ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE HILLION

Paramètres de Stokes et neutrino

Annales de l'I. H. P., section A, tome 13, nº 3 (1970), p. 253-261
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__13_3_253_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XIII, n° 3, 1970, p. 253-261. *Physique théorique.*

Paramètres de Stokes et neutrino

par

Pierre HILLION
Institut Henri Poincaré, Paris

RÉSUMÉ. — L'équation du neutrino est covariante sous un groupe du type Poincaré qui est la restriction réelle du groupe inhomogène complexe $SL(2)\cdot\mathbb{C}^2$. L'interprétation physique de cette covariance conduit à généraliser pour les neutrinos le formalisme des paramètres de Stokes utilisé habituellement pour la description de la polarisation du champ électromagnétique. Ce formalisme permet de distinguer deux types de neutrino et d'antineutrino et l'on prouve que l'on doit les identifier aux particules expérimentales ν_e, ν_μ et que l'on obtient une forme faible de la conservation du nombre de leptons et du nombre muonique.

1. INTRODUCTION

Cet exposé est le résumé de travaux effectués en collaboration avec le Professeur Flato [*1*] exploitant la covariance de l'équation du neutrino sous la restriction réelle du groupe inhomogène $SL(2)C^2$ prouvée antérieurement [*2*].

$\psi(x)$ étant un champ classique (première quantification) solution de l'équation aux dérivées partielles : $A(\partial)\psi(x) = 0$ où $A(\partial)$ est un opérateur différentiel, la covariance relativiste signifie que tandis que le point x de l'espace de Minkowski M se transforme sous le groupe de Poincaré $x \rightsquigarrow x' = \Lambda x + a$ le champ $\psi(x)$ se cotransforme suivant

$$\psi(x) \rightsquigarrow \psi'(x') = S(\tilde{\Lambda})\psi(x), \quad \tilde{\Lambda} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad \Lambda \in L_+^\uparrow$$

avec l'homomorphisme $SL(2, \mathbb{C}) \rightsquigarrow L_+^\uparrow$ où S est une représentation de dimension finie de SL(2, $\mathbb{C}$) de telle sorte que $A(\partial)\psi(x)=0 \rightsquigarrow A(\partial')\psi'(x')=0$ dans le nouveau système de coordonnées.

Mais on peut partir en sens inverse et chercher quelles sont les transformations les plus générales sur $\psi(x)$ qui induisent sur les x les transformations de Poincaré de telle sorte que $A(\partial)\psi(x) = 0 \rightsquigarrow A(\partial')\psi'(x') = 0$. Pour l'équation de neutrino $A(\partial) = \gamma^\mu \partial_\mu$ où les γ^μ sont les matrices de Dirac et dans la représentation de Majorana ψ se cotransforme suivant une représentation *réelle* (irréductible sur $\mathbb{R}$) équivalente à

$$D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Les transformations $\psi(x) \rightsquigarrow S(\tilde{\Lambda})\psi(x)$ sont compatibles avec la covariance relativiste parce que quand $x' = \Lambda x + a$ et $\psi'(x') = S(\tilde{\Lambda})\psi(x)$ l'équation $\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0$ devient :

$$S(\tilde{\Lambda})\gamma^\mu \partial_\mu S(\tilde{\Lambda})^{-1}\psi'(\Lambda x + a) = 0 \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

c'est-à-dire simplement $\gamma^\mu \partial'_\mu \psi'(x') = 0$. Mais de plus, l'équation du neutrino est invariante sous les « translations de champ » $\psi(x) \rightarrow \psi(x) + \theta$ où θ est un spineur réel constant de sorte qu'elle est finalement covariante sous le groupe de Lie réel $\mathscr{G} = SL(2, \mathbb{C})\cdot T_4$ produit semi-direct de SL(2, $\mathbb{C}$) par le groupe vectoriel abélien T_4 (translation dans l'espace des spineurs quadri-dimensionnels réels) et qui est défini par une représentation irréductible réelle de SL(2, $\mathbb{C}$) unitairement équivalente à

$$D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Ce groupe est *différent* du recouvrement universel du groupe de Poincaré qui est aussi un produit semi-direct de SL(2, $\mathbb{C}$) par T_4 mais défini cette fois par la représentation

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes D\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

(T_4 est alors le groupe des translations dans M).

