ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

R. F. BILIALOV

Équations du mouvement dans une théorie minkowskienne de la gravitation

Annales de l'I. H. P., section A, tome 20, nº 3 (1974), p. 257-267
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__20_3_257_0>

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XX, n° 3, 1974, p. 257-267.

Section A :
Physique théorique.

Équations du mouvement dans une théorie minkowskienne de la gravitation

par

R. F. BILIALOV

Institut Henri Poincaré.
Laboratoire de Physique Théorique Associé au CNRS,
Université de Kazan. Faculté de Physique.

RÉSUMÉ. — Une méthode nouvelle de déduction des équations de Lorentz-Dirac en Electrodynamique est obtenue. Cette méthode est appliquée pour obtenir les équations du mouvement dans une théorie minkowskienne de la gravitation, décrite par le tenseur symétrique $\psi_{\alpha\beta}$ avec la condition $\partial^\alpha\psi_{\alpha\beta} \doteq 0$.

INTRODUCTION

Les équations du mouvement d'une particule chargée avec termes de rayonnement par la méthode de renormalisation de masse ont été obtenues par Dirac [*1*]. Elles ont la forme :

$$m\dot{v}^\alpha = ev_\beta\left(f^{\alpha\beta} + \frac{2}{3}e[\ddot{v}^\alpha v^\beta - v^\alpha\ddot{v}^\beta]\right), \tag{1}$$

où m est la masse de particule, e sa charge, $V^\alpha = \dfrac{dz^\alpha}{ds}$, $Z^\alpha = Z^\alpha(s)$ les coordonnées de la particule, S le temps propre (le point signifiant la différentiation par rapport à S), $f^{\alpha\beta}$ le champ électromagnétique créé par les autres sources. Pour obtenir les équations (1), Dirac considère le flux du tenseur d'impulsion-énergie $T_{em}^{\alpha\beta}$ du champ électromagnétique $F^{\alpha\beta}$ à travers l'hypersurface Σ. Le champ $F^{\alpha\beta}$ se présente comme la somme du champ extérieur $f^{\alpha\beta}$ et du champ retardé $f_{\text{ret}}^{\alpha\beta}$ de la particule. L'hypersurface Σ se définit par les conditions :

$$x^\alpha = z^\alpha(s) + \varepsilon\gamma^\alpha, \quad \varepsilon = \text{const}, \quad \varepsilon \ll 1, \quad s_1 \leqslant s \leqslant S_2,$$
$$(\gamma, \gamma) = \eta_{\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta = \gamma^{0^2} - \gamma^{1^2} - \gamma^{2^2} - \gamma^{3^2} = -1, \quad (x - z(s), v(s)) = 0.$$

Le développement de ce flux par rapport à ε, limité aux deux premiers termes, a la forme

$$\int_\Sigma T_{em}^{\alpha\beta} dS_\beta = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{e^2}{2\varepsilon}\dot{v}^\alpha - ev_\beta\left(f^{\alpha\beta} + \frac{2}{3}e\ddot{v}^{[\alpha}v^{\beta]}\right)\right\} ds. \tag{2}$$

Pour obtenir les équations (1) il suffit de postuler que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\Sigma T_{em}^{\alpha\beta} dS_\beta - \int_{S_1}^{S_2} \kappa\dot{v}^\alpha ds \right) = 0, \qquad \kappa = \frac{e^2}{2\varepsilon} - m.$$

Mais l'application directe de la méthode de Dirac dans le cas des autres actions, par exemple des actions gravitationnelles qui se décrivent par le tenseur symétrique $\psi_{\alpha\beta}$ avec la condition $\partial^\alpha\psi_{\alpha\beta} = 0$ dans les théories minkowskiennes de la gravitation, devient difficile. En effet, le tenseur d'impulsion-énergie et les potentiels retardés ont une structure compliquée. Pour cette raison, il est intéressant de trouver une méthode équivalente à celle de Dirac, mais susceptible de rendre les calculs plus faciles dans les autres cas.

Le lien formel entre le tenseur d'impulsion-énergie d'un système champ-particule et les équations du mouvement est indiqué par Trautman [*2*]. Dans le cas électromagnétique, on obtient :

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} + \int_{-\infty}^{\infty} (- m\ddot{z}^\alpha + eF^{\alpha\beta}(x)\dot{z}_\beta)\delta^4(x - z(s)) ds = 0 \tag{3}$$

avec

$$T^{\alpha\beta} = T_{em}^{\alpha\beta} + m\int_{-\infty}^{\infty} \dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta\delta^4(x - z(s)) ds, \quad T_{em}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + F^{\alpha\mu}F_\mu{}^\beta\right).$$

Les lois de conservation (3) expriment une condition formelle car $F^{\alpha\beta}$ devient infini sur la ligne d'univers de la particule. Pour cette raison, l'intégrale (3) et aussi $\partial_\beta T^{\alpha\beta}$ n'ont pas de sens.

