ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

RADU ROSCA

Sur les hypersurfaces isotropes de défaut 1 incluses dans un espace hyperbolique de type normal

Annales de l'I. H. P., section A, tome 20, n° 3 (1974), p. 237-243

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__20_3_237_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XX, n° 3, 1974, p. 237-243.

Section A :
Physique théorique.

Sur les hypersurfaces isotropes de défaut 1 incluses dans un espace hyperbolique de type normal [1]

par

Radu ROSCA

Directeur de recherche à l'Institut de Mathématiques
de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie,
Calea Griviçaei 21, Bucarest 12.

RÉSUMÉ. — Soit V^n une hypersurface contenue dans une C^∞-variété hyperbolique V^{n+1} à $n + 1$ dimensions. Si la matrice jacobienne de l'application $x : V^n \to V^{n+1}$ est partout de rang $n - 1$ on dit que V^n est isotrope de défaut 1 (notée $V^n(1)$. La normale ξ en chaque point $p \in V^n(1)$ est isotrope (réelle) et est contenue dans l'espace tangent $\mathcal{T}_p(V^n(1))$ à $V^{n+1}(1)$ en p. Une $V^n(1)$ possède $n - 1$ courbures principales k_i $(i = 2, \ldots, n)$ que l'on définit et le produit $K = k_1 \ldots k_{2n}$ est appelé la pseudo-courbure totale (ou courbure de Lipschitz-Killing) associée à x. L'hypersurface $V^n(1)$ est dite presque ombilicale ou presque minimale selon que l'on a

$$k_2 = k_3 = \ldots = k_n \quad \text{ou} \quad \Sigma_i k_i = 0.$$

(Dans le cas $n = 3$, les hypersurfaces $V^3(1)$ incluses dans un espace-temps de Vaidya sont presque ombilicales). Les covecteurs du genre espace de l'espace cotangent $\mathcal{T}^*_p(V^n(1))$ définissent une $(n - 1)$-forme $\Omega \in \Lambda^{n-1}(V^n(1))$ de rang $(n - 1)$ (dénommée $(n - 1)$-forme principale associée à x) et la condition nécessaire et suffisante que $V^n(1)$ soit presque minimale est que Ω soit fermée.

La transformée de Hodge $*\nabla\xi$ de la 1-forme vectorielle $\nabla\xi$ est liée à K et Ω par la relation $*\nabla\xi = i\xi K\Omega$ et dans le cas où l'espace V^{n+1} est plat, la courbure sectionnelle (au sens d'Otsuki) de deux champs tangents quelconques est égale en chaque point à K. Si une certaine condition d'inté-

[1] Conférence faite au séminaire de Broglie, le 17 octobre 1972.

grabilité est satisfaite, il existe une seconde hypersurface isotrope $\tilde{V}^n(1)$ dénommée l'associée de $V^n(1)$, et différentes propriétés mettant en jeu le couple $[V^n(1), \tilde{V}^n(1)]$ sont discutées. Si $V^n(1)$ possède un certain champ concourant (dans le sens de K. Yano et B. Y. Chen) alors (*i*) elle est équi-affine, (*ii*) l'hypersurface associée $\tilde{V}^n(1)$ existe, (*iii*) la variété spatiale $V^n(1) \cap \tilde{V}^n(1)$ est ombilicale. Finalement on munit $V^n(1)$ d'une structure presque cosymplectique locale, ayant ξ pour champ de Reeb et l'on développe certaines propriétés de cette structure.

ABSTRACT. — Let V^n be a hypersurface included in a hyperbolic C^∞-manifold V^{n+1} of dimension $n+1$. If the jacobien matrix of the mapping $x : V^n \to V^{n+1}$ is of rank $n-1$ everywhere, we say that V^n is null of defect 1 (denoted by $V^n(1)$). The normal ξ at every point $p \in V^n(1)$ is a null (real) vector and is contained in the tangent space $T_p(V^n(1))$ of $V^n(1)$ at p. $V^n(1)$ possesses $n-z$ principal curvatures k_i $(i = 2, \ldots, n)$ which are defined, and the product $K = k_2 \ldots k_n$ is called the total pseudo-curvature (or Lipschitz-Killing curvature) associated with x. Further, $V^n(1)$ is termed almost ombilical or almost minimal if one has

