ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

V. V. KURYSHKIN

La mécanique quantique avec une fonction non-négative de distribution dans l'espace des phases

Annales de l'I. H. P., section A, tome 17, nº 1 (1972), p. 81-95
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__17_1_81_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVII, n° 1, 1972, p. 81-95.

Section A :
Physique théorique.

La Mécanique quantique avec une fonction non-négative de distribution dans l'espace des phases

par

V. V. KURYSHKIN

RÉSUMÉ. — Ce travail comporte l'étude d'une mécanique quantique construite à l'aide d'une règle de correspondance exempte des défauts des règles déjà connues. Il y est démontré qu'il existe, dans cette mécanique quantique, une fonction de distribution dans l'espace des phases non-négative. Les domaines de coïncidence de la théorie obtenue avec la mécanique quantique habituelle et la statistique classique sont déterminés.

INTRODUCTION

Dans la mécanique quantique l'état d'un système physique est donné par la matrice densité ρ qui se présente essentiellement sous la forme :

$$\langle q \mid \rho \mid q' \rangle = \sum_a W_a(t)\, \psi_a^*(q, t)\, \psi_a(q', t), \tag{1}$$

où $W_a(t) > 0$ désigne le poids statistique de l'état pur avec la fonction d'onde $\psi_a(q, t)$ (t, temps; $q\{q_1, q_2, \ldots, q_N\}$, coordonnée du système).

Selon le postulat principal de la mécanique quantique, la matrice densité détermine complètement toutes les propriétés d'un système physique. Autrement dit, la moyenne $\langle A \rangle$ de n'importe quelle grandeur physique A qui peut être mesurée expérimentalement, est calculée à partir de la matrice densité donnée :

$$\langle A \rangle = \mathrm{Sp}(\rho A) = \sum_a W_a(t) \langle A \rangle_a, \tag{2}$$

où

$$\langle A \rangle_a = \int \psi^* (q, t)\, O(A)\, \psi (q, t)\, dq, \tag{3}$$

O (A) est l'opérateur qui correspond à la grandeur A dans la théorie quantique.

Cependant, l'interprétation statistique générale de la mécanique quantique et l'existence de sa transition limite en statistique classique ([1] à [4]) ont donné naissance à des tentatives visant à substituer à la matrice densité ρ une fonction dans l'espace des phases et du temps $F(q, p, t)$ ([4] à [13]) afin que la formule

$$\langle A \rangle = \int A(q, p, t)\, F(q, p, t)\, dq\, dp \tag{4}$$

soit satisfaite. Dans (4), $p\,\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$ désigne l'impulsion du système et $A(q, p, t)$ une fonction des coordonnées, des impulsions et du temps, qui correspond à la grandeur A dans la théorie classique.

On a proposé d'appeler la fonction F fonction quantique de distribution et son équation, équation quantique de Liouville ([4] à [6]).

Selon les recherches effectuées par différents auteurs ([4] à [8]), l'existence et la forme générale de la fonction de distribution F dépendent de la règle de correspondance, c'est-à-dire de la loi qui fait correspondre à chaque fonction classique $A(q, p, t)$ un opérateur quantique O (A). Ainsi, la fonction quantique de distribution de Wigner [1] est liée à la règle de correspondance de Weyl [14], la fonction de Terletzky-Blokhintsev ([2] à [3]) à la correspondance directe [5], la fonction de Terletsky-Margenau-Hill ([2] à [13]) à la règle de symétrisation [15], la fonction de Cohen [6] à la règle de Born-Jordan [16], la fonction de Shankara [7] à la règle de Dirac [17], etc. Des recherches ultérieures ont donné naissance à des fonctions quantiques de distribution généralisées ([6], [8], [11]). On a constaté, d'autre part, que certaines règles de correspondance, par exemple la règle de Neumann [18], sont incompatibles avec la fonction de distribution [10].

La possibilité d'introduire la fonction F, au moins si nous nous posons certaines règles de correspondance, a donné lieu à des tentatives d'interpréter la mécanique quantique comme une théorie statistique sur la base de la fonction de distribution dans l'espace des phases (*voir*, par exemple, [4]). Cependant, ces tentatives n'ont pas abouti complètement car il n'est possible d'interpréter F comme désignant la densité de probabilité pour que le système se trouve en point $\{q, p\}$ de l'espace des phases à l'instant t que si la condition

$$F(q, p, t) \geq 0 \tag{5}$$

est satisfaite.