Dans ce travail, nous allons montrer qu'en remplaçant la distribution ponctuelle de charge par une distribution de volume, on peut passer de la considération de flux $\int_\Sigma T_{em}^{\alpha\beta} dS_\beta$ et de l'analogue de (3) pour cette distribution de volume à la considération de l'intégrale quadridimensionnelle de volume, borné par Σ et par les hypersurfaces Σ_i ($i = 1, 2$),

$$\Sigma_i = \{ x : x = z(s_i) + R\gamma, 0 \leqslant R \leqslant \varepsilon \} .$$

Nous allons établir le résultat suivant : si l'on exige que la partie finie, non identiquement nulle de l'intégrale précédente, ait une limite nulle quand la distribution de volume tend vers la distribution ponctuelle, on obtient alors l'équation (1).

Ce résultat obtenu, nous le considérons comme un axiome dans le cas des autres champs et trouvons les équations avec termes de rayonnement dans les théories minkowskiennes ci-dessus.

CAS ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Par la suite, au lieu de coordonnées cartésiennes x^α, il est plus commode d'utiliser des coordonnées curvilignes S, R, θ, φ :

$$x^\alpha = z^\alpha(s) + R\gamma^\alpha, (\gamma, \gamma) = -1, (\gamma, v) = 0, \gamma^\alpha(s, \theta, \varphi) = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \equiv (\gamma^0, \overline{\gamma}) ,$$

$$\gamma^0 = (\overline{v}\overline{e}), \overline{\gamma} = \overline{e} + \frac{\overline{v}}{1 + v^0}(\overline{v}\overline{e}), \overline{e} = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta),$$

$$v^\alpha = (v^0, \overline{v}) .$$

Posons aussi

$$\kappa = (\gamma, \dot{v}), \qquad \dot{\kappa} = (\gamma, \ddot{v}) .$$

Il vient alors

$$\frac{D(x^0, x^1, x^2, x^3)}{D(s, R, \theta, \varphi)} = R^2(1 - Rk) \sin\theta , \quad \partial_\alpha s = \frac{v_\alpha}{1 - Rk}, \quad \partial_\alpha R = -\gamma_\alpha .$$

$$\partial_\alpha(R\gamma^\beta) = \delta_\alpha^\beta - \frac{v^\beta v_\alpha}{1 - Rk},$$

$$\partial_\alpha[R(u, \gamma)] = u_\alpha + \frac{\{ R(\gamma, \dot{u}) - (v, u) \} v_\alpha}{1 - Rk} \quad \text{pour} \quad U^\alpha = U^\alpha(s).$$

Pour le point ξ, les coordonnées curvilignes correspondantes et les quantités qui lui sont associées seront désignées par les mêmes symboles mais avec la notation prime. Par exemple, $K'(s') = (\gamma'(s'), \dot{v}(s'))$. L'argument s' est distingué, parce que dans les calculs, on est obligé de changer s' en s. Si s' remplacé par s, nous n'écrirons aucun argument dans l'indication de ces quantités.

a) Choix de la distribution de volume. Les lois de conservation correspondantes.

Soit ${}^{\delta}\rho(\mathrm{R})$ de classe C^2, $\geqslant 0$, nulle en dehors de l'intervalle $(\delta, 2\delta)$ et telle que :

$$4\pi \int_{\delta}^{2\delta} \mathrm{R}^2\, {}^{\delta}\rho(\mathrm{R}) d\mathrm{R} = 1$$

Supposons que ${}^{\delta}j^{\alpha} = e^{\delta}\rho(\mathrm{R})v^{\alpha}(s)$ représente le courant dans le cas d'une distribution de la charge en volume. Considérons l'action relative au système : champ électromagnétique extérieur + champ retardé de la distribution en volume + distribution en volume de la charge sous la forme :

$$\mathrm{S} = -\int \mathscr{L} dx,\ \mathscr{L} = m\,{}^{\delta}\rho\sqrt{v^{\alpha}v^{\beta}\eta_{\alpha\beta}} + {}^{\delta}j^{\alpha}\,{}^{\delta}\mathrm{A}_{\alpha}(x) + \frac{1}{4\pi}\,{}^{\delta}\mathrm{F}_{\alpha\beta}(x)\,{}^{\delta}\mathrm{F}^{\alpha\beta}(x),$$

où

$${}^{\delta}\mathrm{A}_{\alpha} = a_{\alpha} + {}^{\delta}a_{\alpha},\quad {}^{\delta}\mathrm{F}_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} + {}^{\delta}f_{\alpha\beta},\quad f_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}a_{\beta} - \partial_{\beta}a_{\alpha},\quad {}^{\delta}f_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}{}^{\delta}a_{\beta} - \partial_{\beta}{}^{\delta}a_{\alpha},$$