$$k_2 = k_3 = \ldots = k_n \quad \text{or} \quad \Sigma_i k_i = 0$$

respectively (in the case $n = 3$ a hypersurface $V^3(1)$ included in a Vaidya space-time is almost ombilical). The space-like covectors of the cotangent space $\mathcal{T}_p^*(V^n(1))$ define a $(n-1)$-form $\Omega \in \Lambda^{n-1}(V^n(1))$ of rank $n-1$ and the necessary and sufficient condition that $V^n(1)$ be almost minimal is that Ω be closed. Hodge transform $*\nabla\xi$ of $\nabla\xi$ is linked to K and Ω by $*\nabla\xi = i\xi K\Omega$ and if V^{n+1} is flat then the sectional curvature (in Otsuki's sense) of any two tangential fields is equal to K. If a certain condition of integrability is fulfilled, then there exist a second null hypersurface $\tilde{V}^n(1)$ associated with $V^n(1)$ and different properties involving the pair $[V^n(1), \tilde{V}^n(1)]$ are discussed. Next if $V^n(1)$ possesses a certain concurrent field (in the sense of K. Yano et B. Y. Chen) then (*i*) $V^n(1)$ is équi-affine; (*ii*) the associated hypersurface $\tilde{V}^n(1)$ exists; (*iii*) the space-like manifold $V^n(1) \cap \tilde{V}^n(1)$ is ombilical. Finally an almost cosymplectic structure having ξ as Reeb's field is defined on $V^n(1)$ and some properties of this structure are formalated.

---

1. Du fait que dans un espace pseudo-riemannien V_{pr}^n il n'est plus possible de définir la distance entre deux points comme la borne inférieure de la longueur des arcs qui les joignent, la géométrie des variétés pseudo-riemanniennes est encore assez incomplète. Le cas où l'espace V_{pr}^n est du type hyperbolique normal (l'indice de la métrique de V_{pr}^n est 1) étant particulièrement important pour les applications physiques, nous avons pensé que l'étude des variétés isotropes de différents défauts incluses dans un pareil espace pourrait être aussi intéressante pour des considérations relativistes.

Je me propose de parler ici de quelques résultats (obtenus en collaboration avec le Professeur L. Vanhecke de Louvain) concernant les hypersurfaces isotropes de défaut 1 (étude que j'ai commencée il y a déjà deux ans [*1*]) d'un espace hyperbolique $V^n_{\mathscr{L}}$. Soit alors $V^n_{\mathscr{L}}$ un espace hyperbolique à n dimensions et de classe C^∞ et soit $T_p(V^n_{\mathscr{L}})$ l'espace tangent en $p \in V^n_\alpha$. On peut écrire $T_p(V^n_{\mathscr{L}}) = M^2_p \oplus \Sigma^{n-2}_p$ où M^2_p et Σ^{n-2}_p sont respectivement un 2-plan de Minkowski et un $(n-2)$-plan spatial en p. Soit $e(V^n_{\mathscr{L}})$ le fibré principal des repères orthonormés (dont le groupe structural est le groupe de Lorentz $\mathscr{L}(n)$) et soit $(e_A) \in e(V^n_{\mathscr{L}})$ $(A, B = 1, \ldots, n)$ un tel repère. Moyennant une rotation lorentzienne dans M^2_p, on déduit des deux vecteurs unitaires e_1, e_n qui déterminent M^2_p, deux vecteurs isotropes réels normés ξ_1 et $\xi_n (\langle \xi_1, \xi_n \rangle = 1)$. Ces vecteurs définissent avec les $n-2$ vecteurs spatiaux ξ_r un repère *quasi-orthonormé* (ξ_A) en chaque point $p \in V^n_{\mathscr{L}}$. Si $(\bar{\alpha}^A)$ est le corepère associé à (ξ_A), l'élément linéaire dp rapporté à (ξ_A) s'écrit

$$dp = \bar{\alpha}^A \otimes \xi_A \tag{1}$$

et la métrique de $V^n_{\mathscr{L}}$ en termes de $\bar{\alpha}^A$ est

$$ds^2 = 2\bar{\alpha}^1\bar{\alpha}^n - \sum_r (\bar{\alpha}^r)^2. \tag{2}$$

Notons par $\bar{\alpha}^A_B = \bar{l}^A_{BC}\bar{\alpha}^C$ les formes de connexion sur le fibré $\xi(V^n_\alpha)$ des repères quasi-orthonormés. V^n_α est alors structurée par la connexion

