ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARCO MODUGNO

Sur quelques propriétés de la double 2-forme gravitationnelle W

Annales de l'I. H. P., section A, tome 18, nº 3 (1973), p. 251-262

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1973__18_3_251_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVIII, n° 3, 1973, p. 251-262.

Section A :
Physique théorique.

Sur quelques propriétés de la double 2-forme gravitationnelle W (*)

par

Marco MODUGNO
Istituto Matematico « U. Dini », Firenze

RÉSUMÉ. — Dans ce travail, nous avons étudié quelques propriétés algébriques et différentielles de la double 2-forme $W = R + (1/2)T \wedge g$, en rapport avec l'équation de Marathe $W + \star W \star = 0$. En particulier, nous avons considéré certaines analogies avec le champ électromagnétique. Nous avons employé les techniques de calcul de la théorie des formes extérieures à valeurs dans un module, lesquelles permettent aussi de retrouver, d'une façon compacte, quelques résultats classiques de Lichnerowicz.

INTRODUCTION

Récemment, K. B. Marathe a démontré [1] que les équations de Einstein sont équivalentes au système $[W, \star] = 0$, $r_0 = T_0$, où W est la 2-forme à valeurs dans le module des 2-formes Λ^2 définie par $W = R + g\, X_c\, T$ et où R est la 2-forme à valeurs dans Λ^2 associée à la courbure riemannienne $\overline{R}$, g est le tenseur métrique, T est le tenseur d'impulsion-énergie, X_c est un certain produit défini dans [1], r_0 et T_0 sont les traces du tenseur de Ricci r et du tenseur T et $\star$ est l'opérateur de Hodge. Puisque la condition $r_0 = T_0$ ne paraît pas physiquement essentielle, Marathe a proposé de considérer le champ gravitationnel généralisé (M, g, T) où M est la variété espace-temps, g et T vérifient la condition $[W, \star] = 0$. En particulier ils peuvent être, tous, des champs possibles gravitationnels généralisés, ce qui vérifie les équations de Einstein, avec ou sans la constante cosmologique λ [2].

(*) Ce travail a été exécuté avec la contribution du C. N. R. (Conseil National des Recherches) dans le cadre du Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica e per le Applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria.

Après avoir étudié quelques propriétés algébriques et différentielles de la double 1-forme d'impulsion-énergie T, on donne une nouvelle définition de W que l'on considère comme la double 2-forme qui représente le champ gravitationnel. On étudie aussi cette forme et l'on parvient en particulier à déterminer la relation entre W et la double 2-forme $\mathcal{C}$ associée au tenseur de Weil. On cherche aussi de développer l'analogie entre W et la forme F qui représente le champ électromagnétique. On remarque aussi que $d'^2 \mathrm{W} = 0 = \delta'^2 \mathrm{W}$, mais que la relation $d' \mathrm{W} = 0 = \delta' \mathrm{W}$ n'est pas toujours vérifiée.

Si le schéma matériel est constitué seulement par le champ électromagnétique, nous avons déterminé une forme très simple pour l'équation du champ gravitationnel à l'aide de la double 2-forme $\mathrm{E} = \mathrm{F} \otimes \mathrm{F}$. Aussi, dans le cas de W singulier (c'est-à-dire le cas III *b* dans la classification de Bel-Petrov [3]), on étudie des analogies avec le champ électromagnétique singulier, qui, pour la première fois, furent remarquées par Lichnerowicz. Pour ce qui concerne l'interprétation physique de l'équation $\delta' \mathrm{T} = (1/4)\, d'' (r_0 - \mathrm{T}_0)$ (qui est une conséquence de l'équation de Marathe et qui remplace l'équation classique $\delta' \mathrm{T} = 0$), nous nous sommes bornés à proposer éventuellement une modification de la loi de conservation de la masse ou de la loi de mouvement.

Nous avons employé des techniques intrinsèques de calcul, qui sont liées à la théorie des formes à valeurs dans un module, qui simplifient l'étude des équations gravitationnelles.

L'auteur remercie le Professeur Lichnerowicz pour ses nombreux conseils et suggestions. Je remercie aussi le Docteur Marathe qui a voulu me faire connaître avant publication ses résultats sur ce sujet.