$\square a_{\alpha} = 0$; ${}^{\delta}a_{\alpha}$ est la solution retardée des équations

$$\square\, {}^{\delta}a_{\alpha} = 4\pi\,{}^{\delta}j_{\alpha}. \tag{4}$$

Pour cette action, les lois de conservation s'écrivent sous la forme :

$$\partial_{\beta}{}^{\delta}\mathrm{T}^{\alpha\beta} - \frac{m\,{}^{\delta}\rho v^{\alpha}}{1 - \mathrm{R}k} + e\,{}^{\delta}\rho v_{\beta}{}^{\delta}\mathrm{F}^{\alpha\beta} = 0,$$

où

$${}^{\delta}\mathrm{T}^{\alpha\beta} = m\,{}^{\delta}\rho v^{\alpha}v^{\beta} + {}^{\delta}\mathrm{T}^{\alpha\beta}_{em}.$$

La solution ${}^{\delta}a_{\alpha}$ des équations (4) est de classe C^2, si $z^{\alpha}(s)$ est de classe C^4. Elle est de la forme

$${}^{\delta}a^{\alpha} = e\int \frac{v^{\alpha}(s')\,{}^{\delta}\rho(\mathrm{R}')(1 - \mathrm{R}'\kappa'(s'))\mathrm{R}'^2 \sin\theta' d\mathrm{R}' d\theta' d\varphi'}{(x - \xi(s'), \dot{\xi}(s'))},$$

où s' est défini comme la solution de l'équation $(x - \xi(s'), x - \xi(s')) = 0$ avec x^{α}, R', θ', φ' fixés. Cette solution satisfaisant la condition $x^0 - \xi^0(s') \geqslant 0$. Aussi

$${}^{\delta}f^{\alpha\beta} = e\int\left[\frac{v^{[\alpha}(s')\dot{v}^{\beta]}(s')}{1 - \mathrm{R}'\kappa'(s')}\,{}^{\delta}\rho(\mathrm{R}') - {}^{\delta}\dot{\rho}(\mathrm{R}')\gamma'^{[\alpha}(s')v^{\beta]}(s')\right] \frac{1 - \mathrm{R}'\kappa'(s')}{(x - \xi(s'), \dot{\xi}(s'))}\mathrm{R}'^2 d\mathrm{R}' d\Omega', \tag{5}$$

où

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\mathrm{R}},\qquad d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Supposons $\varepsilon > 2\delta$. ${}^{\delta}T^{\alpha\beta}$, ${}^{\delta}T^{\alpha\beta}_{em}$ sont de classe C^1. Désignons par Ω le volume borné par les hypersurfaces Σ, Σ_1, Σ_2. Pour la $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\Sigma} T^{\alpha\beta}_{em} dS_\beta$ nous pouvons alors écrire

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Sigma} T^{\alpha\beta}_{em} dS_\beta = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Sigma} \lim_{\delta\to 0} {}^{\delta}T^{\alpha\beta} dS_\beta = \lim_{\varepsilon\to 0,\, \delta\to 0} \int_{\Sigma} {}^{\delta}T^{\alpha\beta} dS_\beta$$
$$= \lim_{\delta\to 0} \int_{\Omega} \left(\frac{m\, {}^{\delta}\rho \dot{v}^\alpha}{1 - R\kappa} - e\, {}^{\delta}\rho\, {}^{\delta}F^{\alpha\beta} v_\beta \right) dx - \lim_{\varepsilon\to 0,\, \delta\to 0} \int_{\Sigma_1+\Sigma_2} {}^{\delta}T^{\alpha\beta} dS_\beta . \quad (6)$$

b) **Calcul de** $e \int {}^{\delta}\rho(R)\, {}^{\delta}f^{\alpha\beta}(x) v_\beta(s) dx$.