Mais toutes les fonctions quantiques de distribution que nous connaissons sont, soit complexes, soit réelles mais toujours de signe variable.

Il a été démontré que la règle de correspondance où la relation

$$\text{(6)} \qquad O(A^2) = O^2(A)$$

est satisfaite, est incompatible [19] avec la fonction F qui possède les propriétés (4) et (5) simultanément.

Donc, le problème de substitution de la fonction de distribution non négative F à la matrice de densité ρ et, par conséquent, le problème de transformation de la mécanique quantique en une théorie statistique sur la base de la densité de la probabilité dans l'espace des phases se réduit au problème du choix d'une règle de correspondance.

Toutes les règles de correspondance proposées jusqu'à présent sont critiquables sur tel ou tel point. Ainsi la règle de Neumann [18] et celle de Dirac [17] ne sont pas uniques, ce qui engendre des contradictions si nous les étendons sur toutes les fonctions A (q, p, t) possibles ([20] à [25]). Les règles de Born-Jordan [18], de Weyl [14], de Rivière [26] (ou la règle de symétrisation [15]), d'Yvon [27], les correspondances directe [5], normale [5] et la plus simple [8] sont uniques. Cependant, elles ne satisfont pas à la relation [6] et pour cette raison donnent lieu à la dispersion dans les états propres ([12], [25]), ce qui ne peut pas être expliqué dans le cadre de la mécanique quantique habituelle. En outre, les règles avec unicité n'assurent pas la non-négativité des dispersions et des moyennes des valeurs quadratiques [12]. Une tentative récente [28] avait pour but d'élaborer une règle de correspondance liée à l'approche de la mécanique quantique, proposée par Feynman [29]. Mais il a été démontré qu'elle n'est pas unique non plus [30].

L'analyse des ouvrages consacrés à la critique des règles de correspondance déjà connues montre que toute règle de correspondance exempte des défauts des règles proposées doit faire correspondre aux fonctions A (q, p, t) des opérateurs O (A) tels que leurs moyennes (2) dans les états avec toute matrice de densité (1) satisfassent aux cinq conditions suivantes [31] :

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} 1.\ \langle A \rangle = A, & \text{si } A\,(q, p, t) = A = \text{Cte}; \\ 2.\ \langle A \rangle = \langle A \rangle^*, & \text{si } A\,(q, p, t) = A^*\,(q, p, t); \\ 3.\ \langle A \rangle \geqq 0, & \text{si } A\,(q, p, t) \geqq 0; \\ 4.\ \langle A_1 \rangle = \langle A_2 \rangle, & \text{si } A_1\,(q, p, t) \equiv A_2\,(q, p, t); \\ 5.\ \langle A_1 + A_2 \rangle = \langle A_1 \rangle + < \langle A_2 \rangle. & \end{cases}$$

Il est apparu qu'une telle règle de correspondance existe. Sa forme explicite a été donnée dans le travail [31].

Il existe dans la mécanique quantique avec cette règle de correspondance une fonction non-négative de distribution dans l'espace des phases. Pourtant, cette mécanique quantique exige l'introduction de notions nouvelles qui n'existent pas dans la mécanique quantique habituelle.

Ce travail a pour but de donner une formulation mathématique claire et cohérente de la mécanique quantique ainsi obtenue, d'étudier ses thèses essentielles et de montrer ses intersections avec les théories, quantique et classique, habituelles.

1. LA RÈGLE DE CORRESPONDANCE

Soit $\varphi_k(q, t)$, $k = 1, 2, \ldots$ certaines fonctions de carré sommable de l'espace des coordonnées et du temps, normées de la manière suivante :

$$\sum_k \int |\varphi_k(q, t)|^2 dq = 1. \tag{8}$$

Construisons la fonction auxiliaire dans l'espace des phases et du temps :

$$\varphi(q, p, t) = (2\pi\hbar)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(qp)} \sum_k \varphi_k(q, t)\, \tilde{\varphi}_k^*(p, t), \tag{9}$$

où

$$\tilde{\varphi}_k(p, t) = (2\pi\hbar)^{-\frac{N}{2}} \int \varphi_k(q, t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(qp)} dq,$$

$$(qp) = \sum_{j=1}^{N} q_j p_j,$$

$\hbar$, constante de Planck.