1. QUELQUES PRÉMISSES MATHÉMATIQUES

Nous donnons un bref résumé de quelques notions et formules que l'on emploiera dans la suite. Soit M une variété différentiable de dimension n, orientable, pseudo-riemannienne. Soit g le tenseur métrique, η la forme volume correspondante à l'orientation choisie et $\eta^2 = (\eta, \eta)$ la signature de la métrique.

Indiquons avec e_α le produit extérieur (à gauche) par la forme α et avec i_α son transposé métrique.

Si $\star : \Lambda^p \to \Lambda^{n-p}$ est l'isomorphisme de Hodge, défini par $\star\, \alpha = i_\alpha\, \eta$, les formules suivantes sont valables :

(1.1) $\quad e_\beta \star \alpha = (-1)^{q(p-q)} \star i_\beta\, \alpha \quad$ si degré $\beta \leqq$ degré α,

(1.2) $\quad (\star\, \alpha, \star\, \beta) = \eta^2 (\alpha, \beta) \quad$ si degré $\beta =$ degré α,

(1.3) $\quad \star\star\, \alpha = (-1)^{p(n-p)}\, \eta^2\, \alpha \quad$ si degré $\alpha = p$.

Les modules M_1, M_2, M_3 et une application bilinéaire $M_1 M_2 \rightarrow M_3$ étant donnés, on peut définir le produit extérieur d'une p-forme α à valeurs dans M_1, avec une q-forme β à valeurs dans M_2, comme la $(p+q)$-forme $\alpha \wedge \beta$ à valeurs dans M_3, définie par

$$\begin{aligned}&(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{p+q}) \\ &\quad = \Sigma\, \varepsilon(s)\, \alpha(X_{s(1)}, \ldots, X_{s(p)}) . \beta(X_{s(p+1)}, \ldots, X_{s(p+q)}),\end{aligned}$$

où la sommation s'étend à toute permutation de $(1, \ldots, p+q)$ telle que $s(1) < \ldots < s(p)$ et $s(p+1) < \ldots < s(p+q)$. Dans ce qui va suivre il sera possible de voir quels sont les modules et l'application bilinéaire dont il s'agit.

Soit $\Lambda \otimes \Lambda$ l'algèbre extérieure des doubles formes, qui peuvent être considérées comme formes à valeurs dans Λ à droite ou à gauche [3]. Sur $\Lambda \otimes \Lambda$ on peut définir, dans une manière naturelle, les opérations e'_α (e''_α), i'_α (i''_α), $\star$ $(\star_D)$ à gauche (à droite). Encore, si S est une double forme de bidegré $(p+1, q+1)$, alors CS est la double forme de bidegré (p, q), définie à l'aide des bases duales (ω^α) et (X_α) par

$$\begin{aligned}&(CS)(X_1, \ldots, X_p; X_{p+1}, \ldots, X_{p+q}) \\ &\quad = \Sigma_\alpha\, S(\boldsymbol{\omega}^\alpha, X_1, \ldots, X_p; X_\alpha, X_{p+1}, \ldots, X_{p+q}),\end{aligned}$$

ou de même :

$$C(\star\, S \,\star) = \star\, (S \wedge g) \,\star .$$

En outre, si S est de bidegré (p, q), on a [4] :

$$C(S \wedge g) = (-1)^{p+q}(n - p - q)\, S + CS \wedge g. \tag{1.4}$$

Désignons par $[D_1, D_2]$ le crochet de deux applications R-linéaires de $\Lambda \otimes \Lambda$ dans elle-même de bidegré respectivement (p_1, q_1) et (p_2, q_2). Les formules suivantes sont alors valables [3] :

$$[C, e'_X] = i''_X, \qquad [C, e'_X] = i'_X; \tag{1.5}$$

$$[C, i'_X] = 0, \qquad [C, i''_X] = 0. \tag{1.6}$$

Si l'on désigne par T_L l'opérateur de transfert à gauche, défini par

$$\begin{aligned}&(T_L S)(X_1, \ldots, X_{p+1}; X_{p+2}, \ldots, X_{p+q}) \\ &\quad = \Sigma\, \varepsilon(s)\, S(X_{s(1)}, \ldots, X_{s(p)}; X_{s(p+1)}, X_{p+2}, \ldots, X_{p+q}),\end{aligned}$$

on tire [3] :

$$T_L = (-1)^p \star C \star .$$

De même on peut définir T_D. La double forme S sera dite primitive si $T_L S = T_D S = 0$.

