ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

PIERRE-YVAN GAL

Propagation des discontinuités du tenseur dérivé du champ électromagnétique et du tenseur de courbure dans une onde électromagnétique et gravitationnelle

Annales de l'I. H. P., section A, tome 17, nº 1 (1972), p. 59-70
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__17_1_59_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVII, n° 1, 1972, p. 59-70.

Section A :
Physique théorique.

Propagation des discontinuités du tenseur dérivé du champ électromagnétique et du tenseur de courbure dans une onde électromagnétique et gravitationnelle

par

Pierre-Yvan GAL

ABSTRACT. — In the space-time of the general theory of Relativity, in vacuum, a wave may be both an electromagnetic and gravitational wave, i. e. a hypersurface S of discontinuity for both $\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}$ (covariant derivative of the electromagnetic field) and $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ (curvature tensor).

Let $f(x^\alpha) = 0$ be the equation of S and l be the gradient vector of f (a null vector). We write the above discontinuities across S

$$[\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}] = l_\alpha \varphi_{\beta\gamma} \qquad \text{and} \qquad [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}].$$

From Maxwell and Einstein's equations for an electromagnetic field in vacuum, it follows that the 2-form $\varphi_{\beta\gamma}$ and the double 2-form $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ are singular. They may be written

$$\varphi_{\beta\gamma} = l_\beta b_\gamma - l_\gamma b_\beta,$$
$$[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = l_\alpha l_\lambda b_{\beta\mu} + l_\beta l_\mu b_{\alpha\lambda} - l_\alpha l_\mu b_{\beta\lambda} - l_\beta l_\lambda b_{\alpha\mu},$$

where b_α may be changed into $b_\alpha + kl_\alpha$ and $b_{\alpha\beta}$ into $b_{\alpha\beta} + l_\alpha v_\beta + l_\beta v_\alpha$ (k is any scalar field and v_α any vector field).

We derive from Maxwell and Einstein's equations the propagation equations for b_α, $[\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}]$, $b_{\alpha\beta}$ and $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ [equations (4.12), where k is some scalar, (4.13), (5.9), where u_α is some vector, and (5.10)]. Equations equivalent to (4.13) and (5.10) were first given by Lichnerowicz [2].

As a consequence of them, with the scalars e and m issued from b_α and $b_{\alpha\beta}$ by formulae (6.2) and (6.4), we get the conservative vector $(m + \chi\, e)\, l$ (affected by the indetermination of l, but not by that of b_α and $b_{\alpha\beta}$) and the conservative tensor $(m + \chi\, e)\, l_\alpha\, l_\beta\, l_\gamma\, l_\delta$ (quite intrinsic). In an orthonormal tetrad we give (§ 6) the expression of e in terms of the electric field and of m in terms of the gravitational potentials $g_{\alpha\beta}$.

Dans l'espace-temps de la Relativité générale une onde électromagnétique est une hypersurface à la traversée de laquelle le tenseur $\nabla_\alpha \mathrm{F}_{\beta\gamma}$ dérivé du champ électromagnétique est discontinu. Dans le vide une telle hypersurface est partout tangente au cône caractéristique élémentaire.

Il en est de même pour une onde gravitationnelle, c'est-à-dire une hypersurface à la traversée de laquelle il y a discontinuité des dérivées secondes des potentiels gravitationnels, donc du tenseur de courbure $\mathrm{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$.

Une telle hypersurface S peut donc être une onde à la fois électromagnétique et gravitationnelle. Dans ce cas, nous établissons les équations de propagation le long de S des discontinuités des tenseurs $\nabla_\alpha\, \mathrm{F}_{\beta\gamma}$ et $\mathrm{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$. Ces équations ont déjà été obtenues par Lichnerowicz [2], qui en a indiqué une démonstration [3] en se limitant pour $\mathrm{R}_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ au cas d'une onde purement gravitationnelle. Nous étendons ses résultats au cas des équations d'Einstein-Maxwell.

Ces équations font apparaître la conservation d'un vecteur et d'un tenseur du quatrième ordre construits à partir de deux scalaires liés respectivement aux discontinuités électromagnétique et gravitationnelle.

1. 2-forme singulière; double 2-forme singulière

Sur une variété lorentzienne V^4 une 2-forme $\varphi = \varphi_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$ (α, β et tout indice grec $= 0, 1, 2, 3$) est dite singulière en un point x si en x, où φ est supposée non nulle, il existe un vecteur l non nul, appelé vecteur principal de la 2-forme, dont les produits intérieur et extérieur avec φ sont nuls :

$$l^\alpha\, \varphi_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{et} \qquad \underset{\alpha,\beta,\gamma}{\mathrm{S}}\; l_\alpha\, \varphi_{\beta\gamma} = 0,$$

où $\underset{\alpha,\beta,\gamma}{\mathrm{S}}$ désigne la somme des termes obtenus par permutation circulaire de α, β, γ.