Faisons correspondre à chaque fonction de l'espace des phases et du temps $A(q, p, t)$ un opérateur $O(A)$ dont l'action sur une fonction arbitraire des coordonnées et du temps $U(q, t)$ est déterminée par l'équation

$$O(A)\, U(q, t) = (2\pi\hbar)^{-N} \int \varphi(\xi, \eta, t)\; A(q + \xi, p + \eta, t) \times e^{\frac{i}{\hbar}((q - q')p)}\, U(q', t)\, dp\, dq'\, d\xi\, d\eta. \tag{10}$$

Il est facile de vérifier que la règle de correspondance (10) répond à toutes les conditions (7).

Démontrons maintenant que la règle proposée est réciproquement unique. Introduisons à cette fin la fonction $\varphi^{-1}(q, p, t)$ reliée à la fonction $\varphi(q, p, t)$ de la manière suivante :

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi^{-1}(q, p, t) = (2\pi)^{-2N} \int \overline{\varphi}^{-1}(u, v, t)\, e^{i[(uq)+(vp)]}\, du\, dv, \\ \dfrac{1}{\overline{\varphi}^{-1}(u, v, t)} = \int \varphi(q, p, t)\, e^{-i[(uq)+(vp)]}\, du\, dv. \end{cases}$$

Alors

$$(12) \quad \int \varphi(q-\xi, p-\eta, t)\, \varphi^{-1} \times (\xi - q', \eta - p', t)\, d\xi\, d\eta = \delta(q - q')\, \delta(p - p'),$$

où $\delta(x)$ désigne une δ-fonction de Dirac à N dimensions.

En posant dans (10) $\psi(q, t) = \exp \frac{i}{\hbar}(qp')$ après avoir calculé l'intégrale et changé les variables, nous obtenons la fonction génératrice ([8], [27]) de l'opérateur O (A) :

$$(13) \quad A_G(q, p, t) \overset{\text{def}}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}(qp)}\, O(A)\, e^{\frac{i}{\hbar}(qp)} = \int \varphi(\xi, \eta, t)\, A(q+\xi, p+\eta, t)\, d\xi\, d\eta.$$

Ayant multiplié la relation reçue par $\varphi^{-1}(q - \xi', p - \eta', t)$ et l'ayant intégrée sur q et p compte tenu de (12) nous obtenons la relation :

$$(14) \quad A(q, p, t) = \int \varphi^{-1}(\xi - q, \eta - p, t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}(\xi\eta)}\, O(A)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\xi\eta)}\, d\xi\, d\eta,$$

qui détermine la fonction de base $A(q, p, t)$ d'après l'opérateur O (A).

La propriété évidente de conjugaison complexe de la fonction auxiliaire (9)

$$(15) \quad \varphi^*(q, p, t) = (2\pi\hbar)^{-N} \int e^{\frac{i}{\hbar}(\xi\eta)}\, \varphi(q-\xi, p-\eta, t)\, d\xi\, d\eta,$$

détermine la conjugaison de la fonction génératrice :

$$(16) \quad A_G^*(q, p, t) = (2\pi\hbar)^{-N} \int e^{\frac{i}{\hbar}(\xi\eta)}\, A_G(q+\xi, p+\eta, t)\, d\xi\, d\eta.$$

De cette relation découle :

$$(17) \quad O^+(A) = O(A^*),$$

où $O^+(A)$ est l'opérateur adjoint de O (A). Ainsi, la règle (10) établit la correspondance réciproquement unique entre les fonctions réelles $A(q, p, t)$ et les opérateurs auto-adjoints O (A).