Soit $\tau = \sqrt{-(\mu, \mu)}$, $\mu^\alpha = R\gamma^\alpha - R'\gamma'^\alpha$. Si ε est petit, nous pouvons estimer que R, R', τ sont des infiniment petits du même ordre. Cherchons l'intégrale à l'approximation du deuxième ordre par rapport à R, R', τ. Pour cela, il faut calculer $\sigma = s - s'$ à l'approximation du quatrième ordre. Répétant les calculs de Dirac, nous trouvons

$$\sigma = \tau + \frac{\tau}{2}(R'\kappa' + R\kappa) - RR'(\gamma, \dot{\gamma}') + \frac{3}{8}\tau(R\kappa + R'\kappa')^2 + \frac{R^2R'^2}{2\tau}(\gamma, \dot{\gamma}')^2$$
$$- \frac{\tau R'^2}{2}(\dot{\gamma}', \dot{\gamma}') + \frac{\tau R'}{2}(\mu, \ddot{\gamma}') + \frac{\tau^3 \dot{v}^2}{24} - \frac{\tau^2 R' \dot{\kappa}'}{3}$$
$$- \frac{\tau^2 R \dot{\kappa}}{6} - RR'(\gamma, \dot{\gamma}')(R\kappa + R'\kappa') - \frac{\tau^2 R'}{2}(\dot{v}, \dot{\gamma}') .$$

En utilisant les développements

$$v^\alpha(s') = v^\alpha - \tau \dot{v}^\alpha + \frac{\tau^2}{2}\ddot{v}^\alpha + \left[RR'(\gamma, \dot{\gamma}') - \frac{\tau}{2}(R\kappa + R'\kappa') \right] \dot{v}^\alpha ,$$
$$\dot{v}^\alpha(s') = \dot{v}^\alpha - \tau \ddot{v}^\alpha ,$$
$$\gamma'^\alpha(s') = \gamma'^\alpha - \tau \dot{\gamma}'^\alpha + \frac{\tau^2}{2}\ddot{\gamma}'^\alpha + \left[RR'(\gamma, \dot{\gamma}') - \frac{\tau}{2}(R\kappa + R'\kappa') \right] \dot{\gamma}'^\alpha ,$$

on trouve

$$\left\{ \frac{v^{[\alpha}(s')\dot{v}^{\beta]}(s')\, {}^{\delta}\rho(R')}{1 - R'\kappa'(s')} - {}^{\delta}\dot{\rho}(R')\gamma'^{[\alpha}(s')v^{\beta]}(s') \right\} v_\beta = -\, {}^{\delta}\dot{\rho}\gamma'^\alpha + \tau\, {}^{\delta}\dot{\rho}(\dot{\gamma}'^\alpha + \kappa' v^\alpha)$$
$$- {}^{\delta}\rho \dot{v}^\alpha + (\tau \dot{v}^2 v^\alpha - R\kappa \dot{v}^\alpha + \tau \ddot{v}^\alpha)\, {}^{\delta}\rho + {}^{\delta}\dot{\rho} \left[\frac{\tau}{2}(R\kappa + R'\kappa')\dot{\gamma}'^\alpha + \frac{\tau\kappa'}{2}(R\kappa + R'\kappa')v^\alpha \right.$$
$$\left. + \frac{\tau^2}{2}\dot{v}^2\gamma'^\alpha - RR'(\gamma, \dot{\gamma}')\dot{\gamma}'^\alpha - \frac{\tau^2}{2}\ddot{\gamma}'^\alpha - \tau^2\kappa'\dot{v}^\alpha - RR'\kappa(\gamma, \dot{\gamma}')v^\alpha + \frac{\tau^2}{2}(v, \ddot{\gamma}')v^\alpha \right] . \quad (7)$$

Le facteur $1 - R\kappa$ apparaîtra lors du passage aux coordonnées curvilignes dans l'intégrale relative à dx. Calculons alors

$$\frac{1 - R'\kappa'(s')}{(x - \xi(s'), \dot{\xi}(s'))}.$$

Il vient

$$\frac{(1 - R\kappa)(1 - R'\kappa'(s'))}{(x - \xi(s'), \dot{\xi}(s'))} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{2\tau}(R'\kappa' + R\kappa) + \frac{\tau\dot{\upsilon}^2}{8} - \frac{R^2R'^2}{2\tau^3}(\gamma, \dot{\gamma}')^2$$
$$- \frac{R'^2}{2\tau}(\dot{\gamma}', \dot{\gamma}') - \frac{(R\kappa + R'\kappa')^2}{8\tau} + \frac{R'}{2\tau}(\mu, \ddot{\gamma}') + \frac{R'\dot{\kappa}' - R\dot{\kappa}}{3}. \quad (8)$$