$$\bar{\nabla}\xi_A = \bar{\alpha}^B_A \otimes \xi_B \tag{3}$$

et puisque cette connexion est symétrique, le premier et le second groupe d'équations de structure s'écrivent respectivement

$$d \wedge \bar{\alpha}^A = \bar{\alpha}^B \wedge \bar{\alpha}^A_B, \tag{4}$$

$$d \wedge \bar{\alpha}^A_B = \bar{\Omega}^A_B + \bar{\alpha}^C_B \wedge \bar{\alpha}^A_C \tag{4'}$$

où $\bar{\Omega}^A_B$ sont les 2-formes de courbure.

2. Soit maintenant V^n une hypersurface contenue dans un espace hyperbolique $V^{n+1}_{\mathscr{L}}$. Si le rang de la matrice fondamentale de l'inclusion $x : V^n \to V^{n+1}_{\mathscr{L}}$ est $n-1$ partout, on dit que V^n est *isotrope de défaut* 1 (notée $V^n(1)$). Eu égard à la métrique (2) (où l'on remplace n par $n+1$) une hypersurface $V^n(1)$ est définie soit par $\bar{\alpha}^{n+1} = 0$, soit par $\bar{\alpha}^1 = 0$, si chacune de ces équations est complètement intégrable. Dans le cas où les deux hypersurfaces $V^n(1)$ existent simultanément, on dit qu'elles forment un *couple d'hypersurfaces associées*. Les hypersurfaces d'un pareil couple se coupent suivant une *variété spatiale* de codimension 2.

Exemple. — Dans le cas d'un espace-temps doué d'une métrique de Vaidya [2] on peut poser

$$\bar{\alpha}^1 = dr + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right)du, \qquad \bar{\alpha}^3 = r \sin \theta d\varphi,$$
$$\bar{\alpha}^2 = rd\theta \qquad , \qquad \bar{\alpha}^4 = du,$$

et on constate qu'il existe en chaque point un pareil couple.

Les résultats étant les mêmes, considérons l'hypersurface $V^n(1)$ définie par $\bar{\alpha}^{n+1} = 0$. Le vecteur isotrope ξ_1 (dénommé *vecteur caractéristique*) est par conséquent simultanément tangent et normal en chaque point p à $V^n(1)$.

Remarque. — Ce vecteur isotrope satisfait à $\nabla_{\xi_1}\xi_1 \propto \xi_1$ et par conséquent les courbes isotropes tangentes à ξ_1 sont des géodésiques. Cette propriété généralise la définition de $V^3(1)$ incluse dans un espace-temps. La seconde forme fondamentale associée à l'inclusion x est par conséquent la forme quadratique $\varphi = - \langle dp, \nabla\xi_1 \rangle$ et sans perte de généralité, on peut diagonaliser φ. Le repère (ξ_A) est dans ce cas un repère *quasi-orthonormé principal* et cette hypothèse sera faite dorénavant. La forme φ met en évidence $n - 1$ invariants différentiels k_r que nous dénommons les pseudo-courbures principales de $V^n(1)$ en p.

Remarque. — Cette propriété des hypersurfaces isotropes $V^n(1) \subset V_{\mathcal{L}}^{n+1}$ d'avoir $n - 1$ courbures est analogue à celle des courbes isotropes incluses dans un espace riemannien où pseudo-riemannien. Si cet espace est à $n + 1$ dimensions, alors la courbe isotrope possède $n - 1$ courbures au lieu de n. (Il s'agit évidemment des courbes simplement isotropes).

Les scalaires $K = \Pi k_r$, $H = \frac{1}{n-1}\sum k_r \, (r = 2, \ldots, n)$ sont dénommés respectivement la *pseudo-courbure eulérienne* et la *pseudo-courbure moyenne* associée à l'inclusion x. Si on a $k_2 = \ldots = k_n$, $V^n(1)$ est appelée *presque ombilicale* et si $H = 0$, nous disons que $V^n(1)$ est *presque minimale.*

Remarque. — Dans le cas d'une métrique de Vaidya, tout couple d'hypersurfaces isotropes associées est formé par des hypersurfaces presque ombilicales.