$\mathscr{G}$ est la restriction réelle du groupe inhomogène $SL(2)\cdot\mathbb{C}^2$ à cinq paramètres complexes dont un élément peut s'écrire sous forme d'une matrice 3×3 $g = \begin{vmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ avec la loi de multiplication : ($\Lambda \in SL(2, \mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}^2$)

$$g_1 \cdot g_2 = (\Lambda_1\Lambda_2, a_1 + \Lambda_1 a_2)$$

on peut écrire un élément $g \in \mathscr{G}$ comme le couple $\{ \Lambda, \theta \}$ avec :

$$g_1 \cdot g_2 = (\Lambda_1 \Lambda_2, \theta_1 + S(\Lambda_1)\theta_2)$$

où $S(\Lambda_1)$ est l'image de Λ_1 dans la représentation réelle

$$D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Naturellement $SL(2) \cdot \mathbb{C}^2$ est le groupe de covariance de l'équation de Weyl

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0 \qquad \mu = 0, 1, 2, 3$$

où σ^i sont les matrices de Pauli, σ^0 la matrice identité 2×2 et $\psi(x)$ un spineur complexe à deux composantes, équation que l'on peut obtenir directement à partir de $\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0$ (écrite dans la représentation de Majorana).

Laissant de côté l'étude de cette covariance dans le cadre de la théorie quantique des champs, les propriétés de $\mathscr{G}$, de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(\mathscr{G})$, la détermination des représentations continues unitaires irréductibles (voir [*1*]), on passe directement à l'exposé des conséquences physiques en remarquant seulement que l'algèbre de Lie $\mathscr{L}(\mathscr{G})$ peut être considérée [*3*] comme une unification de deux algèbres $sl(2, \mathbb{C})$ avec intersection de dimension deux.

2. FORMALISME DES PARAMÈTRES DE STOKES

Nous considérons dans ce paragraphe des faisceaux de photons *complètement polarisés*. Un état pur de polarisation peut être décrit par une fonction χ qui est une superposition linéaire de deux états de polarisation :

$$\chi = C_1\chi_1 + C_2\chi_2 \qquad |C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$$

avec la matrice densité :

$$\rho = \begin{vmatrix} C_1\bar{C}_1 & C_1\bar{C}_2 \\ C_2\bar{C}_1 & C_2\bar{C}_2 \end{vmatrix}$$

où la barre désigne la conjugaison complexe.

Les paramètres de Stokes sont définis par les relations :

$$\begin{cases} P_0 = |C_1|^2 + |C_2|^2 & P_1 = |C_1|^2 - |C_2|^2 \\ P_2 = C_1\bar{C}_2 + C_2\bar{C}_1 & P_3 = i(C_2\bar{C}_1 - C_1\bar{C}_2) \end{cases} \tag{1}$$

ou en regardant C_1, C_2 comme les composantes d'un spineur φ, que l'on appellera spineur de Stokes :

$$P_\mu = \varphi^+ \sigma_\mu \varphi$$

P_0 est ici l'unité mais il est le plus souvent normalisé à la densité d'énergie du faisceau ; P_1, P_2 caractérisent la polarisation linéaire sur deux axes à 45° tandis que P_3 détermine la polarisation circulaire. On a ainsi six états fondamentaux de polarisation :

$$(P_2 = \pm P_0,\ P_1 = P_3 = 0), \quad (P_1 = \pm P_0,\ P_2 = P_3 = 0), \quad (P_3 = \pm P_0,\ P_1 = P_2 = 0)$$

Naturellement on peut utiliser les paramètres de Stokes pour un faisceau partiellement polarisé mais l'on a alors $|C_1|^2 + |C_2|^2 < 1$ et la définition de la matrice densité change en conséquence.

Comme $P_\mu P^\mu = 0$ il est intéressant de noter que les paramètres de Stokes sont une application de la boule unité dans $\mathbb{C}^2 = SL(2)\cdot\mathbb{C}^2/SL(2)$ sur le « Cône de Stokes » $(P_\mu P^\mu = 0)$.

