ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANDRÉ JOLIVET

Sur la caractérisation d'une classe d'équations d'ondes linéaires de forme covariante par rapport au groupe de Lorentz orthochrone

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, nº 4 (1975), p. 305-315
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_4_305_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXII, n° 4, 1975, p. 305-315.

Section A :
Physique théorique.

Sur la caractérisation d'une classe d'équations d'ondes linéaires de forme covariante par rapport au groupe de Lorentz orthochrone

par

André JOLIVET
U. E. R. de Sciences exactes et naturelles, 49-Angers

RÉSUMÉ. — Nous nous sommes proposé la caractérisation des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires du type

$$[\Sigma(B^{\gamma}_{\alpha\rho}T^{\gamma}_{\alpha\rho})_i + b]\psi(x) = 0$$

de forme covariante par rapport au groupe de Lorentz orthochrone et tel d'autre part que la solution ψ (élément d'un espace de Banach) soit une fonction à valeurs sur $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}$ étant l'espace de dimension finie de la représentation irréductible par rapport au groupe de Lorentz orthochrone.

La covariance des équations et la variance tensorielle des champs nous permet de déterminer les matrices des opérateurs $T^{\gamma}_{\alpha\rho}$ associés au champ libre et aux champs d'interactions les plus généraux.

Nous montrons que la forme la plus générale de ces équations susceptibles de décrire des particules de spin k, s'écrit à l'aide de $4(2k + 1)^2$ opérateurs $T^{\gamma}_{\alpha\rho}$ qui sont des opérateurs sur $\mathscr{M}$.

Nous montrons ensuite que ces opérateurs forment une base de l'espace vectoriel des matrices carrées à $(2k + 1)$ lignes et $(2k + 1)$ colonnes et nous étudions l'algèbre de ces matrices.

On appelle g un élément du groupe de Lorentz orthochrone $\mathscr{L}^{\uparrow}$. On désigne aussi par la même lettre g la transformation linéaire correspondante des variables x^{ν}. $\nu = 1, 2, 3, 4$ où x^1, x^2, x^3 sont réels, $x^4 = ict$ et t est une variable réelle.

Les représentations du groupe de Lorentz orthochrone $\mathscr{L}^{\uparrow}$ que nous considérons seront du type suivant :

1) $g \to \mathscr{D}_g$ est une représentation de $\mathscr{L}^{\uparrow}$ dans un espace $\mathscr{R}$ de dimension finie.

2) $g \rightarrow \mathscr{D}_g$ est somme directe des représentations irréductibles du groupe de Lorentz orthochrone $\mathscr{L}_+^\uparrow$.

$g \rightarrow \mathscr{D}_g^\beta$ est définie par $\beta = (\dot{k}_0, k_1)$ où $\dot{k}_0$ et k_1 sont deux nombres réels simultanément entiers ou demi-entiers et $k_0 \leqslant k_1$ et k_1 est positif.

Nous notons $\mathscr{R}^\beta$ le sous-espace de $\mathscr{R}$ invariant par rapport à $\mathscr{L}_+^\uparrow$ et correspondant à la représentation $g \rightarrow \mathscr{D}_g^\beta$.

On a $\mathscr{R} = \bigoplus_\beta \mathscr{R}^\beta$.

3) $g \rightarrow \mathscr{D}_g^\beta$ est somme directe des représentations irréductibles $g \rightarrow \mathscr{D}_{gk}^\beta$ du groupe des rotations de R^3.