Soient $i, j = 1, \ldots, n$ les indices tangentiels sur $V^n(1)$ et α^i, α_B^A respectivement les formes duales et de connexion induites par l'inclusion $x : V^n(1) \to V_{\mathcal{L}}^{n+1}$. Les formes $\Omega \in \Lambda^{n-1}(V^n(1))$ et $\alpha \in \Lambda^1(V^n(1))$ définies respectivement par

$$\Omega = \alpha^2 \wedge \alpha^3 \wedge \ldots \wedge \alpha^n, \tag{5}$$

$$\alpha = \sum_r \alpha^r \tag{6}$$

sont dénommées la $(n-1)$-*forme principale* et la 1-*forme principale* associée à x. A l'aide des équations (4), on arrive au

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une hypersurface isotrope* $V^n(1)$ *soit presque minimale est soit que la forme* Ω *soit fermée, soit que* ξ_1 *soit un champ caractéristique pour* α *(c'est-à-dire* $\mathscr{L}_{\xi_1}\alpha = 0$*). Dans ce cas l'équation* $\alpha = 0$ *est complètement intégrable et elle définit des sous-variétés de codimension 2 qui sont elles aussi isotropes de défaut 1.*

3. Soit l'application différentiable $\mathscr{A} : x(p) \to x(p) + f\xi_1 (f \in \mathscr{D}(V^n(1))$. A l'aide de (1) et (3) on trouve qu'elle définit pour *toute* fonction f une nouvelle hypersurface isotrope de défaut 1, soit $\bar{V}^n(1)$. De plus, si l'hypersurface de départ est presque ombilicale, alors l'application $\mathscr{A}$ est *conforme.*

4. Le second vecteur isotrope qui définit M_p^2, soit ξ_{n+1}, sera dénommé le vecteur isotrope *associé* au vecteur caractéristique ξ_1 et la forme

$$\varphi_a \equiv - \langle dx(p), \nabla\xi_{n+1} \rangle$$

la forme associée à φ. D'autre part, soit

$$\Psi \equiv \langle d^2x(p), d^2x(p) \rangle$$

la seconde forme métrique fondamentale (dans le sens de E. Bompiani). Nous disons que $V^n(1)$ est *doublement isotrope* de défaut 1 si le tenseur de Ψ est lui aussi de rang $n-1$. Ces définitions permettent d'énoncer le

THÉORÈME. — *Soit l'inclusion* $x : V^n(1) \to V_{\mathscr{L}}^{n+1}$ *et soit* φ *la seconde forme fondamentale associée à x. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'hypersurface* $V^n(1)$ *soit doublement isotrope de défaut 1 est que la forme quadratique* φ_a *associée à* φ *soit identiquement nulle.*

5. En procédant comme dans [*3*], on peut définir la transformée de Hodge $*\nabla\xi_1$ (ou star operator) de ξ_1 par

$$*\nabla\xi_1 = -\frac{1}{(n-1)!}\,''\,|\,|''\xi_1\underbrace{\nabla\xi_1 \ldots \nabla\xi_1}_{n-1 \text{ fois}}{}''\,|\,|''. \tag{7}$$

Moyennant l'application bijective $\xi_A \to X^{(n-1)}\xi_A$ (et après préalable orientation du repère (ξ_A)) et en faisant usage de (1) et (3), on obtient la formule remarquable

$$_*\nabla\xi_1 = -c\xi_1 K\Omega, \qquad c = (-1)^{\frac{3n}{2}} \tag{8}$$

qui lie $*\nabla\xi_1$ à la pseudo-courbure eulérienne K et à la $(n-1)$-forme principale Ω.

6. La normale ξ_1 étant aussi tangente, pour pouvoir introduire la fonction support f du point générique $x(p) \in V^n(1)$ (dans le cas où $V_{\mathscr{L}}^{n+1}$

est un espace de Minkowski, nous remplaçons ξ_1 en tant que normale par le vecteur isotrope associé. On peut donc écrire

$$x(p) = v + f\xi_{n+1} \tag{9}$$

où v est un champ tangentiel à $V^n(1)$. En vertu du même principe, les formes C et D de Chern, adaptées à une hypersurface $V^n(1)$, s'écrivent

$$C = {''}| |{''} x(p) \underbrace{\nabla\xi_1 \ldots \nabla\xi_1}_{n-1 \text{ fois}} dx(p){''}| |{''}, \tag{10}$$

$$D = {''}| |{''} \xi_{n+1} \underbrace{\nabla\xi_1 \ldots \nabla\xi_1}_{n-1 \text{ fois}} dx(p){''}| |{''}, \tag{10'}$$

et compte tenu de (9) on retrouve la formule de Chern : $C = fD$.