Le vecteur l est nécessairement isotrope ($l^\alpha\, l_\alpha = 0$), sans quoi, en utilisant dans l'espace tangent en x un repère orthonormé dont l'un des vecteurs serait parallèle à l, on montrerait facilement que $\varphi = 0$.

Une double 2-forme est définie par un tenseur H quatre fois covariant ayant les mêmes symétries que le tenseur de courbure :

$$H_{\alpha\beta,\lambda\mu} = - H_{\beta\alpha,\lambda\mu} = - H_{\alpha\beta,\mu\lambda} = H_{\lambda\mu,\alpha\beta}.$$

En un point x, H est singulier de vecteur principal l si chacune des 2-formes $H_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$ (définies dans un système de coordonnées donné) est singulière de vecteur principal l. Il en résulte que l est isotrope.

2. Propriétés algébriques des discontinuités du tenseur dérivé du champ électromagnétique et du tenseur de courbure

Dans un domaine ouvert Ω d'une variété lorentzienne V^4 de signature $+\,-\,-\,-$ dont le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ est de classe C^1, C^3 par morceaux, on considère une 2-forme champ électromagnétique F de classe C^0, C^2 par morceaux obéissant aux équations de Maxwell du vide en tout point où F est différentiable.

Soit S une hypersurface, d'équation $f(x^\lambda) = 0$, à la traversée de laquelle le tenseur de composantes $\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}$ présente une discontinuité. Les conditions d'Hadamard font qu'il existe sur S une 2-forme φ permettant d'exprimer cette discontinuité :

$$[\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}] = l_\alpha \varphi_{\beta\gamma}, \tag{2.1}$$

où l'on a posé $l_\alpha = \partial_\alpha f = \dfrac{\partial f}{\partial x^\alpha}\cdot$ (S étant donnée, l est défini à la multiplication près par un champ scalaire quelconque.)

Écrivons les équations de Maxwell de part et d'autre de S, prenons-en la limite lorsqu'on tend vers un même point de S d'un côté ou de l'autre de S et faisons la différence de ces deux limites :

$$[g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha F_{\beta\gamma}] = g^{\alpha\beta} l_\alpha \varphi_{\beta\gamma} = 0, \tag{2.2}$$

$$\underset{\alpha,\beta,\gamma}{S} [\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}] = \underset{\alpha,\beta,\gamma}{S} l_\alpha \varphi_{\beta\gamma} = 0. \tag{2.3}$$

Ces deux équations expriment qu'en tout point de S, *la 2-forme φ est singulière, de vecteur principal l.* Le vecteur l est donc isotrope :

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0.$$

On reconnaît la propriété de S d'être hypersurface caractéristique tangente en tout point au cône élémentaire en ce point. On sait que, du fait que le vecteur isotrope l est un gradient, ses trajectoires sont des géodésiques isotropes. En effet, $l_\alpha = \partial_\alpha f$ entraîne $\nabla_\alpha l_\beta = \nabla_\beta l_\alpha$, d'où

$$(2.4) \qquad l^\alpha \nabla_\alpha l_\beta = l^\alpha \nabla_\beta l_\alpha = \frac{1}{2} \partial_\beta (l^\alpha l_\alpha) = 0.$$

Si le champ électromagnétique F est la seule distribution d'énergie présente dans Ω, le tenseur de courbure de V^4, de composantes $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$, y est lié à F par l'intermédiaire des équations d'Einstein :

$$S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R\, g_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta},$$

où

$$R_{\alpha\beta} = R_\alpha{}^\rho{}_{,\beta\rho} \qquad \text{et} \qquad T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} - F_{\rho\alpha} F^\rho{}_\beta,$$

soit, puisque $T_\alpha{}^\alpha = 0$,

$$(2.5) \qquad R_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}.$$

Soit S une hypersurface, d'équation $f(x^\lambda) = 0$, à la traversée de laquelle les quantités $\partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}$ ont une discontinuité. Les conditions d'Hadamard font qu'il existe sur S des quantités $a_{\alpha\beta}$, symétriques par rapport aux deux indices qui permettent d'exprimer cette discontinuité :

$$(2.6) \qquad [\partial_{\lambda\mu} g_{\alpha\beta}] = l_\lambda l_\mu a_{\alpha\beta} \qquad (\text{où } l_\rho = \partial_\rho f).$$