Le produit scalaire extérieur $\underline{S} \bar{\wedge} \underline{T}$, où $\underline{S}$ et $\underline{T}$ sont les doubles formes vectorielles associées aux doubles formes S et T [3], est défini d'une façon semblable à celle des formes à valeurs vectorielles. En particulier, il nous sera utile de définir la formule suivante qui est valable pour les doubles 2-formes (en effet, cette formule a une validité plus générale) [3] :

$$(\underline{S}_1 \bar{\wedge} \underline{S}_2) - (\star\, \underline{S}_1 \bar{\wedge} \star\, \underline{S}_2)^{\sim} = -(S_1, S_2)\, I, \tag{1.7}$$

où I est l'endomorphisme identité et « $\tilde{}$ » indique la transposition métrique.

Soient maintenant d et $\delta = \star\, d \,\star$ la différentiation [5] et la codifférentiation extérieure covariante, sur les formes à valeurs dans un module. On peut alors définir de façon naturelle la différentiation à gauche (à droite) et la codifférentiation à gauche (à droite) extérieure covariante, pour lesquelles on a [3] :

$$\begin{cases} d = \Sigma_\alpha\, e_{\omega^\alpha} \nabla_{X_\alpha}, & \delta = -\Sigma_\alpha\, i_{\omega^\alpha} \nabla_{X_\alpha}; \\ [C, d'] = -\delta'', & [C, d''] = -\delta'; \\ [C, \delta'] = 0, & [C, \delta''] = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Par un calcul direct on trouve aussi les formules suivantes valables pour une double forme de bidegré (p, q) :

$$L'_X S = [i'_X, d']\, S = \nabla_X S + S \wedge_L \nabla \mathbf{X}; \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{(n+1)(p+1)}\, \eta^2 \star L'_X \star S &= [e'_X, \delta']\, S \\ &= -\nabla_X S + \delta X . S + S \wedge_L \underline{\nabla} X,\end{aligned} \tag{1.10}$$

où $\wedge_L \nabla \underline{X}$ $(\wedge_L \underline{\nabla} X)$ indique le produit extérieur à gauche par l'endomorphisme $\nabla \underline{X}$ $(\underline{\nabla} X)$.

Soit $\bar{R}$ la courbure de la connexion riemannienne, R la double forme associée, $r = CR$ la double 1-forme de Ricci et $r_0 = C\, r$ la courbure scalaire. Les identités de Bianchi s'écrivent :

$$C \star R = 0 = C \star_D R, \tag{1.11}$$

$$d' R = 0 = d'' R \tag{1.12}$$

et de celles-ci on tire :

$$2\, C\, d' r + d' r_0 = 0, \qquad 2\, \delta' r + d'' r_0 = 0. \tag{1.13}$$

Si B est une double 1-forme, alors [5], on a

$$d'^2 B = \bar{R} \wedge B,$$

de laquelle, si B est symétrique, on déduit :

$$C\, d'^2 B = -\bar{r} \wedge B.$$

En particulier on peut vérifier que

$$\bar{r} \wedge r = 0 = \bar{r} \wedge g. \tag{1.14}$$

Enfin, dans le cas que dim M $= 4$ et que la métrique soit hyperbolique normale, la remarquable identité de Lanczos [3] est valable pour toute double 2-forme symétrique S :

$$S + \star S \star = (CS - (1/4)\, C^2 S . g) \wedge g. \tag{1.15}$$

2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA DOUBLE 1-FORME D'IMPULSION-ÉNERGIE T

Dans la suite M sera la variété « espace-temps » de dimension 4 avec métrique hyperbolique normale ($\eta^2 = -1$).

Soit T la double 1-forme d'impulsion-énergie, sur laquelle on suppose seulement que soit symétrique, c'est-à-dire $T_L T = 0$ ($\Leftrightarrow C \star T = 0$). T et g étant symétriques, la double 2-forme $T \wedge g$ est symétrique et primitive.