7. Cherchons maintenant les hypersurfaces $V^n(1)$ pour lesquelles un vecteur $m \in M_p^2$ est concourant sur $V^n(1)$ dans $V_{\mathscr{L}}^{n+1}$. Conformément à la définition donnée dans [*4*], on doit écrire

$$dx(p) + \nabla m = 0. \tag{11}$$

A l'aide de (1) et (3) on trouve que les hypersurfaces $V^n(1)$ satisfaisant à (11) possèdent les propriétés suivantes :

(*i*) Elles sont équi-affines, c'est-à-dire la *composante d'homothétie* α_1^1 (elle est unique) est un cobord.

(*ii*) L'hypersurface isotrope associée $\tilde{V}_{(1)}^n$ existe et si l'une des hypersurfaces du couple $[V^n(1), \tilde{V}_{(1)}^n]$ est presque ombilicale, l'autre l'est aussi. De plus, dans ce cas la variété spatiale $V^{n-1} = V^n(1) \cap \tilde{V}_{(1)}^n$ est ombilicale.

(*iii*) Si le vecteur m coïncide avec ξ_1, alors $V^n(1)$ est presque ombilicale.

Les hypersurfaces isotropes pour lesquelles la relation (11) est satisfaite, seront notées par $\tilde{V}_{(1)}^n$.

8. Supposons maintenant que $n = 2q + 1$. On peut dans ce cas définir sur $V^n(1)$ une structure presque cosymplectique locale $\mathscr{C}(F, \omega)$ déterminée par la 2-forme

$$F = \alpha^2 \wedge \alpha^3 + \ldots + \alpha^{2q} \wedge \alpha^{2q+1}$$

de rang $2q$ et par le covecteur caractéristique α^1, soit

$$\omega = \alpha^1 .$$

Faisons l'hypothèse que l'hypersurface isotrope $V^{2q+1}(1)$ sur laquelle on a défini la structure $\mathbb{C}(F, \omega)$ est presque ombilicale (avec ρ comme valeur commune des pseudo-courbures) est du type $\tilde{V}_{(1)}^n$ et que l'hypersurface associée est totalement géodésique. Dans ce cas, un champ horizontal quelconque HX de $\mathbb{C}(F, \omega)$ est un *automorphisme* (local) de $F(\mathscr{L}_{HX}F = 0)$ si $dl\eta(HX)^2 - 2\rho\alpha^1$ est une forme *semi-basique* de la structure $\mathbb{C}(F, \omega)$. Supposons enfin que $\tilde{V}_{(1)}^{2q+1}$ n'est pas presque ombilicale mais a la composante d'homothétie nulle. Dans ce cas, si la structure presque cosymplectique $\mathbb{C}(\mathrm{F}, \omega)$ devient cosymplectique ($d \wedge \mathrm{F} = 0$, $d \wedge \omega = 0$) alors $\tilde{\mathrm{V}}_{(1)}^{2q+1}$ est nécessairement presque minimale et son associée $\tilde{\mathrm{V}}_{(1)}^{2q+1}$ est à pseudo-courbure moyenne constante.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] R. ROSCA, Sur les hypersurfaces isotropes de défaut 1 incluses dans une variété lorentzienne, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **272**, Série A.
[*2*] W. ISRAEL, Differential forms in general relativity, *Comm. of the Dublin Inst. f. Adv. Studies*, A, 19, 1970.
[*3*] Kr. AMUR, Vector forms and integral formulas for hypersurfaces in Euclidean space, *J. Diff. Geom.*, 3, 1969.
[*4*] K. YANO, B. Y. CHEN, On the concurrent vector fields of unimersed manifolds, *Kodari Math. Sem. Rep.*, 23, 1971.

(Manuscrit reçu le 24 juillet 1973).