Ce formalisme est phénoménologique et il est nécessaire de voir comment il est lié au champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$. Or depuis Cartan, on sait qu'à une onde plane électromagnétique on peut associer un vecteur complexe ξ_i $(i = 1, 2, 3)$ isotrope $(\xi_i\xi^i = 0)$

$$\xi_i = F_{i4} + \sqrt{-1}F_{jk}$$

où i, j, k est une permutation circulaire de 1, 2, 3. Par ailleurs chaque spineur $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ définit aussi un vecteur complexe isotrope ξ_i :

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \varphi_1\varphi_2 \\ \xi_2 = \dfrac{1}{2}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2) \\ \xi_3 = \dfrac{i}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \end{cases}$$

Mais φ peut être considéré comme un spineur de Stokes seulement pour un faisceau complètement polarisé parce que la condition d'isotropie sur ξ_i est équivalente à la normalisation de φ à la valeur de la densité d'énergie de l'onde plane. Dans ces conditions en utilisant (2) et (3), on relie directement les paramètres de Stokes aux composantes du champ électromagnétique, ce qui établit la connexion indispensable entre la description phénoménologique de la polarisation et les propriétés du champ électromagnétique.

Il faut maintenant chercher s'il existe un lien entre le formalisme des paramètres de Stokes et le groupe $\mathscr{G}$ (ou le groupe $SL(2)\cdot\mathbb{C}^2$). Pour cela, remarquons que le quadrivecteur densité moment énergie P'_μ peut s'écrire :

$$CP'_\mu = \frac{1}{2}\langle \dot{\varphi} \,|\, \sigma_\mu \,|\, \varphi \rangle$$

avec $\varphi = (CP'_0)^{1/4}u$, $\langle u \,|\, u \rangle = 1$ où φ est aussi le spineur des relations (3) (rappelons que l'on considère des ondes planes complètement polarisées) et l'on réalise immédiatement que si l'on désire la conservation de l'énergie avec le temps c'est-à-dire $\partial_\mu P'^\mu = 0$ une condition *suffisante* sera :

$$\sigma^\mu \partial_\mu \varphi = 0 \tag{4}$$

mais de plus on peut montrer [*1*] que pour un choix convenable du plan de polarisation, le spineur de Stokes φ satisfait *nécessairement* l'équation (4).

En d'autres termes, pour des ondes planes complètement polarisées et modulo le choix du plan de polarisation, l'équation (4) est l'équation de polarisation du photon en terme du spineur de Stokes qui lui est associé et l'on obtient le résultat important de la covariance de (4) sous le groupe $SL(2)\cdot\mathbb{C}^2$, ce qui établit la connexion cherchée entre ce groupe et le formalisme des paramètres de Stokes.

De plus il existe trois symétries discrètes K, C, KC laissant P_0 invariant :

$$K : (\varphi_1, \varphi_2) \to (\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2); \quad C : (\varphi_1, \varphi_2) \to (-\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_1);$$
$$KC : (\varphi_1, \varphi_2) \to (-\varphi_2, \varphi_1)$$

mais qui modifient la polarisation en changeant le signe de certaines des composantes P_i de sorte qu'un faisceau verticalement polarisé le devient horizontalement et qu'une polarisation circulaire droite (resp. gauche) se transforme en une polarisation circulaire gauche (resp. droite).

3. PARAMÈTRES DE STOKES ET NEUTRINO

On a montré dans l'introduction que l'équation de Weyl du neutrino

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0 \tag{5}$$

est covariante sous $SL(2)\cdot\mathbb{C}^2$ et la comparaison de (4) et (5) montre que $\psi(x)$ peut être interprété comme un spineur de Stokes, ce qui conduit à étendre au neutrino le formalisme des paramètres de Stokes avec par rapport au photon les différences fondamentales suivantes :

i) pour les neutrinos $SL(2)\cdot\mathbb{C}^2$ est le groupe de covariance de l'*équation de champ* tandis que pour les photons c'est le groupe de covariance de l'*équation de polarisation* ;

ii) en termes de paramètres de Stokes, les neutrinos sont toujours complètement polarisés, ce qui n'est pas le cas des photons.

Dans ces conditions les symétries discrètes K, C, KC permettent de définir quatre états de neutrino :

$$\mathrm{P}_\mu, \quad \mathrm{KP}_\mu, \quad \mathrm{CP}_\mu, \quad \mathrm{KCP}_\mu \tag{6}$$