Les coefficients $\Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta$ de la connexion riemannienne de V^4 en repère naturel sont continus, mais leurs dérivées ont, d'après (2.6), la discontinuité

$$[\partial_\lambda \Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta] = \frac{1}{2} l_\lambda \left(l_\alpha a^\gamma_\beta + l_\beta a^\gamma_\alpha - l^\gamma a_{\alpha\beta}\right), \qquad \text{où} \quad a^\nu_\mu = g^{\nu\rho} a_{\mu\rho}.$$

D'où la discontinuité du tenseur de courbure à la traversée de S :

$$(2.7) \qquad [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = \frac{1}{2}(l_\alpha l_\mu a_{\beta\lambda} + l_\beta l_\lambda a_{\alpha\mu} - l_\alpha l_\lambda a_{\beta\mu} - l_\beta l_\mu a_{\alpha\lambda}).$$

Puisque le tenseur champ électromagnétique est continu, l'équation (2.5) entraîne $[R_{\beta\rho}] = 0$, d'où

$$(2.8) \qquad l^\alpha l_\alpha a_{\beta\rho} - l^\alpha l_\beta a_{\rho\alpha} = l_\alpha l_\rho a^\alpha_\beta - l_\beta l_\rho a^\alpha_\alpha.$$

Il résulte de (2.7) et de (2.8),

$$(2.9) \qquad l^\alpha [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = 0.$$

D'autre part, on déduit de (2.7) que

$$\underset{\alpha,\beta,\gamma}{S}\, l_\alpha\,[R_{\beta\gamma,\lambda\mu}] = 0. \tag{2.10}$$

En tout point de S *la double 2-forme* $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ *est donc singulière, de vecteur principal* l. Par suite, le vecteur l est isotrope et S est une hypersurface caractéristique.

Il s'ensuit que la même hypersurface S peut porter les discontinuités de $\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}$ et de $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$, constituant ainsi un front d'onde à la fois électromagnétique et gravitationnel, ce que nous supposerons par la suite.

3. Usage de coordonnées adaptées

Dans l'ouvert Ω, supposons que l'on puisse prendre des coordonnées admissibles telles que l'équation de S soit $x^0 = 0$. Nous les appellerons *coordonnées adaptées.*

Avec ces coordonnées et du fait que le vecteur l est isotrope, ses composantes s'écrivent

$$l_0 = 1, \qquad l_i = 0, \qquad l^0 = g^{00} = 0, \qquad l^i = g^{0i} \tag{3.1}$$

(i et tout indice latin $= 1, 2, 3$) et puisque les trajectoires de l sont géodésiques, on a [relation (2.4)]

$$g^{0i}\,\Gamma^0_{i\beta} = 0. \tag{3.2}$$

D'après (3.1), les discontinuités du tenseur de courbure données par (2.7) sont

$$[R_{ij,\lambda\mu}] = 0, \qquad [R_{0i,0j}] = -\frac{1}{2}a_{ij} \tag{3.3}$$

et celles qui s'en déduisent par les symétries de ce tenseur. Par suite, (2.9) devient

$$g^{0i}\,[R_{0i,0j}] = 0 \tag{3.4}$$

tandis que (2.10) ne nous apprend rien de neuf. Par contre, la continuité de R_{00} entraîne

$$g^{ij}\,[R_{0i,0j}] = 0 \tag{3.5}$$

tandis que la continuité de R_{0i} et de R_{ij} n'ajoute rien.

Une dernière formule nous sera utile : de l'identité $\nabla_\rho\, g^{0\rho} = 0$ on déduit

$$\nabla_\rho\, l^\rho = \partial_i\, g^{0i} + g^{0i}\,\Gamma_\rho{}^\rho{}_i = -\,\Gamma_\rho{}^0{}_\lambda\, g^{\lambda\rho},$$

soit, à l'aide de (3.2),

$$\nabla_\rho l^\rho = - g^{ij}\,\Gamma_i{}^0{}_j. \tag{3.6}$$

Notons pour terminer qu'étant donné un tenseur de type quelconque, par exemple de composantes $A^\lambda{}_{\mu\nu}$, continu ou non, la continuité des coefficients de connexion $\Gamma_\alpha{}^\gamma{}_\beta$ et la relation [1] $[\partial_i A^\lambda{}_{\mu\nu}] = \partial_i [A^\lambda{}_{\mu\nu}]$ entraînent

$$[\nabla_i A^\lambda{}_{\mu\nu}] = \nabla_i [A^\lambda{}_{\mu\nu}]. \tag{3.7}$$

4. Équations de propagation des discontinuités du tenseur dérivé du champ électromagnétique