D'après (1.15) on déduit :

$$\star (T \wedge g) \star = T \wedge g - (1/2)\, T_0\, g \wedge g. \tag{2.1}$$

En tenant compte de (1.18) on prouve les formules

$$d' (T \wedge g) = d' T \wedge g; \qquad \delta' (T \wedge g) = - d'' T + (\delta' T) \wedge g. \tag{2.2}$$

Il nous faut remarquer encore les deux identités suivantes :

$$\star (d' T \wedge g) \star = d'' T + C\, d'' T \wedge g; \qquad \star (d'^2 T \wedge g) \star = - C\, d''^2 T. \tag{2.3}$$

La première se tire d'après (2.1) et (2.2). On peut déduire la deuxième en appliquant l'opérateur δ' aux deux membres de la première et en tenant compte de (1.8).

3. LA DOUBLE 2-FORME GRAVITATIONNELLE W

Nous donnons maintenant une définition semblable à celle de Marathe [1] :

DÉFINITION. — *On dit « double 2-forme gravitationnelle » la double 2-forme définie par*

$$W = R + (1/2)\, T \wedge g.$$

W est primitive donc symétrique.

D'après (1.4) on tire immédiatement :

$$CW = r + T + (1/2)\, T_0\, g, \qquad C^2 W = r_0 + 3\, T_0. \tag{3.1}$$

Ensuite on déduit de (1.4), (1.8), (2.2) :

$$d'' W = (1/2)\, d'' T \wedge g, \qquad d''^2 W = (1/2)\, d''^2 T \wedge g, \tag{3.2}$$

$$\delta' W = -\, d'' r - (1/2)\, d'' T + (1/2)\, (\delta' T) \wedge g. \tag{3.3}$$

Nous remarquons enfin que de $C \star W = 0$ on tire

$$d' W = \star\, C \star d'' W = T_L\, d'' W.$$

4. LE CHAMP GRAVITATIONNEL GÉNÉRALISÉ

D'après Marathe [1] nous disons :

DÉFINITION. — (M, g, T) *est un « champ gravitationnel généralisé » si*

$$[W, \star] = 0,$$

c'est-à-dire si

$$W + \star\, W \star = 0. \tag{4.1}$$

D'après (1.15) on déduit aussitôt :

PROPOSITION. — (M, g, T) *est un champ gravitationnel généralisé si et seulement si*

$$r + T = (1/4)\,(r_0 + T_0)\, g. \tag{4.1'}$$

Les équations d'Einstein sont équivalentes aux équations (4.1) avec la condition $r_0 = T_0$. Pour ce qui concerne la relation entre le champ gravitationnel généralisé et les équations d'Einstein, *voir* aussi [2]. De toute façon, pour tout ce que nous dirons dans la suite, on pourra parvenir à des résultats valables dans le cas classique en ajoutant seulement la condition $r_0 = T_0$. Dès à présent, nous supposerons que W satisfait à (4.1) ou (4.1′).

Remarquons enfin que si l'on substitue $W + \lambda\, g \wedge g$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) à W, on tire les mêmes équations, puisque

$$\star\, (g \wedge g) \star + g \wedge g = 0.$$

Par exemple on pourrait considérer la double 2-forme

$$\mathcal{C} = W - (1/24)\, C^2 W\, g \wedge g,$$

que, en conséquence de (4.1′), résulte être la double 2-forme de courbure conforme de Weil (*voir* aussi [3]). En effet, jusqu'à présent il ne paraît pas que $\mathcal{C}$ ait des propriétés vraiment plus importantes que celles de W.