2. LE FORMALISME QUANTIQUE

La règle de correspondance (10) donne les opérateurs des grandeurs physiques sous forme intégrale. Cependant, dans le cas où les fonctions $A(q, p, t)$ sont entières et rationnelles par rapport aux moments

$$A(q, p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(q, t) \prod_{j=1}^{N} p_j^{n_j}, \tag{18}$$

où $n\{n_1, n_2, \ldots, n_N\}$ désigne un vecteur entier, les opérateurs correspondants $O(A)$ peuvent être présentés sous forme différentielle. En effet, si nous introduisons (18) dans (10) après de simples transformations, nous obtenons

$$O(A) = \int \varphi(\xi, \eta, t) \sum_{n=0}^{\infty} V_n(q + \xi, t) \prod_{j=1}^{N} C_{n_j}^{k_j} \eta_j^{n_j - k_j} (\hat{p}_j)^{k_j} \, d\xi \, d\eta, \tag{19}$$

où les C_n^k représentent les coefficients binomiaux,

$$\hat{p}_j \stackrel{\text{def}}{=} -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j}. \tag{20}$$

Comparant (18) à (19), nous obtenons la règle de correspondance (10) pour les grandeurs physiques de la forme (18) :

$$O(A) = \int \varphi(\xi, \eta, t) \, A(q + \xi, \hat{p} + \eta, t) \, d\xi \, d\eta, \tag{21}$$

où la fonction $A(q + \xi, \hat{p} + \eta, t)$ doit être écrite de manière que tous les $\hat{p}_j$ figurent à droite des fonctions des coordonnées, c'est-à-dire doit être écrite sous la forme (18).

Utilisant la forme de la fonction auxiliaire (9) nous obtenons, à partir de (18), l'opérateur pour la fonction des coordonnées $f(q)$:

$$O(f(q)) = \int f(q + \xi) \sum_k |\varphi_k(\xi, t)|^2 \, d\xi, \tag{22}$$

et l'opérateur de la fonction entière et rationnelle des moments $g(p)$

$$O(g(p)) = \int g(\hat{p} + \eta) \sum_k |\tilde{\varphi}_k(\eta, t)|^2 \, d\eta. \tag{23}$$

En particulier, il découle de (22), (23), que

$$\text{(24)} \qquad [O(p_i), O(q_j)]_- = [\hat{p}_i, q_j] = -i\hbar\,\delta_{ij},$$

c'est-à-dire le commutateur des opérateurs des composantes des coordonnées et du moment est orthodoxe et ne dépend pas de la forme explicite des $\varphi_k(q, t)$.

Après que les opérateurs de toutes les valeurs physiques sont déterminés, le formalisme habituel de la mécanique quantique entre en vigueur : l'état du système est donné par la matrice densité ρ, les moyennes des grandeurs physiques sont calculées selon la formule

$$\text{(25)} \qquad \langle A \rangle = \mathrm{Sp}\,(\rho\,\mathcal{A}),$$

la matrice densité satisfait à l'équation

$$\text{(26)} \qquad i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = (\rho\,\mathcal{H}) - (\mathcal{H}\,\rho),$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{H}$ sont les représentations correspondantes des opérateurs $O(A)$ et $O(H)$, $H(q, p, t)$ la fonction de Hamilton.

3. LE FORMALISME STATISTIQUE

La correspondance réciproquement unique entre la fonction classique $A(q, p, t)$ et son opérateur quantique $O(A)$ dans notre mécanique quantique permet de se passer des opérateurs. En effet, mettant (10) dans (3) et ensuite dans (2) nous obtenons la formule pour le calcul des moyennes

$$\text{(27)} \qquad \langle A \rangle = \int A(q, p, t)\,F(q, p, t)\,dq\,dp,$$

$$\text{(28)} \quad F(q, p, t) = (2\pi\hbar)^{-N}\int \varphi(q-\xi, p-\eta, t)\,e^{\frac{i}{\hbar}((\xi-\omega)\eta)}\langle \xi|\rho|\omega\rangle\,d\omega\,d\xi\,d\eta.$$

La relation (28) substitue la fonction de distribution F à la matrice densité ρ. L'égalité (12) permet de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire connaissant F rétablir ρ :

$$\text{(29)} \quad \langle q|\rho|q'\rangle = \int \varphi^{-1}(q-\xi, p-\eta, t)\,e^{-\frac{i}{\hbar}((q-q')p)}\,F(\xi, \eta, t)\,dp\,d\xi\,d\eta.$$

Enfin, à partir de (26) et à l'aide des relations (28) et (29), nous pouvons obtenir l'équation à laquelle satisfait la fonction de distribution F (pour le détail, *voir* [11]) :

$$(30)\quad \frac{\partial F(q,p,t)}{\partial t} = \int d\omega\, d\tau\, F(q-\omega, p-\tau, t) \times\left[K(\omega,\tau,t) + \int L(\xi,\eta,\omega,\tau,t) H(q-\xi, p-\eta, t)\, d\xi\, d\eta\right].$$