En tenant compte de

$$\int \tau^\kappa \nu^{\alpha_1} \dots \nu^{\alpha_m}\nu'^{\beta_1} \dots \nu'^{\beta_n} d\Omega d\Omega' = 0 \qquad \text{pour } m + n \text{ impair,}$$
$$\int \nu^{\alpha_1} \dots \nu^{\alpha_m} d\Omega = 0 \qquad \text{pour } m \text{ impair,}$$

où ν^α est γ^α ou ses dérivées par rapport à s, il résulte alors de (7) et de (8)

$$e\int {}^\delta\rho(R)\,{}^\delta f^{\alpha\beta}\upsilon_\beta dx = e^2\int_{s_1}^{s_2} ds \int \left(- \frac{\dot{\upsilon}^\alpha}{\tau}\,{}^\delta\rho(R') + {}^\delta\dot{\rho}(R')\frac{\gamma'^\alpha(R\kappa + R'\kappa')}{2\tau}\right.$$
$$\left. + {}^\delta\rho(R')(\dot{\upsilon}^2\upsilon^\alpha + \ddot{\upsilon}^\alpha) - \frac{1}{3}\,{}^\delta\dot{\rho}(R')R'\dot{\kappa}'\gamma'^\alpha\right){}^\delta\rho(R)R^2R'^2 dR dR' d\Omega d\Omega'.$$

On utilise les relations

$$\int \frac{d\Omega d\Omega'}{\tau} = 16\pi^2 \begin{cases} \dfrac{1}{R}, & R > R' \\ \dfrac{1}{R'}, & R < R' \end{cases}, \qquad \int \frac{\kappa d\Omega}{\tau} = \frac{4\pi\kappa'}{3}\begin{cases} \dfrac{R'}{R^2}, & R > R' \\ \dfrac{R}{R'^2}, & R < R', \end{cases}$$

$$\int \gamma^\alpha\gamma^\beta d\Omega = \frac{4\pi}{3}(\upsilon^\alpha\upsilon^\beta - \eta^{\alpha\beta}), \qquad \int \dot{\kappa}'\gamma'^\alpha d\Omega' = -\frac{4\pi}{3}(\ddot{\upsilon}^\alpha + \dot{\upsilon}^2\upsilon^\alpha),$$
$$\int \kappa\gamma^\alpha d\Omega = -\frac{4\pi}{3}\dot{\upsilon}^\alpha.$$

On obtient alors

$$e\int {}^\delta\rho(R)\,{}^\delta f^{\alpha\beta}\upsilon_\beta dx$$
$$= e^2\int_{s_1}^{s_2} ds\left(- \frac{1}{4\delta}\dot{\upsilon}^\alpha - 8\pi^2\dot{\upsilon}^\alpha\int_\delta^{2\delta}\frac{F^2(R')}{R'^2}dR' + \frac{2}{3}(\ddot{\upsilon}^\alpha + \dot{\upsilon}^2\upsilon^\alpha)\right) + \dots, \quad (9)$$

$$F(R') = \int_\delta^{R'} R^2\,{}^\delta\rho(R)dR,$$

où

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{2\delta} \frac{F^2(R')}{R'^2} dR' = \infty .$$

c) **Calcul de l'intégrale de volume** (6).

On montre facilement que

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\Omega} \left(\frac{m\,{}^{\delta}\rho(R)\dot{v}^{\alpha}}{1 - R\kappa} - e\,{}^{\delta}\rho(R) f^{\alpha\beta} v_{\beta} \right) dx = \int_{s_1}^{s_2} (m\dot{v}^{\alpha} - ef^{\alpha\beta}(z(s))v_{\beta}) ds .$$

De cette relation et de (9) il résulte que

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to 0} \int_{\Omega} & \left(\frac{m\,{}^{\delta}\rho(R)\dot{v}^{\alpha}}{1 - R\kappa} - e\,{}^{\delta}\rho(R)\,{}^{\delta}F^{\alpha\beta}(x) v_{\beta} \right) dx \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \left[m\dot{v}^{\alpha} - ev_{\beta} \left\{ f^{\alpha\beta} + \frac{2e}{3} \dot{v}^{[\alpha} v^{\beta]} \right\} ds \right] \\ &+ e^2 \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{1}{4\delta} + 8\pi^2 \int_{\delta}^{2\delta} \frac{F^2(R')}{R'^2} dR' \right) \int_{s_1}^{s_2} \dot{v}^{\alpha} ds . \qquad (10) \end{aligned}$$