5. RELATIONS DIFFÉRENTIELLES

D'après (4.1) on tire immédiatement :

PROPOSITION :

(5.1) $$\delta' \mathrm{W} = \star\, d' \mathrm{W} \star \quad \textit{et} \quad \delta'^2 \mathrm{W} = \star\, d'^2 \mathrm{W} \star.$$

En tenant compte de (2.3) et (3.2), on déduit pourtant :

PROPOSITION :

(5.2) $$\delta' \mathrm{W} = (1/2)\, \mathrm{C}\,(\star\, d'\, \mathrm{T} \star) = (1/2) \star (d'\, \mathrm{T} \wedge g) \star = (1/2)\,(d''\, \mathrm{T} + \mathrm{C}\, d''\, \mathrm{T} \wedge g),$$

(5.3) $$\delta'^2 \mathrm{W} = (1/2)\, \mathrm{C}\,(\star\, d'^2\, \mathrm{T} \star) = (1/2) \star (d'^2\, \mathrm{T} \wedge g) \star = -\,(1/2)\, \mathrm{C}\, d''^2\, \mathrm{T}.$$

En vertu de l'équation (4.1′), la 1-forme $\delta' \mathrm{T}$ est exacte; plus précisément, en tenant compte de (1.13), on a (*voir* aussi [2]) :

PROPOSITION :

(5.4) $$\delta' \mathrm{T} = (1/4)\, d''\,(r_0 - \mathrm{T}_0) \qquad [\textit{ou aussi : } \mathrm{C}\, d''\, \mathrm{T} = -\,(1/4)\, d''\, \mathrm{C}^2\, \mathrm{W}].$$

De (4.1′) et de (1.4) on tire, d'autre part :

(5.5) $$\mathrm{C}\, d''^2\, \mathrm{T} = 0,$$

laquelle, avec (5.3), nous donne :

PROPOSITION :

(5.6) $$\delta'^2 \mathrm{W} = 0 = d'^2 \mathrm{W}.$$

Ces dernières équations présentent une certaine analogie avec les équations de Maxwell. L'analogie serait plus frappante s'il était $d' \mathrm{W} = 0 = \delta' \mathrm{W}$, mais cela est vrai si et seulement si

$$d''\, \mathrm{T} + \mathrm{C}\, d''\, \mathrm{T} \wedge g = 0$$

(en particulier si $\mathrm{T} = 0$). Il n'est pas facile toutefois de donner une simple interprétation physique de cette condition ou de (5.5).

On remarquera pourtant que, si $r_0 = \mathrm{T}_0$, alors (comme il est bien connu), $\delta' \mathrm{T} = 0$ et, dans ce cas, l'équation (5.2) devient

$$\delta' \mathrm{W} = (1/2)\, d''\, (\mathrm{T} - \mathrm{T}_0\, g).$$

Pour achever ce paragraphe nous esquisserons une interprétation physique de l'équation (5.4), tout en renvoyant à un prochain travail une analyse plus détaillée. Dans ce but on considère un schéma matériel constitué par un fluide incohérent et soit donc : $T = \mu\, u \otimes u$, avec $u^2 = 1$. L'équation (5.4) devient alors :

$$\delta(\mu\, u)\, u - \mu\, \nabla_u u = (1/4)\, d\,(r_0 - \mu).$$

Cela suggère au moins trois possibilités : dans la première on a $r_0 = \mu + \mathrm{Cte}$ et donc les équations d'Einstein sont valables (éventuellement avec la constante cosmologique); dans la deuxième, il faut changer la loi de mouvement pour les points libres, considérant $(1/4)\, d\,(\mu - r_0)$ comme une densité de force; dans la troisième il faut modifier aussi la loi de conservation de la matière.

6. LE CAS DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE PUR

Nous étudions maintenant l'intéressante forme que prennent les équations (4.1) dans le cas particulier que la matière soit constituée seulement par le champ électromagnétique. Soit donc F une 2-forme (désignant le champ électromagnétique) sur laquelle nous ne faisons pas, pour le moment, aucune hypothèse particulière. Nous considérons alors la double 2-forme $E = F \otimes F$; pour celle-ci, on a

$$\star\,(E + \star\, E\, \star)\, \star = E + \star\, E\, \star. \tag{6.1}$$

La double 1-forme T (tenseur de Maxwell) peut s'écrire dans ce cas :

$$T = -\,(1/2)\, C\,(E + \star\, E\, \star) = -\,(1/2) \star ((E + \star\, E\, \star) \wedge g) \star.$$

Comme il est bien connu, de celle-ci on tire facilement :

$$T_0 = CT = -\,(F, F) - (\star\, F, \star\, F) = 0.$$

On a alors :

PROPOSITION. — $T \wedge g = E + \star\, E\, \star$.