Les noyaux K et L ne sont déterminés que par les fonctions auxiliaires

$$(31)\qquad K(\omega,\tau,t) = \int \varphi^{-1}(\omega-\xi, \tau-\eta, t)\frac{\partial\varphi(\xi,\eta,t)}{\partial t}\, d\xi\, d\eta,$$

$$(32)\quad L(\xi,\eta,\omega,\tau,t) = \frac{i}{\hbar}(2\pi\hbar)^{-N}\int e^{\frac{i}{\hbar}((q'-q)(p'-p))} \times \varphi^*(q'-\xi, p-\eta, t)\,\varphi^{-1}(\omega-q, \tau-p, t) \times [\varphi(q',p',t) - \varphi(q,p,t)]\, dq\, dp\, dq'\, dp'.$$

L'équation (30) et la formule de calcul des moyennes (27) représentent un des formalismes mathématiques possibles de la mécanique quantique proposée qui peut être appelé à juste titre formalisme statistique. L'état du système y est donné par une fonction de distribution F, les moyennes sont calculées d'après la règle habituelle de la théorie statistique (27) et le changement de la fonction de distribution en fonction du temps est déterminée par la fonction de Hamilton (30).

4. L'INTERPRÉTATION PROBABILISTE

L'interprétation habituelle de la mécanique quantique ($\langle q \mid \rho \mid q \rangle$ est la densité de la probabilité de la coordonnée) est incompatible avec notre mécanique quantique, ce qui découle par exemple du fait que notre opérateur O $(f(q))$ ne coïncide pas avec la fonction $f(q)$ (22). Cependant, le formalisme statistique donne lieu à sa propre interprétation assez naturelle sur la base de la fonction de distribution F. Étudions avant tout ses propriétés.

Mettant dans (28) la matrice densité (1) et la fonction auxiliaire (9) sous leur forme explicite, nous obtenons :

$$(33)\quad F(q,p,t) = (2\pi\hbar)^N \sum_{a,k} W_a(t) \left| \int \varphi_k(q-\xi, t)\, \psi^*(\xi, t)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\xi p)}\, d\xi \right|^2 \geq 0.$$

Ainsi la fonction de distribution est non-négative dans tout état, indépendamment de la forme explicite des fonctions $\varphi_k(q, t)$. En outre,

(34) $$\int F(q, p, t)\, dq\, dp = 1, \qquad \text{si} \quad \mathrm{Sp}(\rho) = 1,$$

ce qui est évident à partir de (28).

Étudions maintenant les propriétés de l'équation (30). Nous pouvons montrer (comme la démonstration est facile mais trop longue, nous l'omettons dans ce travail) que $K^* = K$ et $L^* = L$, c'est-à-dire que l'opérateur qui agit sur la fonction F dans le terme de droite de l'équation (30), est réel. En outre, en conformité avec l'équation (30), $F(q, p, t) \geqq 0$ si $F(q, p, 0) \geqq 0$ et la normalisation de F ne dépend pas du temps.

Tout ce qui précède et l'égalité (27) pour toutes les valeurs physiques permettent d'interpréter la fonction de distribution $F(q, p, t)$ comme la densité de la probabilité pour que le système se trouve en un point de l'espace des phases $\{q, p\}$ à l'instant t.

L'intégration de F par rapport aux moments donne la densité de la probabilité des coordonnées :

(35) $$F(q, t) = \int \langle \xi | \rho | \xi \rangle \sum_k | \varphi_k (q - \xi, t) |^2\, d\xi,$$

ce qui signifie que même la diagonale de la matrice densité n'a pas de sens physique explicite. Dans notre mécanique quantique, la matrice densité ρ n'est donc qu'une image mathématique de la densité de la probabilité F qui fournit toute l'information statistique nécessaire.