En coordonnées adaptées, (2.1) et (2.3) s'écrivent

$$[\nabla_i F_{\alpha\beta}] = 0, \tag{4.1}$$

$$[\nabla_0 F_{ij}] = 0, \tag{4.2}$$

si bien que les seules composantes non nulles du tenseur dérivé du champ électromagnétique sont les $[\nabla_0 F_{0i}] = - [\nabla_0 F_{i0}]$. Ces composantes vérifient, vu (2.2),

$$g^{0i}\,[\nabla_0 F_{0i}] = 0. \tag{4.3}$$

Soit b le vecteur défini à l'addition près d'un vecteur arbitraire parallèle à l par

$$b_i = [\nabla_0 F_{0i}], \qquad b_0 \text{ quelconque.} \tag{4.4}$$

En coordonnées quelconques, on a

$$[\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}] = l_\alpha\,(l_\beta\, b_\gamma - l_\gamma\, b_\beta). \tag{4.5}$$

Nous cherchons maintenant comment sont reliées entre elles les dérivées prises le long de S de $[\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}]$ ou du vecteur b. Pour cela revenons en coordonnées adaptées.

Après dérivation covariante par rapport à x^0 des équations de Maxwell, prenons la discontinuité à la traversée de S des équations obtenues :

$$g^{\alpha\beta}\,[\nabla_0 \nabla_\alpha F_{\beta\gamma}] = 0, \tag{4.6}$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\alpha,\beta,\gamma}\,[\nabla_0 \nabla_\alpha F_{\beta\gamma}] = 0. \tag{4.7}$$

---

[1] Relation valable si la convergence des $\partial_i A^\lambda{}_{\mu\nu}$ vers leurs limites sur S, d'un côté ou de l'autre de S, est uniforme. Dans la suite, toutes ces conditions de convergence uniforme seront supposées satisfaites.

Dans l'équation (4.6), lorsque $\gamma = i$, on obtient

$$g^{0j}[\nabla_0 \nabla_j F_{0i}] + g^{0j}[\nabla_0 \nabla_0 F_{ji}] + g^{jk}[\nabla_0 \nabla_k F_{ji}] = 0,$$

ce qui peut s'écrire, grâce à l'identité de Ricci et à (3.7),

$$\begin{aligned} &g^{0j}(\nabla_j[\nabla_0 F_{0i}] + [R_{j0,}{}^{\lambda}{}_0] F_{\lambda i} + [R_{j0,}{}^{\lambda}{}_i] F_{0\lambda}) \\ &\quad + g^{0j}[\nabla_0 \nabla_0 F_{ji}] + g^{jk}(\nabla_k[\nabla_0 F_{ji}] + [R_{k0,}{}^{\lambda}{}_j] F_{\lambda i} + [R_{k0,}{}^{\lambda}{}_i] F_{j\lambda}) = 0. \end{aligned}$$

Si l'on utilise (3.3), (3.4) et (3.5), cette équation prend la forme

$$\begin{aligned} &- g^{0j}[\nabla_0 \nabla_0 F_{ij}] + g^{0j} \nabla_j [\nabla_0 F_{0i}] \\ &- g^{jk} \nabla_k [\nabla_0 F_{ij}] - g^{jk}[R_{0k,0i}] F_j{}^0 = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Dans l'équation (4.7), lorsque $\alpha, \beta, \gamma = 0, i, j$, on obtient

$$[\nabla_0 \nabla_0 F_{ij}] + [\nabla_0 \nabla_i F_{j0}] + [\nabla_0 \nabla_j F_{0i}] = 0,$$

soit, en utilisant l'identité de Ricci, (3.7) et (3.3),

$$\begin{aligned} &[\nabla_0 \nabla_0 F_{ij}] - \nabla_i [\nabla_0 F_{0j}] \\ &+ \nabla_j [\nabla_0 F_{0i}] + [R_{0i,0k}] F_j{}^k + [R_{0j,0k}] F^k{}_i = 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

L'élimination de $[\nabla_0 \nabla_0 F_{ij}]$ entre (4.8) et (4.9) donne l'équation cherchée en coordonnées adaptées, compte tenu de (3.4) :

$$\begin{aligned} &2\, g^{0j} \nabla_j [\nabla_0 F_{0i}] - g^{0j} \nabla_i [\nabla_0 F_{0j}] - g^{jk} \nabla_k [\nabla_0 F_{ij}] \\ &= (g^{jk} F_j{}^0 - g^{0j} F_j{}^k)[R_{0i,0k}]. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Mais on devine que les relations (4.3) et (4.2) font respectivement que les 2e et 3e termes du premier membre ne dépendent que des $[\nabla_0 F_{0l}]$ et non de leurs dérivées. En effet, en utilisant (4.3) et sa dérivée par rapport à x^i on trouve, avec l'aide de (4.2) et (4.1),

$$g^{0j} \nabla_i [\nabla_0 F_{0j}] = -[\nabla_0 F_{0j}]\, \partial_i g^{0j} - g^{0j} \Gamma^k_{ij} [\nabla_0 F_{0k}].$$