Démonstration. — De (1.15) on tire

$$E + \star\, E\, \star = (CE - (1/4)\, C^2 E\, g) \wedge g.$$

De cette dernière on a

$$-\,(1/2)\, C\,(E + \star\, E\, \star) = -\,(CE - (1/4)\, C^2 E\, g),$$

et celle-là, placée dans la première, nous donne le résultat.

Dans ce cas donc, la double 2-forme gravitationnelle est définie par

$$W = R - (1/2)\,(E + \star\, E\, \star).$$

L'équation (4.1) peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$(6.2) \qquad R + \star R \star = E + \star E \star.$$

De celle-ci on déduit les équations d'Einstein en ajoutant la condition $r_0 = 0$. R satisfait donc (6.2) si et seulement si il existe une double 2-forme D telle que $CD = (1/4)\, C^2\, D\, g$ et $R = E + D$; la condition $r_0 = 0$ est alors équivalente à $CD = (1/2)\, F^2\, g$.

Si maintenant nous supposons que les équations de Maxwell :

$$dF = 0, \qquad \delta F = 0,$$

sont valables, alors, comme il est bien connu, on a $\delta'\, T = 0$, c'est-à-dire $C\, d''\, T = 0$. Cette condition avec (5.4) entraîne $r_0 = \mathrm{Cte}$; les équations d'Einstein précisent que cette constante est zéro; en général, on se trouve dans le cas des équations d'Einstein avec constante cosmologique.

L'expression de $d'\, T$ s'écrit :

PROPOSITION :

$$d'\, T = C\, d'\, (E + \star E \star) = C\, e'_F\, \nabla F + C\, e'_{*F}\, \nabla \star F = i''_F\, \nabla F + i''_{*F}\, \nabla \star F.$$

Démonstration. — On a $d'\, T = -\, C\, (d'\, T \wedge g) = C\, d'\, (E + \star E \star)$. Ensuite, étant donné $dF = d \star F = 0$, on tire aussi : $d'\, E = e'_F\, \nabla F$, $d' \star E = e'_{*F}\, \nabla \star F$. Enfin, si $dF = d \star F = 0$, il résulte :

$$C\, \nabla F = C\, \nabla \star F = 0.$$

On s'aperçoit donc qu'en général $d'\, T = 0$ n'est pas vrai.

7. LE CAS DE W SINGULIER

D'une façon semblable à celle de Lichnerowicz [4] nous posons :

DÉFINITION. — *Une (quelconque) double 2-forme symétrique* $W \neq 0$ *se dit « singulière » « avec vecteur fondamental » l, s'il existe un vecteur $l \neq 0$, tel que*

$$i'_l\, W = i'_l \star W = 0.$$

Il est clair qu'un vecteur fondamental est défini à un facteur numérique près.

Étant $i'_l \star W = \star\, e'_l\, W$, on remarquera que $i'_l \star W = 0 \Leftrightarrow e'_l\, W = 0$.

W sera dans la suite une double 2-forme singulière avec vecteur fondamental l.

On voit d'abord facilement que l est un vecteur isotrope.

PROPOSITION : $l^2 = 0$.

Démonstration : $0 = i'_l e'_l \mathrm{W} = l^2 \mathrm{W} - e'_l i'_l \mathrm{W} = l^2 \mathrm{W}$, d'où $l^2 = 0$.
On peut alors démontrer la réduction remarquable suivante de W (*voir* aussi [4]).

PROPOSITION. — *Il existe une double* 1-*forme* b, *telle que* $\mathrm{W} = (l \otimes l) \wedge b$; *de plus,*

$$\mathrm{C} \star \mathrm{B} = 0 = i'_l b, \qquad b^2 > 0, \qquad \mathrm{CW} = (\mathrm{C}\, b)\, l \otimes l.$$

Enfin, si $\mathrm{W} = (l \otimes l) \wedge b'$, *alors il existe une* 1-*forme* k *telle que* $i'_l k = 0$ *et* $b' = b + k \otimes l + l \otimes k$ *et donc* $b'^2 = b^2$, $\mathrm{C}\, b' = \mathrm{C}\, b$.

Démonstration. — On considère une base quelconque $\beta = (l, e^1, e^2, e^3)$.