En exigeant que le terme d'ordre zéro par rapport à δ soit nul et en utilisant l'arbitrarité de s_1 et s_2 nous obtenons les équations (1). De (2), (6) et (10) résulte ainsi

$$\begin{aligned} - \lim_{\varepsilon \to 0,\, \delta \to 0} \int_{\Sigma_1 + \Sigma_2} {}^{\delta}T^{\alpha\beta}_{em} dS_{\beta} + e^2 \lim_{\delta \to 0} \left(\frac{1}{4\delta} + 8\pi^2 \int_{\delta}^{2\delta} \frac{F^2(R')}{R'^2} dR' \right) \int_{s_1}^{s_2} \dot{v}^{\alpha} ds \\ = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^2}{2\varepsilon} \int_{s_1}^{s_2} \dot{v}^{\alpha} dS . \end{aligned}$$

d) **Conclusion.**

Pour obtenir les équations du mouvement de la particule chargée en électrodynamique avec termes de rayonnement, il faut

1) passer de la distribution ponctuelle à une distribution de volume avec une densité de masse ${}^{\delta}\mu = m\,{}^{\delta}\rho(R)$ et une densité de courant ${}^{\delta}j^{\alpha} = e\,{}^{\delta}\rho(R)v^{\alpha}(s)$,

2) écrire les équations du mouvement de ce milieu continu

$${}^{\delta}\mu v^{\beta} \partial_{\beta} v^{\alpha} - {}^{\delta}j_{\beta}\,{}^{\delta}F^{\alpha\beta} = 0 , \qquad (11)$$

où ${}^{\delta}F^{\alpha\beta}$ est la somme du champ extérieur $f^{\alpha\beta}$ et du champ retardé du milieu,

3) effectuer l'intégration invariante de (11) le long de l'hypersurface $s = \text{const}$,

4) calculer la limite de l'intégrale obtenue lorsque δ tend vers zéro, en éliminant d'abord le terme qui donne une limite infinie.

CAS GRAVITATIONNEL

a) Action. Équations du champ. Lois de conservation.

Dans le travail [3], on a montré qu'un système de deux corps, dans une théorie minkowskienne de la gravitation (décrite par le tenseur symétrique $\psi_{\alpha\beta}$) gagne de l'énergie par rayonnement gravitationnel. On peut espérer obtenir le résultat admissible en exigeant que $\psi_{\alpha\beta}$ satisfasse à la condition $\partial^\alpha \psi_{\alpha\beta} = 0$. Si l'on demande encore que la théorie soit linéaire et que les équations du mouvement ne dépendent pas du choix du paramètre le long des lignes d'univers des particules, l'action la plus générale pour le système champ + particule présente alors la forme suivante :

$$- m \int ds + m \int (\gamma \psi_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta + \sigma \psi) ds + \frac{1}{2} \int (\alpha \partial_\sigma \psi_{\alpha\beta} \partial^\sigma \psi^{\alpha\beta} + \beta \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi) dx ,$$

où α, β, γ, σ sont des constantes, $\psi = \psi_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta}$. L'action correspondante relative à un milieu continu est alors

$$S = - \int \mathscr{L} dx ,$$

$$\mathscr{L} = \Bigg[m\,{}^\delta\rho \sqrt{v^\alpha v^\beta \eta_{\alpha\beta}} - m\,{}^\delta\rho \left(\frac{\gamma \psi_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta}{\sqrt{\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu}} + \sigma \psi_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} \sqrt{v^\mu v^\nu \eta_{\mu\nu}} \right) - \frac{1}{2} (\alpha \psi_{\alpha\beta;\sigma} \psi_{\alpha_1\beta_1;\sigma_1} + \beta \psi_{\alpha\alpha_1;\sigma} \psi_{\beta\beta_1;\sigma_1}) \eta^{\sigma\sigma_1} \eta^{\alpha\alpha_1} \eta^{\beta\beta_1} \Bigg] \sqrt{-\eta}, \quad \eta = |\eta_{\alpha\beta}| .$$

L'application du principe variationnel, basé sur la méthode des multiplicateurs indéfinis de Lagrange conduit aux équations du champ suivantes :

$$\partial^\alpha \psi_{\alpha\beta} = 0 ,$$

$$\alpha \Box \psi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\partial^\alpha \lambda^\beta + \partial^\beta \lambda^\alpha) - \frac{\beta}{\alpha + 4\beta} \eta^{\alpha\beta} \partial_\sigma \lambda^\sigma = A^{\alpha\beta} ,$$

$$\frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + 4\beta} \partial^\alpha \partial_\sigma \lambda^\sigma + \Box \lambda^\alpha = 2 \partial_\beta A^{\alpha\beta} ,$$

où λ^α sont les multiplicateurs de Lagrange et

$$A^{\alpha\beta} = m\,{}^\delta\rho \left(\gamma v^\alpha v^\beta + \frac{\alpha\sigma - \beta\gamma}{\alpha + 4\beta} \eta^{\alpha\beta} \right) .$$