5. L'INCERTITUDE DES VALEURS PHYSIQUES

La notion « d'incertitude » dans notre mécanique quantique est plus vaste qu'en mécanique quantique orthodoxe. Sa cause réside dans le fait que la règle de correspondance (10), en vertu de son caractère unique, rend impossible la relation (6). Ce fait peut être traduit par la relation

(36) $$O(A^2) = O^2(A) + \mathcal{D}(A),$$

où l'opérateur $\mathcal{D}(A)$, qui est en dépendance fonctionnelle avec la fonction $\varphi_k(q, t)$ influe sur la dispersion de la grandeur A [12], soit

(37) $$\langle (\Delta A)^2 \rangle = M(A) + \langle \mathcal{D}(A) \rangle,$$

où

$$M(A) \overset{\text{def}}{=} \langle O^2(A) \rangle - \langle O(A) \rangle^2 \geqq 0.$$

Il découle en particulier que la dispersion de la grandeur A dans un état de vecteur propre $| n \rangle$ de l'opérateur O (A), c'est-à-dire

$$O(A) | n \rangle = A_n | n \rangle$$

n'est pas généralement égale à zéro

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle_n = \langle \mathcal{D}(A) \rangle_n. \tag{38}$$

Utilisant la relation (36) nous pouvons démontrer [12] que la dispersion de la grandeur A atteint son minimum dans les états avec les vecteurs propres de l'opérateur O (A). Ensemble avec la relation (38), cela nous donne :

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \geqq (\delta A)^2 \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{Min}_{(n)} \{ \langle \mathcal{D}(A) \rangle_n \}, \tag{39}$$

ce qui représente le principe d'incertitude pour une grandeur donnée qui n'existe pas dans la mécanique quantique habituelle.

Utilisant la méthode habituelle de la mécanique quantique il n'est pas difficile d'obtenir le principe d'incertitude pour deux grandeurs. Il vient :

$$\begin{aligned} \langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geqq & \langle O(C) \rangle^2 + M(A) \langle \mathcal{D}(B) \rangle \\ & + M(B) \langle \mathcal{D}(A) \rangle + \langle \mathcal{D}(A) \rangle \langle \mathcal{D}(B) \rangle, \end{aligned} \tag{40 a}$$

où, sous forme simplifiée :

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geqq \langle O(C) \rangle^2 + (\delta A)^2 (\delta B)^2, \tag{40 b}$$

où $O(C) = -i [O(A), O(B)]_-$.

L'application des relations (36)-(40 b) aux grandeurs physiques les plus simples, c'est-à-dire à la coordonnée et à l'impulsion, nous donne :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle (\Delta q)^2 \rangle \geqq (\delta q)^2 &\overset{\text{def}}{=} \int q^2 \alpha(q, t)\, dq - \left[\int q\, \alpha(q, t)\, dq \right]^2, \\ \langle (\Delta p)^2 \rangle \geqq (\delta p)^2 &\overset{\text{def}}{=} \int p^2 \beta(p, t)\, dp - \left[\int p\, \beta(p, t)\, dp \right]^2, \\ \langle (\Delta q)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle &\geqq \frac{\hbar^2}{4} + (\delta q)^2 (\delta p)^2, \end{aligned} \right. \tag{41}$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha(q, t) &= \sum_k | \varphi_k(q, t) |^2, \\ \beta(p, t) &= \sum_k | \tilde{\varphi}_k(p, t) |^2. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, en général dans notre mécanique quantique il n'existe pas d'états avec une impulsion strictement donnée ni d'états avec une coordonnée fixée.

6. LA TRANSITION LIMITE SUR φ_k

Les résultats du paragraphe précédent permettent de déterminer les propriétés des fonctions φ_k en vertu desquelles notre mécanique quantique approche la mécanique quantique orthodoxe. Il s'agit du fait qu'il existe, dans la mécanique quantique orthodoxe, les états avec q fixée et les états avec p strictement donnée. Selon (41), dans notre mécanique quantique cela ne peut arriver qu'au cas où

$$\sum_k |\varphi_k(q, t)|^2 = \delta(q), \tag{42 a}$$

$$\sum_k |\tilde{\varphi}_k(p, t)|^2 = \delta(p). \tag{42 b}$$

En outre, pour l'ensemble des grandeurs physiques de type

$$A(q, p) = f(q) + g(p), \tag{43}$$

(21)-(23) donnent des opérateurs habituels :

$$O(f(q) + g(p)) = f(q) + g(\hat{p}). \tag{44}$$

Pour cette raison, les résultats de notre mécanique quantique pour les grandeurs de type (43), si les conditions (42) sont satisfaites, coïncideront avec ceux de la mécanique quantique habituelle. En outre, selon les relations (42), il suit de (35) l'interprétation habituelle de la matrice de densité :