Étant donné $e'_l \mathrm{W} = 0 = e''_l \mathrm{W}$, on voit immédiatement, au moyen de β, qu'il existe une double 1-forme b, telle que $\mathrm{W} = e'_l e''_l b$. W étant symétrique, b est symétrique aussi. De $i'_l \mathrm{W} = 0$ et de $l^2 = 0$, on tire aussi que $i'_l b = 0$ ($i''_l b = 0$). De ceci et de (1.5) nous avons

$$\mathrm{CW} = (\mathrm{C}\, b)\, l \otimes l.$$

b étant symétrique, peut être diagonalisé avec des vecteurs propres orthogonaux X_i; pour prouver que $b^2 > 0$, il suffira alors de démontrer que chacun d'eux a un carré négatif. En effet, si pour le vecteur u on a $u^2 = 1$, alors $i_u (l \wedge \mathrm{X}_i) = l^0 \mathrm{X}_i - \mathrm{X}_i^0 l$, étant orthogonal à u, a un carré négatif (« ^{0} » indique la composante selon u); mais, pour l'hypothèse $l^2 = 0 = i_l \mathrm{X}_i$, on a $(l^0 \mathrm{X}_i - \mathrm{X}_i^0 l)^2 = l^{02} \mathrm{X}_i^2$ et donc $\mathrm{X}_i^2 < 0$.

Si $\mathrm{W} = (l \otimes l) \wedge b'$, alors $e'_l e''_l (b - b') = 0$ et on voit donc facilement, au moyen de la base β, qu'il existe une 1-forme k, telle que

$$b - b' = k \otimes l + l \otimes k;$$

enfin $i'_l k = 0$ est une conséquence de $i'_l b = i'_l b' = 0$.

Remarquons que, étant donné $e'_l b \neq 0$ et $i'_l \mathrm{C} \star b = 0$, on a

$$i'_l \star b \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C}\, i'_l \star b = 0.$$

Du fait que $\mathrm{W} = (l \otimes l) \wedge b$ et que $\star \mathrm{W} = - e''_l i'_l \star b$ et de (1.1) on déduit aussitôt :

PROPOSITION : $\mathrm{W} \wedge \mathrm{W} = \mathrm{W} \wedge \star \mathrm{W} = 0$, *c'est-à-dire*

$$(\mathrm{W}, \star \mathrm{W} \star) = (\mathrm{W}, \mathrm{W} \star) = 0.$$

Supposons maintenant que W soit la double 2-forme gravitationnelle. On a alors :

PROPOSITION. — *L'équation* (4.1′) *est équivalent à la condition* $\mathrm{C}\, b = 0$, *ou aussi à* $\mathrm{CW} = 0 = \mathrm{C}^2 \mathrm{W}$.

Démonstration : $0 = CW - (1/4)\, C^2\, W\, g = (C\, b)\, l \otimes l$.

On remarque que, si l'on pose pour un champ électromagnétique quelconque F, $E' = (1/2)\,(F \otimes \star F + \star F \otimes F)$, alors il résulte identiquement $E' + \star E' \star = 0$ [qui est semblable à (4.1)]; si, de plus, F est singulière avec vecteur fondamental l (suivant la définition de Lichnerowicz [4]), alors E' résulte une double 2-forme singulière, pour laquelle sont valables toutes les propriétés établies (jusqu'ici) dans ce paragraphe pour W. Revenant à W et en tenant compte de (4.1) (*voir* aussi [3] et [4]), nous pouvons définir un tenseur analogue à celui de Maxwell :

$$\tau = (1/2)\,(\underline{W}\,\bar{\wedge}\,\underline{W} + \star\,\underline{W}\,\bar{\wedge}\,\star\,\underline{W}).$$

On tire donc :

PROPOSITION : $\tau = b^2\, l \otimes l \otimes l \otimes l$ *(la dépendance est seulement de* W *et non pas de l'arbitraire facteur multiplicatif de* l*).*

Démonstration :

$$\underline{W}\,\bar{\wedge}\,\underline{W} = ((\underline{l} \otimes \underline{l}) \wedge b)\,\bar{\wedge}\,((\underline{l} \otimes \underline{l}) \wedge b) = b^2\, \underline{l} \otimes l \otimes \underline{l} \otimes l.$$