Flato [*4*] a montré que KC et C sont respectivement les opérateurs parité et conjugaison de charge (non dans l'espace de Minkowski, mais induits par les transformations correspondantes dans l'espace interne constitué ici par l'espace des paramètres de Stokes $\mathbb{C}^2$) et ceci a deux conséquences importantes :

i) si ν_1, ν_2, $\tilde{\nu}_1$, $\tilde{\nu}_2$ sont les quatre types de neutrino correspondant à (6) et ψ_{ν_1}, ψ_{ν_2}, $\psi_{\tilde{\nu}_1}$, $\psi_{\tilde{\nu}_2}$ les champs associés, le symbole thilda désignant une antiparticule; $\psi(\nu_1)$, $\psi(\tilde{\nu}_1)$ sont solutions de (5) et pour $\psi(\nu_2)$, $\psi(\tilde{\nu}_2)$ on a l'équation :

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0\,;$$

ii) parce que KC est l'opérateur parité interne et qu'il ne laisse pas invariant les paramètres de Stokes, on ne peut pas avoir conservation de la parité même pour les champs libres. Cette absence de conservation tient à l'existence de deux espèces de neutrinos ν_1, ν_2 et dépend seulement de la structure du groupe $\mathrm{SL}(2)\cdot\mathbb{C}^2$ puisque l'espace des paramètres de Stokes $\mathbb{C}^2$ est la variété quotient $\mathrm{SL}(2)\cdot\mathbb{C}^2/\mathbb{C}^2$. Il y a là une différence avec le formalisme usuel où la non-conservation de la parité est introduite comme une condition supplémentaire.

Naturellement, $\mathrm{P}_\mu = \psi^+(x)\sigma_\mu\psi(x)$ est aussi le quadrivecteur densité de spin de sorte qu'il existe une solution étroite entre le spin et les paramètres de Stokes (comme dans le cas du champ électromagnétique) mais tandis que le spin est une propriété « externe » décrite dans le formalisme de l'espace-temps (groupe de Poincaré), la polarisation est une propriété « interne » correspondant au groupe $\mathrm{SL}(2)\cdot\mathbb{C}^2$.

4. LE GROUPE SL(2). $\mathbb{C}^2$ ET LES INTERACTIONS FAIBLES

Expérimentalement on connaît quatre neutrinos $(\nu_e, \tilde{\nu}_e)$ et $(\nu_\mu, \tilde{\nu}_\mu)$ respectivement associés à l'électron et au muon de sorte que la question se pose de savoir si ν_1, ν_2 peuvent être identifiées à ν_e, ν_μ.

Or si l'on examine une désintégration au repos comme $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$, on voit aisément que les lois de conservation du moment imposent au muon d'avoir son spin couché sur son moment et les interactions où tous les leptons ont leur spin colinéaire à leur impulsion ne sont pas exceptionnelles. Cette situation se rencontre par exemple chaque fois qu'un boson de spin zéro se désintègre en une paire de leptons dont un est nécessairement un neutrino et encore dans bien d'autres interactions.

Nous allons alors montrer que le formalisme des paramètres de Stokes peut s'étendre à un champ leptonique de masse non nulle dans les situations où le spin et l'impulsion sont colinéaires. En effet, l'opérateur $\gamma^\mu\partial_\mu$ de l'équation de Dirac $(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0$ commute avec l'opérateur d'hélicité $S^i p_i/|p|$, S^i spin, p_i moment $i = 1, 2, 3$, $|p| = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}$, de sorte qu'en général les solutions de l'équation de Dirac sont une combinaison linéaire des solutions de l'équation :

$$(S^i p_i - \lambda |p|)\psi'(p) = 0 \tag{7}$$

où λ est la valeur propre de l'opérateur d'hélicité.

Mais quand le spin et le moment sont colinéaires, ψ est trivialement une solution de (7) de sorte que l'on peut identifier ψ et ψ' et comme

$$S^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\gamma_j\gamma_k$$

où ε^{ijk} est le tenseur complètement antisymétrique on peut récrire (7) sous la forme :

$$(\gamma^i p_i - \gamma^5\gamma^0\lambda |p|)\psi(p) = 0$$

soit encore :

$$(\gamma^i\partial_i - \gamma^5\gamma^0\lambda |\Delta|^{1/2})\psi(x) = 0 \tag{8}$$
$$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$$

maintenant il est facile de montrer [1] que cette équation (8) est covariante sous les transformations :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(\tilde{\Lambda})\psi(x) + \theta$$

où $\tilde{\Lambda}$ est *restreint au sous-groupe maximal compact* SU(2) de SL(2, $\mathbb{C}$), c'est-à-dire (8) est covariant sous la restriction réelle du sous-groupe $SU(2)\cdot\mathbb{C}^2$ de $SL(2)\cdot\mathbb{C}^2$.