De même, en utilisant (4.2) on obtient

$$g^{jk} \nabla_k [\nabla_0 F_{ij}] = g^{jk}(-\Gamma^0_{ki}[\nabla_0 F_{0j}] + \Gamma^0_{kj}[\nabla_0 F_{0i}]).$$

La somme de ces deux termes s'écrit donc

$$\begin{aligned} A_i &= - g^{0j} \nabla_i [\nabla_0 F_{0j}] - g^{jk} \nabla_k [\nabla_0 F_{ij}] \\ &= - g^{jk} \Gamma^0_{jk} [\nabla_0 F_{0i}] + (\partial_i g^{0j} + g^{0k} \Gamma^j_{ik} + g^{jk} \Gamma^0_{ik})[\nabla_0 F_{0j}]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Remplaçons les $\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}$ par leur expression dans la parenthèse et utilisons (4.3) :

$$A_i = - g^{jk}\,\Gamma^{0}_{jk}\,[\nabla_0\,F_{0i}] + (\partial_i\,g^{0j} + g^{jk}\,g^{0l}\,\partial_i\,g_{kl})\,[\nabla_0\,F_{0j}].$$

Comme $g^{0l}\,g_{kl} = 0$,

$$g^{jk}\,g^{0l}\,\partial_i\,g_{kl} = - g^{jk}\,g_{kl}\,\partial_i\,g^{0l} = - \partial_i\,g^{0j} + g^{j0}\,g_{0l}\,\partial_i\,g^{0l}$$

et (4.3) entraîne

$$A_i = - g^{jk}\,\Gamma^{0}_{jk}\,[\nabla_0\,F_{0i}].$$

Le second membre de (4.10) se simplifie aussi grâce à (3.4) :

$$(g^{jk}\,F_j^{\ 0} - g^{0j}\,F_j^{\ k})\,[R_{\bullet i,0k}] = 2\,F^{k0}\,[R_{0i,0k}].$$

En conclusion, l'équation de propagation prend la forme simple

$$2\,l^{\rho}\,\nabla_{\rho}\,[\nabla_0\,F_{0i}] + (\nabla_{\rho}\,l^{\rho})\,[\nabla_0\,F_{0i}] = 2\,F^{\rho 0}\,[R_{0i,0\rho}],$$

où l'on s'est servi de la relation (3.6).

Ainsi écrite, elle se met facilement sous une forme tensorielle, donc valable en repère quelconque :

$$(4.12)\qquad 2\,l^{\rho}\,\nabla_{\rho}\,b_{\alpha} + (\nabla_{\rho}\,l^{\rho})\,b_{\alpha} = - F^{\rho\sigma}\,l_{\sigma}\,a_{\alpha\rho} + kl_{\alpha},$$

où k est un scalaire. Il en résulte, d'après (4.5) et (2.4),

$$2\,l^{\rho}\,\nabla_{\rho}\,[\nabla_{\alpha}\,F_{\beta\gamma}] + (\nabla_{\rho}\,l^{\rho})\,[\nabla_{\alpha}\,F_{\beta\gamma}] = - l_{\alpha}\,F^{\rho\sigma}\,l_{\sigma}\,(l_{\beta}\,a_{\gamma\rho} - l_{\gamma}\,a_{\beta\rho}),$$

soit encore, vu (2.7) et l'antisymétrie de F,

$$(4.13)\quad 2\,l^{\rho}\,\nabla_{\rho}\,[\nabla_{\alpha}\,F_{\beta\gamma}] + (\nabla_{\rho}\,l^{\rho})\,[\nabla_{\alpha}\,F_{\beta\gamma}] = 2\,l_{\alpha}\,F^{\rho\sigma}\,[R_{\beta\sigma,\gamma\rho}]\quad (2).$$

5. Équations de propagation des discontinuités du tenseur de courbure

L'analogue du vecteur b défini par (4.4) est le tenseur symétrique $b_{\alpha\beta}$ défini, à l'addition près d'un tenseur de composantes $l_{\alpha}\,v_{\beta} + l_{\beta}\,v_{\alpha}$ (où v est un vecteur arbitraire), en coordonnées adaptées par

$$(5.1)\qquad b_{ij} = [R_{0i,0j}] = b_{ji},\qquad b_{0\rho} = b_{\rho 0}\ \text{quelconque}.$$

(2) Ce second membre n'a pas la même forme que celui obtenu par Lichnerowicz [2], mais s'y ramène en utilisant la permutation circulaire des indices β, σ, γ de R, puis (2.10) et l'antisymétrie de F.