Pour trouver la fonction retardée de Green $G^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(x, \xi)$ correspondant à l'inconnue $\psi_{\alpha\beta}$, nous utilisons la méthode qu'on applique dans la théorie quantique des champs ([4], p. 33). La représentation de Fourier de $G^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(x, \xi)$ est

$$\alpha G^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \left(- \frac{\delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\delta}{(p, p)} + \frac{p_\delta \delta_\gamma{}^{(\alpha} p^{\beta)}}{(p, p)^2} - \frac{\alpha}{\alpha + 3\beta} \eta^{\alpha\beta} \frac{p_\gamma p_\delta}{(p, p)^2} - \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + 3\beta} \frac{p_\gamma p_\delta p^\alpha p^\beta}{(p, p)^3} \right) e^{-i(p,u)} dp,$$

où $u^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha$. On prend comme contour d'intégration pour p^0 la même courbe qu'on utilise pour obtenir la fonction retardée de Green de l'équation des ondes. Cela donne

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-i(u,p)}}{(p, p)^3} dp = - \frac{1}{64\pi} u^2 \theta_+(u^2), \qquad \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-i(u,p)}}{(p, p)^2} dp = \frac{\theta_+(u^2)}{8\pi},$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-i(u,p)}}{(p, p)} dp = - \frac{\delta_+(u^2)}{2\pi},$$

où $u^2 = (u, u)$, $\delta_+(u^2) = \delta(u^2)\theta(u^0)$, $\theta_+(u^2) = \theta(u^2)\theta(u^0)$. Donc

$$\alpha G^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(x, \xi) = \frac{\delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\delta}{2\pi} \delta_+(u^2) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\beta \eta^{\alpha\beta}}{\alpha + 3\beta} \partial_\gamma \partial_\delta \theta_+(u^2) - \partial_\gamma{}^{(\alpha} \partial^{\beta)} \partial_\delta \theta_+(u^2) \right) + \frac{1}{64\pi} \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + 3\beta} \partial_\gamma \partial_\delta \partial^\alpha \partial^\beta [u^2 \theta_+(u^2)].$$

Alors les solutions retardées des équations (12) sont :

$$\alpha \psi^{\alpha\beta}(x) = \int \left[\frac{A^{\alpha\beta}(\xi)}{4\pi} + \frac{\eta^{\alpha\beta}}{32\pi} \frac{\alpha + 6\beta}{\alpha + 3\beta} (x - \xi)_\sigma \partial_\mu A^{\sigma\mu}(\xi) - \frac{1}{8\pi} \partial^{(\alpha} A^{\beta)\sigma}(\xi)(x - \xi)_\sigma + \frac{\alpha + 2\beta}{32\pi(\alpha + 3\beta)} \partial_\sigma \partial_\gamma A^{\sigma\gamma}(\xi)(x - \xi)^\alpha (x - \xi)^\beta \right] \frac{1 - R'\kappa'(s')}{(x - \xi, \dot{\xi})} R'^2 dR' d\Omega', \ \xi = \xi(s').$$

Pour calculer $\alpha \partial^\kappa \psi^{\alpha\beta}$ il faut changer $A^{\alpha\beta}(\xi)$ en $\partial^\kappa A^{\alpha\beta}(\xi)$ dans l'intégrale.

Les lois de conservation s'écrivent sous la forme :

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} - m\,{}^\delta\rho v^\beta \partial_\beta v^\alpha + m\,{}^\delta\rho [v^\beta \partial_\beta \{ 2\gamma \psi^{\mu\alpha} v_\mu + (\sigma\psi - \gamma \psi_{\mu\nu} v^\mu v^\nu) v^\alpha \} - \gamma \partial^\alpha \psi_{\mu\nu} v^\mu v^\nu - \sigma \partial^\alpha \psi] = 0,$$

où

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} = {} & m\,{}^\delta\rho \{ 1 - \sigma\psi + \gamma \psi_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \} v^\alpha v^\beta + 2m\sigma\,{}^\delta\rho \psi^{\alpha\beta} \\ & + \alpha [\partial^\alpha \psi^{\mu\nu} \partial^\beta \psi_{\mu\nu} - \psi_\mu{}^{(\alpha} \Box \psi^{\beta)\mu} - \partial^{(\alpha} \psi^{|\mu\sigma|} \partial_\sigma \psi^{\beta)}{}_\mu + \psi_{\mu\nu} \partial^\sigma \partial^{(\alpha} \psi^{\beta)\mu}] \\ & + \beta [\partial^\alpha \psi \partial^\beta \psi - 2\psi^{\alpha\beta} \Box \psi] - \frac{1}{2} (\alpha \partial_\sigma \psi_{\mu\nu} \partial^\sigma \psi^{\mu\nu} + \beta \partial_\sigma \psi \partial^\sigma \psi) \eta^{\alpha\beta} \\ & + \lambda_\nu \partial^\alpha \psi^{\beta\nu} - \psi^{\alpha\mu} \partial_\mu \lambda^\beta - \partial^\beta \lambda_\mu \psi^{\mu\alpha}. \end{aligned}$$

b) Équations du mouvement.

