/2 F_f^\Delta(1), \quad F_f^K(k(\pi^+)) - F_f^K(k(\pi^-)) = -\pi/2 F_f^\Delta(-1).$$

Par rapport au théorème précédent, la situation est donc très différente aux points  $\pm 1$ . En effet, dans le cas hyperbolique, la fonction  $F_f^A$  se prolonge en une fonction indéfiniment dérivable aux points  $\pm 1$ , tandis que, dans le cas elliptique, la fonction  $F_f^K$ , ainsi que toutes ses dérivées, a des limites « à droite et à gauche » en ces points mais les dérivées d'ordre pair ont des sauts. En particulier, la formule (32) montre que les sauts de  $F_f^K$  se calculent à l'aide de  $F_f^A$ . Enfin la formule (32) est la clef du calcul de la mesure de Plancherel.

Montrons comment ces deux théorèmes permettent de construire des distributions centrales, distributions propres du Casimir. Prenons le cas le plus simple, celui des orbites hyperboliques. Posons

$$(34) \quad \hat{F}_f^A(\varepsilon, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_f^A(\varepsilon a(t)) e^{ist} dt$$

L'application  $f \rightarrow F_f^A(\varepsilon, s)$  est une application linéaire continue de  $\mathcal{S}(G)$  dans  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire est une distribution tempérée sur  $G$ . Soit  $T$  cette distribution. Calculons  $T(Z_0 * f)$ . Comme  $F_f^A$  est indéfiniment dérivable à décroissance rapide, la troisième assertion du théorème 2 implique

$$\hat{F}_{z_0 * f}^A = -1/2(s^2 + 1)\hat{F}_f^A,$$

d'où

$$T(Z_0 * f) = -1/2(s^2 + 1)T(f).$$

La distribution  $T$  est donc centrale et distribution propre de  $Z_0$ . On peut essayer une construction analogue avec les orbites elliptiques, mais la situation se complique à cause des sauts de  $F_f^K$ . Néanmoins des constructions de ce type donnent *toutes* les distributions centrales, distributions propres de  $Z_0$ ; c'est ce qu'on va essayer d'expliquer. Le résultat difficile est le suivant :

**THÉORÈME 4.** — *Soit  $T$  une distribution centrale, distribution propre de  $Z_0$ . Il existe une fonction  $F$ , localement intégrable, telle que  $T = Fdg$ . De plus, la restriction de  $F$  à la réunion des points elliptiques et hyperboliques est une fonction analytique.*

On va déterminer les fonctions  $F$  possibles. Pour une normalisation convenable des mesures de Haar, on a

$$(35) \quad \int_G f(g)dg = 1/2 \int_{G/A \times A} f(gag^{-1})(e^t - e^{-t})^2 dgda \\ + 4 \int_{G/K \times K} f(gkg^{-1}) \sin^2 \theta dgdk.$$

Dans cette formule, on a  $a = \varepsilon a(t)$  et  $k = k(\theta)$ . La fonction  $F$  est centrale,

donc déterminée par ses restrictions à  $A$  et à  $K$  (les 6 orbites exceptionnelles sont de mesure nulle donc peu importe la valeur de  $F$  en ces points...).

Posons

$$(36) \quad \begin{aligned} \psi_A(\varepsilon a(t)) &= (e^t - e^{-t})F(\varepsilon a(t)) \\ \psi_K(k(\theta)) &= 2 \sin \theta F(k(\theta)). \end{aligned}$$

On a alors

$$T(f) = 1/2 \int_A \operatorname{sgn}(t) F_f^\Delta(a) \psi_A(a) da + 2 \int_K F_f^K(k) \psi_K(k) dk.$$

**THÉORÈME 5.** — Soit  $F$  une fonction centrale sur  $G$ , presque partout définie par les formules (36). Pour que  $F$  soit localement intégrable sur  $G$  et que la distribution  $T = Fdg$  vérifie  $Z_0 * T = 1/2(s^2 - 1)T$ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites.