Dans ces coordonnées on a, d'après (3.3) et (2.6),

$$b_{ij} = -\frac{1}{2} a_{ij} = -\frac{1}{2}[\partial_{00}\, g_{ij}].$$

L'indétermination des $b_{0\rho}$ est à relier au fait que les discontinuités $[\partial_{00}\, g_{0\rho}]$ ne sont pas significatives [1].

En coordonnées quelconques, on a

$$(5.2) \qquad [R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = l_\alpha\, l_\lambda\, b_{\beta\mu} + l_\beta\, l_\mu\, b_{\alpha\lambda} - l_\alpha\, l_\mu\, b_{\beta\lambda} - l_\beta\, l_\lambda\, b_{\alpha\mu}.$$

Nous cherchons comment sont reliées entre elles les dérivées prises le long de S de $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ ou de $b_{\alpha\beta}$.

En un point où le tenseur de courbure est différentiable, il obéit aux identités de Bianchi

$$(5.3) \qquad \underset{\alpha,\beta,\gamma}{S}\ \nabla_\alpha\, R_{\beta\gamma,\lambda\mu} = 0$$

qui sont analogues au premier groupe des équations de Maxwell ($dF = 0$). Le second groupe ($\delta F = J$, vecteur courant) a aussi son analogue dans les équations suivantes, conséquences de (5.3) et des équations d'Einstein (2.5) :

$$(5.4) \qquad g^{\alpha\rho}\, \nabla_\rho\, R_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \chi\, (\nabla_\lambda\, T_{\beta\mu} - \nabla_\mu\, T_{\beta\lambda}).$$

A cause de cette analogie, nous utiliserons (5.3) et (5.4) et non pas les équations d'Einstein elles-mêmes.

Égalons les discontinuités des deux membres de (5.3) et de (5.4) à la traversée de S :

$$(5.5) \qquad \underset{\alpha,\beta,\gamma}{S}\ [\nabla_\alpha\, R_{\beta\gamma,\lambda\mu}] = 0,$$

$$(5.6) \qquad g^{\alpha\rho}\, [\nabla_\rho\, R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = \chi\, [\nabla_\lambda\, T_{\beta\mu} - \nabla_\mu\, T_{\beta\lambda}].$$

Les conditions d'Hadamard entraînent l'existence sur S d'un tenseur symétrique t tel que

$$(5.7) \qquad [\nabla_\alpha\, T_{\beta\gamma}] = l_\alpha\, t_{\beta\gamma}.$$

En coordonnées adaptées (5.6) s'écrit alors, pour $\beta, \lambda, \mu = i, 0, j$,

$$g^{0k}\, \nabla_k\, [R_{0i,0j}] + g^{k0}\, [\nabla_0\, R_{ki,0j}] + g^{kl}\, \nabla_l\, [R_{ki,0j}] = \chi\, t_{ij}.$$

Transformons le 2e terme à l'aide de (5.5)

$$(5.8) \qquad 2\, g^{0k}\, \nabla_k\, [R_{0i,0j}] - g^{0k}\, \nabla_i\, [R_{0k,0j}] + g^{kl}\, \nabla_l\, [R_{ki,0j}] = \chi\, t_{ij}.$$

Les relations (3.4) et (3.3) font respectivement que les 2e et 3e termes ne dépendent que des $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}]$ et non de leurs dérivées. En effet, en utilisant (3.3), (3.4) et sa dérivée par rapport à x^i on obtient

$$g^{0k}\, \nabla_i\, [R_{0k,0j}] = -[R_{0k,0j}]\, \partial_i\, g^{0k} - g^{0k}\, \Gamma^l_{ik}\, [R_{0l,0j}],$$

tandis que (3.3) entraîne

$$g^{kl}\,\nabla_l\,[R_{ki,\,0j}] = g^{kl}\,(\Gamma^0_{li}\,[R_{0k,\,0j}] - \Gamma^0_{lk}\,[R_{0i,\,0j}]).$$

Nous avons donc trouvé

$$\begin{aligned} B_{ij} &= -\,g^{0k}\,\nabla_i\,[R_{0k,\,0j}] + g^{kl}\,\nabla_l\,[R_{ki,\,0j}] \\ &= -\,g^{kl}\,\Gamma^0_{kl}\,[R_{0i,\,0j}] + (\partial_i\,g^{0k} + g^{0l}\,\Gamma^k_{il} + g^{kl}\,\Gamma^0_{il})\,[R_{0k,\,0j}]. \end{aligned}$$