$$F(q, t) = \langle q | \rho | q \rangle, \tag{45}$$

et de (41), il suit la relation d'incertitude orthodoxe :

$$\langle (\Delta q)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{46}$$

Il faut noter ici qu'il n'existe pas de fonctions continues $\varphi_k(q, t)$ qui possèdent à la fois les propriétés (42 a) et (42 b). C'est pourquoi les relations (42) doivent être interprétées comme une transition limite. Autrement dit, la mécanique quantique orthodoxe sur l'ensemble des grandeurs physiques (43) représente un cas limite de la mécanique quantique avec la règle de correspondance (10).

7. LA TRANSITION LIMITE SUR φ_k ET $\hbar$

Montrons maintenant que la statistique classique est aussi un cas limite particulier de la mécanique quantique avec la règle de correspondance (10).

Se posant, pour faciliter le problème, N = 1, inscrivons

$$\mathrm{F}(q-\omega, p-\tau, t) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}(q-\xi, p-\eta, t)$$

dans l'équation (30) sous la forme de série de Taylor au point

$$\omega = \tau = \xi = \eta = 0,$$

ce qui nous donne la forme différentielle de l'équation pour la fonction de distribution

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left[\mathcal{K}_{mn} + \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \mathcal{L}_{mn}^{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} \mathrm{H}}{\partial q^{\mu}\, \partial p^{\nu}} \right] \frac{\partial^{m+n} \mathrm{F}}{\partial q^m\, \partial p^n}. \tag{47}$$

Les coefficients $\mathcal{K}_{mn}$ et $\mathcal{L}_{mn}^{\mu\nu}$ qui ne dépendent que du temps y ont la forme :

$$\mathcal{K}_{mn} = \frac{i^{m+n}\, \hbar^n}{m\,!\, n\,!} k_{mn}, \qquad \mathcal{L}_{mn}^{\mu\nu} = \frac{(-i)^{m+n+\mu+\nu-1}\, \hbar^{n+\nu-1}}{m\,!\, n\,!\, \mu\,!\, \nu\,!} l_{mn}^{\mu\nu}. \tag{48}$$

Les valeurs k_{mn} et $l_{mn}^{\mu\nu}$ dont nous ne donnons pas la forme explicite car elle est trop longue, possèdent en vertu de la normalisation (8), les propriétés :

$$k_{00} = l_{00}^{\mu\nu} = l_{m0}^{\mu 0} = l_{0n}^{0\nu} = l_{mn}^{00} = 0. \tag{49}$$

L'existence d'états où les coordonnées et l'impulsion sont strictement données en même temps est certaine dans la théorie classique. En vertu des relations (41), cela ne peut avoir lieu dans notre mécanique quantique qu'au cas où les conditions (42) sont satisfaites et $\hbar = 0$. Les relations (42) nous donnent :

$$k_{m0} = 0, \qquad l_{m0}^{\mu 1} = -i\,\delta_{m1}\,\delta_{\mu 0}, \qquad l_{m1}^{\mu 0} = i\,\delta_{m0}\,\delta_{\mu 1}. \tag{50}$$

Supposant que $\hbar$ est petit, nous pouvons représenter la fonction de distribution sous forme d'une série :

$$\text{(51)} \qquad F(q, p, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j F_j(q, p, t).$$

Enfin, mettant la série (51) dans l'équation (47) et la formule (27) à l'aide des relations (49) et (50) pour l'approximation $j = 0$, nous obtenons l'équation de Liouville et la formule classique pour le calcul des moyennes :

$$\text{(52)} \qquad \frac{\partial F_0}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial F_0}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial F_0}{\partial q}, \qquad \langle A \rangle = \int A F_0 \, dq \, dp.$$

Toutes les conclusions de ce paragraphe peuvent être étendues au cas où $N > 1$.