a) La fonction  $\psi_K$  est indéfiniment dérivable et  $\psi_K'' = -s^2 \psi_K$  (dérivées par rapport à  $\theta$ ).

b) La fonction  $\psi_A$  est indéfiniment dérivable, sauf peut-être pour  $a = \pm 1$ . En tant que fonction de  $t$ , elle est impaire et, pour  $t \neq 0$ , on a  $\psi_A'' = s^2 \psi_A$ .

c) On a  $\psi_K'(\underline{1}) = \psi_A'(\underline{1})$  et  $\psi_K'(-\underline{1}) = \psi_A'(-\underline{1})$ .

On laisse au lecteur le soin de déterminer les couples  $(\psi_A, \psi_K)$  possibles.

### § 3. La formule de Plancherel

Il faut d'abord calculer les caractères des représentations unitaires irréductibles de  $G$ . Ici encore, nous nous contenterons d'énoncer les résultats.

Pour tout nombre complexe imaginaire pur,  $s$ , il y a deux représentations de la série principale  $\pi_s^+$  et  $\pi_s^-$  et on a, pour  $f \in \mathcal{S}(G)$

$$(37) \quad \begin{aligned} \operatorname{Tr} \pi_s^+(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} (F_f^\Delta(a(t)) + F_f^\Delta(-a(t))) dt, \\ \operatorname{Tr} \pi_s^-(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} (F_f^\Delta(a(t)) - F_f^\Delta(-a(t))) dt. \end{aligned}$$

*Remarque :* On sait que  $\pi_s^\pm$  est équivalente à  $\pi_{\pm s}$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , il y a deux représentations de la série discrète  $P_n^+$  et  $P_n^-$  soit  $P_n = P_n^+ \oplus P_n^-$ . On a, pour  $f \in \mathcal{S}(G)$ ,

$$(38) \quad \begin{aligned} \operatorname{Tr} P_n(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n|t|} (F_f^\Delta(a(t)) + (-1)^{n-1} F_f^\Delta(-a(t))) dt \\ &\quad - 2/\pi \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(n\theta) F_f^K(k(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

Pour calculer la mesure de Plancherel, partons de la formule

$$-\pi f(\underline{1}) = d/d\theta F_f^K(k(\theta))|_{\theta=0}.$$

La fonction  $d/d\theta F_f^K$  est continue ; appliquons-lui la formule de Plancherel sur le cercle :

$$-\pi f(\underline{1}) = 1/2\pi \int_{-\pi}^{+\pi} d/d\theta F_f^K(k(\theta))d\theta + \sum_{n \geq 1} 1/\pi \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n\theta) d/d\theta F_f^K(k(\theta))d\theta.$$

Intégrons par parties, en évaluant les sauts à l'aide du théorème 3 ; il vient

$$\begin{aligned} -\pi f(\underline{1}) = & -1/2(F_f^\Delta(a(0)) - F_f^\Delta(-a(0))) \\ & + \sum_{n \geq 1} \left( n/\pi \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(n\theta) F_f^K(k(\theta))d\theta + (-1)^n F_f^\Delta(-a(0)) - F_f^\Delta(a(0)) \right). \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Plancherel sur  $\mathbb{R}$ , et après quelques calculs faciles, on obtient la formule de Plancherel :

$$(39) \quad f(\underline{1}) = \sum_{n \geq 1} n/2\pi \operatorname{Tr} P_n(f) + 1/8\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x \operatorname{th}(\pi x/2) \operatorname{Tr} \pi_{ix}^+(f) dx \\ + 1/8\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x \operatorname{coth}(\pi x/2) \operatorname{Tr} \pi_{ix}^-(f) dx.$$

Cette formule est valable pour  $f \in \mathcal{S}(G)$ .

*Manuscrit reçu le 19 février 1970.*