On reconnaît entre les parenthèses le même terme qu'en (4.11). Ces termes se transforment de la même façon dans que le calcul de A_i, le rôle de la relation (4.3) étant ici joué par (3.4), et l'on obtient ainsi

$$B_{ij} = -\,g^{kl}\,\Gamma^0_{kl}\,[R_{0i,\,0j}].$$

Grâce à (3.6), l'équation de propagation (5.8) devient

$$2\,l^\rho\,\nabla_\rho\,[R_{0i,\,0j}] + (\nabla_\rho\,l^\rho)\,[R_{0i,\,0j}] = \chi\,t_{ij},$$

ce qu'on peut mettre sous la forme tensorielle suivante, valable en repère quelconque,

(5.9) $$2\,l^\rho\,\nabla_\rho\,b_{\alpha\beta} + (\nabla_\rho\,l^\rho)\,b_{\alpha\beta} = \chi\,t_{\alpha\beta} + l_\alpha\,u_\beta + l_\beta\,u_\alpha,$$

où u est un vecteur. Il en résulte, d'après (5.2), (2.4) et (5.7),

(5.10) $$\begin{aligned} &2\,l^\rho\,\nabla_\rho\,[R_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}] + (\nabla_\rho\,l^\rho)\,[R_{\alpha\beta,\,\lambda\mu}] \\ &\quad = \chi\,(l_\alpha\,[\nabla_\lambda\,T_{\beta\mu}] + l_\beta\,[\nabla_\mu\,T_{\alpha\lambda}] - l_\alpha\,[\nabla_\mu\,T_{\beta\lambda}] - l_\beta\,[\nabla_\lambda\,T_{\alpha\mu}]). \end{aligned}$$

6. Conservation d'un vecteur et d'un tenseur du quatrième ordre

Le vecteur b défini en (4.4) est orthogonal à l d'après (4.3) qui, en coordonnées quelconques, s'écrit

(6.1) $$l^\alpha\,b_\alpha = 0.$$

Il en résulte que b est, soit spatial, soit isotrope et parallèle à l, mais dans ce dernier cas $[\nabla_\alpha\,F_{\beta\gamma}]$ est nul d'après (4.5). Donc s'il y a discontinuité effective, on peut introduire le scalaire positif

(6.2) $$e = -\,b^\rho\,b_\rho > 0.$$

Ce scalaire n'est pas affecté par l'indétermination de b_0 en coordonnées adaptées.

En repère orthonormé quelconque le vecteur b vaut

$$b = h\,[\nabla_0\,E] + kl, \qquad \text{d'où} \qquad e = -\,h^2\,[\nabla_0\,E]^2,$$

où E est le champ électrique et h et k des champs scalaires (h dépend du choix de l, k est arbitraire). Si le repère orthonormé $\{\,e_{(\alpha)}\,\}$ est tel que

$l = e_{(0)} + e_{(1)}$, on a $h = 1$ et la partie non arbitraire de b dépend de deux paramètres :

$$[\nabla_0 E] = b^2 e_{(2)} + b^3 e_{(3)} = -[\nabla_1 E].$$

Le tenseur $b_{\alpha\beta}$ défini en (5.1) satisfait à la relation (3.4) qui, en coordonnées quelconques, s'écrit

$$b_{\alpha\beta} l^\beta = \frac{1}{2} l_\alpha b^\rho_\rho \tag{6.3}$$

où l'on a tenu compte de (3.5) pour obtenir le second membre.

Le scalaire

$$m = b^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(b^\rho_\rho)^2 \tag{6.4}$$

n'est pas affecté, grâce à (6.3), par l'indétermination des $b_{0\rho}$ en coordonnées adaptées. Il résulte de (6.3) que ce scalaire est positif ou nul et ne s'annule que si $b_{\alpha\beta}$ est de la forme

$$b_{\alpha\beta} = l_\alpha v_\beta + l_\beta v_\alpha, \tag{6.5}$$

comme on peut le voir en utilisant un repère orthonormé $\{ e_{(\alpha)} \}$ tel que $l = e_{(0)} + e_{(1)}$, repère dans lequel

$$m = (b_{22})^2 + 2(b_{23})^2 + (b_{33})^2.$$

Si $b_{\alpha\beta}$ a la forme (6.5), $[R_{\alpha\beta,\lambda\mu}] = 0$. Donc s'il y a discontinuité effective de $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$, m est strictement positif.