Cette covariance est suffisante pour l'extension du formalisme des paramètres de Stokes à un champ leptonique quelconque pourvu que le spin et l'impulsion soient colinéaires car l'on peut récrire (8) sous la forme (covariante sous $SU(2)\cdot\mathbb{C}^2$) :

$$(\sigma^i\partial_i - \lambda |\Delta|^{1/2})\psi_1(x) = 0$$

où $\psi_1(x)$ est un spineur complexe à deux composantes et définir les paramètres de Stokes par la relation

$$\psi_1^+ \quad \sigma_\mu \quad \psi_1$$

Ainsi comme pour les neutrinos il existe deux espèces de particules (avec leurs antiparticules correspondantes) que l'on est conduit à identifier d'un point de vue « interne » avec l'électron et le muon (et leurs antiparticules). Ici aussi il y a une étroite relation entre l'hélicité et les paramètres de Stokes de sorte que dans les situations particulières que l'on considère ici, de même que l'hélicité du neutrino détermine l'hélicité de l'électron ou du muon, de la même façon les paramètres de Stokes du neutrino caractérisent le signe des paramètres de Stokes par rapport aux opérations K, C, KC associant les leptons en couples (e, ν_e), (μ, ν_μ), ce qui permet d'identifier ν_1, ν_2 aux particules expérimentales ν_e, ν_μ.

On peut maintenant appliquer ces résultats aux interactions faibles en remarquant que K, C, KC opèrent sur les P_i (P_0 est invariant) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} K(P_1, P_2, P_3) &= (-P_1, -P_2, P_3) \\ C(P_1, P_2, P_3) &= (P_1, P_2, -P_3) \\ KC(P_1, P_2, P_3) &= (-P_1, -P_2, -P_3) \end{aligned}$$

de sorte que si l'on assigne arbitrairement le nombre 1 à la paire P_1, P_2 caractérisant la polarisation rectiligne et le nombre 1 à $-P_3$, on obtient à partir de l'état (1, 1), les trois états (1, − 1), (− 1, 1), (− 1, − 1) et l'on peut construire le tableau suivant :

États	(P_1, P_2)	P_3
ν_e, e^+	1	1
$\tilde{\nu}_e$, e^-	− 1	− 1
ν_μ, μ^+	1	− 1
$\tilde{\nu}_\mu$, μ^-	− 1	1

considérant ces nombres comme des nombres multiplicatifs internes correspondant à des parités internes respectivement leptonique et muonique, la conservation du signe de la polarisation (définie par les paramètres de Stokes) dans des interactions faibles implique :

i) la conservation de la parité leptonique,
ii) la conservation de la parité muonique

et ces deux lois ne sont autres que la conservation des nombres leptonique et muonique modulo deux, ceci en accord avec les résultats expérimentaux.

Insistons sur le fait que ces résultats sont valides dans les interactions produisant des leptons avec spin et moment colinéaires, ce qui n'explique pas que ces lois soient vraies pour des réactions telles que

$$\nu_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$$

5. CONCLUSIONS

D'un point de vue expérimental, l'extension du formalisme des paramètres de Stokes au neutrino permet de comprendre l'existence de deux espèces de ces particules et leur association dans les interactions faibles à l'électron et au muon avec la conservation modulo deux du nombre leptonique et du nombre muonique au moins dans un nombre important de désintégrations.

Il reste à l'expliquer pour toutes les interactions faibles (pour quelques suggestions dans cette voie voir [*1*]).

D'un point de vue théorique, l'intérêt primordial de ce travail est de prouver l'existence d'un espace interne introduit par la dynamique et lié aux propriétés des champs associés aux particules. Ceci suggère d'entreprendre une étude systématique des groupes de covariance des équations de champ, compatibles avec la covariance relativiste.

RÉFÉRENCES

[*1*] M. Flato et P. Hillion, *On a Poincaré group associated with neutrino physics and some applications. Phys. Rev.*, 1D, 1970, 1667.
[*2*] M. Flato, P. Hillion et D. Sternheimer, *C. R. Ac. Sc.*, **264**, 1967, 82.
[*3*] M. Flato et D. Sternheimer, *J. Math. Phys.*, **7**, 1966, 1916.
[*4*] M. Flato, *Symétries de type Lorentzien et interactions fortes*. Gauthier-Villars, 1967.

Manuscrit reçu le 19 février 1970.