CONCLUSION

La différence essentielle et de principe entre la théorie quantique proposée et de la mécanique quantique habituelle réside dans le fait qu'elle exige l'introduction des fonctions auxiliaires $\varphi_k(q, t)$ dont le sens physique n'est pas éclairci pour le moment. Cependant, le fait même de leur existence dans notre mécanique quantique donne lieu à des conclusions importantes :

1. L'interprétation probabiliste de la mécanique quantique devient globale. Ainsi on peut toujours donner dans notre mécanique quantique la probabilité commune $\omega(A, B, \ldots)\, dA\, dB \ldots$, c'est-à-dire la probabilité du fait que les valeurs de toutes grandeurs physiques $A, B, \ldots$ se trouvent dans le domaine $[A + dA, B + dB, \ldots]$. En effet, la densité de la probabilité $\omega(A, B, \ldots)$ peut être calculée d'après la densité de la probabilité $F(q, p, t)$ connue et les relations $A = A(q, p, t)$, $B = B(q, p, t), \ldots$. L'existence de la densité de la probabilité commune $\omega(A, B, \ldots)$ introduit les probabilités conditionnelles, qui n'existent pas dans la mécanique quantique habituelle. Soit, par exemple, A' une valeur possible de la grandeur A, c'est-à-dire

$$\int \omega(A', B, C, \ldots)\, dB\, dC \ldots \neq 0.$$

Alors, la probabilité de ce fait que les valeurs des grandeurs $B, C, \ldots$ se trouvent dans le domaine $[B + dB, C + dC, \ldots]$ sous la condition $A = A'$ sera donnée par la formule

$$\frac{1}{\int \omega(A', B, C, \ldots)\, dB\, dC \ldots}\, \omega(A', B, C, \ldots)\, dB\, dC \ldots.$$

2. La contribution de $\varphi_k(q, t)$ dans les opérateurs O (A) ne s'annule pas même en transition limite (42) [à l'exception des opérateurs de type (43)]. Autrement dit, la connaissance de la seule fonction classique A (q, p, t) est en général insuffisante pour la construction de l'opérateur quantique O (A). C'est dans ce fait que trouvent leur explication aussi bien les longues discussions ([14]-[30]) sur les règles de correspondance que la coïncidence de toutes les règles connues sur l'ensemble de grandeurs physiques (43).

3. L'exigence de von Neumann (6) n'est pas exacte dans notre mécanique quantique. Par conséquent, sa démonstration du théorème sur l'impossibilité d'introduire les « paramètres cachés » [18] n'est pas exacte non plus. De plus, la mécanique quantique avec la fonction non-négative de distribution dans l'espace des phases exige l'introduction de nouvelles notions physiques pour expliquer le sens physique des fonctions $\varphi_k(q, t)$. C'est bien possible que $\varphi_k(q, t)$ sont des images mathématiques des choses déjà connues (*voir*, par exemple, le « thermostat caché » de Bohm et Vigier [32], le « médium subquantique » de L. de Broglie [33]).

4. Utilisant la densité de la probabilité dans l'espace des phases F nous supposons, d'une manière implicite, que le système peut se trouver dans le point $\{q, p\}$ au moment t (cette supposition est impossible dans la mécanique quantique habituelle). Ensemble avec l'interprétation probabiliste générale, cela justifie les recherches d'une théorie déterministe plus approfondie dont la statistique est représentée par la mécanique quantique (*voir*, par exemple, [32]-[35]).

Il est clair que la mécanique quantique examinée dans ce travail peut être ou confirmée, ou réfutée expérimentalement car ses résultats ne coïncident pas généralement avec ceux de la mécanique quantique habituelle. Naturellement cela fait apparaître des difficultés. Premièrement, pour résoudre les problèmes concrets il faut connaître, *a priori*, la forme explicite des fonctions $\varphi_k(q, t)$. En apparence, c'est impossible sans un éclaircissement préliminaire, au moins partiel, de leur sens physique. Deuxièmement, les résultats des deux mécaniques quantiques peuvent coïncider sur l'ensemble des grandeurs physiques (43). C'est pourquoi il s'agit, en premier lieu, de la vérification expérimentale des valeurs des grandeurs physiques qui n'appartiennent pas à l'ensemble (43).

L'auteur tient à remercier le Professeur Ya. P. Terletsky pour lui avoir suggéré ce problème ainsi que les participants aux séminaires de Physique théorique de l'Université de l'Amitié des Peuples Patrice Lumumba de Moscou et de l'Institut Henri Poincaré pour les discussions intéressantes et les remarques et suggestions utiles.