Dans le repère $\{ e_{(\alpha)} \}$ ci-dessus, la partie non arbitraire de la matrice symétrique d'éléments $b_{\alpha\beta}$ est

$$B = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

qui ne dépend que de deux paramètres, car (6.3) entraîne

$$b_{22} + b_{33} = 0.$$

On a

$$-\frac{1}{2}B = [\partial_{00} G] = [\partial_{11} G] = -[\partial_{01} G], \qquad \text{où} \quad G = \begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Par multiplication contractée par b^α des deux membres de l'équation (4.12) de propagation du vecteur b on obtient, compte tenu de (6.1),

$$\nabla_\rho (e l^\rho) = -2 F^{\rho\sigma} l_\sigma b^\alpha b_{\alpha\rho}. \tag{6.6}$$

Par multiplication contractée par $b^{\alpha\beta}$ des deux membres de l'équation (5.9) de propagation du tenseur $b_{\alpha\beta}$, compte tenu de (6.3), on obtient

$$\nabla_\rho\,(b^{\alpha\beta}\,b_{\alpha\beta}\,l^\rho) = \chi\,b^{\alpha\beta}\,t_{\alpha\beta} + b^\rho_\rho\,l_\lambda\,u^\wedge.$$

Comme la contraction de α et β dans cette même équation (5.9) suivie de la multiplication par b^ρ_ρ donne

$$\nabla_\rho\,\{\,(b^\alpha_\alpha)^2\,l^\rho\,\} = \chi\,t^\alpha_\alpha\,b^\rho_\rho + 2\,l_\lambda\,u^\wedge\,b^\rho_\rho,$$

il en résulte

$$\nabla_\rho\,(ml^\rho) = \chi\left(b^{\alpha\beta}\,t_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,b^\rho_\rho\,t^\alpha_\alpha\right).$$

En utilisant l'expression du tenseur d'impulsion-énergie, remplaçons t par son expression fonction de l, b et F. On obtient, vu (6.3),

$$\nabla_\rho\,(ml^\rho) = 2\,\chi\,\mathrm{F}^{\rho\sigma}\,l_\sigma\,b^\alpha\,b_{\rho\alpha}. \tag{6.7}$$

La comparaison de (6.6) et (6.7) montre que le vecteur $(m + \chi e)\,l$ est conservatif :

$$\nabla_\rho\,\{\,(m + \chi\,e)\,l^\rho\,\} = 0. \tag{6.8}$$

Les tenseurs

$$\tau_{\alpha\beta\lambda\mu} = el_\alpha\,l_\beta\,l_\lambda\,l_\mu \qquad \text{et} \qquad \theta_{\alpha\beta\lambda\mu} = ml_\alpha\,l_\beta\,l_\lambda\,l_\mu$$

sont indépendants du choix du vecteur l car si on remplace l par kl, où k est un facteur scalaire quelconque, e est remplacé par e/k^4, comme le montrent (4.5) et (6.2), et m par m/k^4 d'après (5.2) et (6.4). Ces tenseurs ne dépendent respectivement que des discontinuités des tenseurs ∇F et R et en particulier θ est l'analogue, construit avec [R], du tenseur de Bel [4] :

$$\tau_{\alpha\beta\lambda\mu} = -\,[\nabla_\alpha\,\mathrm{F}_{\lambda\rho}]\,[\nabla_\beta\,\mathrm{F}_\mu{}^\rho],$$

$$\theta_{\alpha\beta\lambda\mu} = [\mathrm{R}^\rho{}_{\alpha,}{}^\sigma{}_\lambda[\,[\mathrm{R}_{\rho\beta,\sigma\mu}] = \frac{1}{2}([\mathrm{R}^\rho{}_{\alpha,}{}^\sigma{}_\lambda]\,[\mathrm{R}_{\rho\beta,\sigma\mu}] + [\mathrm{R}^\rho{}_{\alpha,}{}^\sigma{}_\mu]\,[\mathrm{R}_{\rho\beta,\sigma\lambda}]).$$

L'équation (6.8), jointe à (2.4), montre que le tenseur $\theta + \chi\tau$ est conservatif :

$$\nabla_\alpha\,(\theta^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} + \chi\tau^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}) = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson et C^ie, Paris, 1955, p. 30.
[2] LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 2728-2730.
[3] LICHNEROWICZ, *Ann. Mat. pur. ed appl.*, série 4, t. 50, 1960, p. 1-95.
[4] BEL, *C. R. Acad. Sc.*, 247, 1958, p. 1094.

(*Manuscrit reçu le* 13 *mars* 1972.)