En considérant l'interprétation ci-dessus de la méthode de Dirac comme un postulat, après des calculs assez longs, on obtient les équations du mouvement suivantes avec termes de rayonnement :

$$\frac{d}{ds}[v_\alpha - 2\gamma\Psi_{\alpha\beta}v^\beta + \gamma v^\sigma v^\beta \Psi_{\sigma\beta}v_\alpha - \sigma\Psi v_\alpha] + \gamma v^\sigma v^\beta \partial_\alpha \Psi_{\sigma\beta} + \sigma\partial_\alpha\Psi = 0$$

avec

$$\Psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta} + \overline{\psi}_{\alpha\beta} ,$$

où $\psi_{\alpha\beta}$ est le champ extérieur. $\overline{\psi}_{\alpha\beta}$ satisfait aux conditions :

$$\alpha\partial^\kappa\overline{\psi}^{\alpha\beta}v_\beta \overset{*}{=} \frac{m(\alpha\sigma - \beta\gamma)}{24\pi(\alpha + 3\beta)}[- 5\ddot{v}^\kappa v^\alpha - 3v^\kappa\ddot{v}^\alpha - 2\dot{v}^2 v^\kappa v^\alpha]$$
$$+ \frac{m\gamma}{\pi(\alpha + 3\beta)}\left[- \frac{5\alpha + 30\beta}{96}\ddot{v}^\kappa v^\alpha - \frac{11\alpha + 34\beta}{32}\ddot{v}^\alpha v^\kappa + \frac{7\alpha + 18\beta}{24}\dot{v}^2 v^\alpha v^\kappa\right],$$

$$\partial^\kappa\overline{\psi} = \frac{m}{24\pi}\frac{\gamma - 6\sigma}{\alpha + 3\beta}(\ddot{v}^\kappa + \dot{v}^2 v^\kappa), \qquad \overline{\psi} = 0$$

$$\alpha\overline{\psi}^{\alpha\beta} = \left[\frac{m(\beta\gamma - \alpha\sigma)}{8\pi(\alpha + 3\beta)} - \frac{m\gamma(11\alpha + 34\beta)}{32\pi(\alpha + 3\beta)}\right]\dot{v}^{(\alpha}v^{\beta)}, \qquad \overline{\psi} = 0 .$$

Le symbole $\overset{*}{=}$ signifie égalité après contraction par V_α ou V_κ.

c) Conditions sur les constantes α, β, γ, σ.

Pour obtenir l'approximation newtonienne, il faut que

$$\frac{\alpha\gamma^2 + 2\beta\gamma^2 + 2\alpha\sigma\gamma + 3\alpha\sigma^2}{\alpha(\alpha + 3\beta)} = \frac{4\pi}{c^2}\chi$$

où χ est la constante de Newton. Un accord avec l'observation des périhélies impose :

$$\frac{12\alpha\sigma^2 - \beta\gamma^2 + 5\alpha\sigma\gamma}{\alpha(\alpha + 3\beta)} = - \frac{12\pi}{c^2}\chi .$$

Pour obtenir la courbure observée des rayons lumineux, il faut poser

$$\frac{v\gamma}{\alpha} = \frac{8\pi}{c^2}\chi . \tag{13}$$

Cette condition (13) est obtenue en supposant que les équations du champ électromagnétique en présence du champ gravitationnel se déduisent du principe variationnel

$$\delta\int\left(- \frac{1}{16\pi}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + v\psi_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{em}\right)dx = 0 ,$$

où v est une constante d'interaction entre le champ électromagnétique et le champ gravitationnel.

Je désire exprimer mes remerciements à Mme M. A. TONNELAT, Professeur à l'Université de Paris, VI, pour le problème posé, et à Mlle S. MAVRIDES, Maître de Recherches au C. N. R. S. pour les discussions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. A. M. DIRAC, *Proc. Roy. Soc. London*, t. **A 167**, 1938, p. 148.
[2] A. TRAUTMAN, *Gravitation*, Witten, N. Y., 1962, p. 169.
[3] M. SIGNORE, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **11**, 1969, p. 81.
[4] B. S. DEWITT, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, N. Y., London, Paris, 1965.

(Manuscrit reçu le 13 juillet 1973).