D'après (1.7) on a

$$\star\,\underline{W}\,\bar{\wedge}\,\star\,\underline{W} = (\underline{W}\,\bar{\wedge}\,\underline{W})^{\sim} = b^2\, \underline{l} \otimes l \otimes \underline{l} \otimes l.$$

La condition $CW = 0$ implique

$$r + T + (1/2)\, T_0\, g = 0; \qquad r_0 + 3\, T_0 = 0.$$

Dans le cas particulier d'Einstein on obtient donc $r_0 = T_0 = 0$.
Étant donné $C^2\, W = 0$, l'équation (5.4) devient

$$c\, d''\, T = 0.$$

Nous avons alors les relations différentielles suivantes :

PROPOSITION : $\delta'\, W = (1/2)\, d''\, T$; $d''\, W = \delta'\, W \wedge g$; $C\, \delta'\, W = 0$.

$$\begin{aligned} L'_l\, W &= (1/2)\,(i'_l\, d'\, T \wedge g - e''_l\, d''\, T) \\ &= \star\,[e'_l, \delta']\,\star\, W = \star\,[e'_l, \delta']\, W\,\star = (1/2)\,\star\,(e'_l\, d''\, T)\,\star. \end{aligned}$$

PROPOSITION : $i'_l\, \delta'\, W = 0$, *c'est-à-dire* $i'_l\, d''\, T = 0$ *et donc* $C\, e''_l\, d''\, T = 0$.

Démonstration :

$$0 = e'_l\, d'\, W = \star\, i'_l\, \star\, d'\, W = -\star\, i'_l\, \star\, d'\, \star\, W\, \star = -\star\, i'_l\, \delta'\, W\, \star.$$

Supposons maintenant que $dl = 0$. Cette condition avec $l^2 = 0$ implique aussi [4] : $\nabla_l\, l = 0$; de $e'_l\, W = 0$ on tire encore $e'_l\, d'\, T \wedge g = 0$. Nous pouvons enfin obtenir la généralisation d'une remarquable relation différentielle, valable dans le cas $T = 0$, qui, toutefois, n'a pas une simple interprétation physique dans le cas général.

PROPOSITION : $D = 2 \nabla_2 W - \delta l W = (1/2) (\star e_l'' d' T \star - e_l'' d' T)$.

Démonstration. — D'après (1.9) et (1.10), on a

$$L_l' W - \star L_l' \star W = L_l' W - \star L_l' W \star = 2 \nabla_l W - \delta l W + W \wedge_L dl,$$

mais puisque $dl = 0$, l'équation (7.1) prouve le résultat.

Dans le cas particulier où $D = 0$, on tire un résultat classique [4], qui possède une claire signification physique :

PROPOSITION. — *Si* $D = 0$, *alors* $\delta (b^2 l) = 0$ *et donc* $\delta\tau = 0$.

Démonstration. — Étant $\nabla_2 l = 0$, on a

$$2 \nabla_l W - \delta l W = (l \otimes l) \wedge (2 \nabla_l b - \delta l b) = D = 0,$$

d'où, en faisant le produit scalaire extérieur par b, on obtient

$$l \otimes l (\nabla_l b^2 - \delta l b^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\nabla_l b^2 - \delta l b^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta (b^2 l) = 0.$$

De celle-ci et de $\nabla_l l = 0$ on a enfin $\delta\tau = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. B. MARATHE, *Spaces admitting gravitational fields* (*J. Math. Phys.*, avril 1973) (à paraître).

[2] K. B. MARATHE, *Generalized field equation of gravitation* (*Rendiconti di Matematica*, Roma, vol. 6, n° 5, 1973) (à paraître).

[3] LE THAN-PHONG, *Contribution à l'étude de la radiation gravitationnelle* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. XIV, fasc. 2, 1964).

[4] A. LICHNEROWICZ, *Ondes et radiations électromagnétiques et gravitationnelles en relativité générale* (*Annali di Matematica*, vol. 50, 1960, p. 1-95).

[5] PHAM MAU QUAN, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1969.

(Manuscrit reçu le 9 avril 1973.)