k est le poids de la représentation $g \rightarrow \mathscr{D}_{gk}^\beta$

$$k = |k_0|, \quad |k_0| + 1, \ldots, k_1$$

La représentation irréductible $g \rightarrow \mathscr{D}_g^\beta$ est fournie par un choix convenable de la base $f_{k\nu}^\beta$ par les formules :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_+ f_{k,\nu}^\beta &= [(k + \nu + 1)(k - \nu)]^{\frac{1}{2}} f_{k,\nu+1}^\beta \\ \mathrm{H}_- f_{k\nu}^\beta &= [(k + \nu)(k - \nu + 1)]^{\frac{1}{2}} f_{k,\nu-1}^\beta \\ \mathrm{H}_3 f_{k\nu}^\beta &= \nu f_{k\nu}^\beta \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{F}_+ f_{k\nu}^\beta &= [(k - \nu)(k - \nu - 1)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{C}_k f_{k-1,\nu+1}^\beta - [(k - \nu)(k + \nu + 1)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{A}_k f_{k,\nu+1}^\beta \\ &\qquad + [(k + \nu + 1)(k + \nu + 2)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{C}_{k+1} f_{k+1,\nu+1}^\beta \\ \mathrm{F}_- f_{k\nu}^\beta &= - [(k + \nu)(k + \nu - 1)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{C}_k f_{k-1,\nu-1}^\beta - [(k + \nu)(k - \nu + 1)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{A}_k f_{k,\nu-1}^\beta \\ &\qquad - [(k - \nu + 1)(k - \nu + 2)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{C}_{k+1} f_{k+1,\nu-1}^\beta \\ \mathrm{F}_3 f_{k\nu}^\beta &= [(k-\nu)(k+\nu)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{C}_k f_{k-1,\nu}^\beta - \nu f_{k\nu}^\beta - [(k + \nu + 1)(k - \nu + 1)]^{\frac{1}{2}} \mathrm{C}_{k+1} f_{k+1,\nu}^\beta \end{aligned} \right.$$

où :

$$\mathrm{A}_k = \frac{ik_0(k_1 + 1)}{k(k + 1)} \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_k = \frac{-1}{k}\left[\frac{(k^2 - k_0^2)[(k_1 + 1)^2 - k^2]}{4k^2 - 1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_+ &= i\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2 & \mathrm{F}_+ &= i\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{H}_- &= i\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 & \mathrm{F}_- &= i\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 \\ \mathrm{H}_3 &= i\mathrm{A}_3 & \mathrm{F}_3 &= i\mathrm{B}_3 \end{aligned}$$

les A_p et B_p ; $p = 1, 2, 3$ étant les opérateurs infinitésimaux fondamentaux de $\mathscr{L}_+^\uparrow$.

4) Une représentation irréductible $g \rightarrow \hat{\mathscr{D}}_g^\beta$ du groupe de Lorentz orthochrone $\mathscr{L}^\uparrow$ est l'une des trois représentations suivantes :

$$g \rightarrow \hat{\mathscr{D}}_{g+}^{(0,k_1)}\,; \qquad g \rightarrow \hat{\mathscr{D}}_{g-}^{(0,k_1)}\,; \qquad g \rightarrow \hat{\mathscr{D}}_{g}^{(k_0,k_1)} \qquad (k_0 \neq 0)$$

où les représentations $g \rightarrow \hat{\mathscr{D}}_{g+}^{(0,k_1)}$ et $g \rightarrow \hat{\mathscr{D}}_{g-}^{(0,k_1)}$ sont irréductibles par rapport à $\mathscr{L}_+^\uparrow$.

La représentation $g \rightarrow \hat{\mathscr{D}}_g^{(k_0,k_1)}$ $(k_0 \neq 0)$ est somme directe des représentations $g \rightarrow \mathscr{D}_g^{(k_0,k_1)}$ et $g \rightarrow \mathscr{D}_g^{(-k_0,k_1)}$.

Si $\beta = (k_0, k_1)$ nous notons $\dot{\beta} = (-k_0, k_1)$ et nous avons pour $k_0 \neq 0$ $\hat{\mathscr{D}}_g^\beta = \mathscr{D}_g^\beta \oplus \mathscr{D}_g^{\dot{\beta}}$.

On appelle s la réflexion par rapport aux axes $0x_1$, $0x_2$, $0x_3$.

$$x' = sx, \quad x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3, \quad x'_4 = x_4 .$$

$S = \mathscr{D}_s$ est l'opération linéaire sur $\mathscr{R}$ correspondant à la réflexion s et l'on a $S^{\beta\beta'}_{kk'\nu\nu'} = 0$ si $k' \neq k$, $\nu' \neq \nu$, $\beta' = \dot{\beta}$

$$S^{\beta\dot{\beta}}_{k} = \begin{cases} (-1)^k & \text{pour} \quad \hat{\mathscr{D}}^{(0,k_1)}_{g_+} \\ (-1)^{k+1} & \text{pour} \quad \hat{\mathscr{D}}^{(0,k_1)}_{g_-} \\ (-1)^k & \text{pour} \quad \hat{\mathscr{D}}^{(k_0,k_1)}_{g} \qquad (k_0 \neq 0) \end{cases}$$

on pose $S^{\beta\dot{\beta}}_{kk\nu\nu} = S^{\beta\dot{\beta}}_{k}$.

A : soit $g \to \hat{\mathscr{D}}^{\alpha}_{g}$ une représentation complètement irréductible par rapport à $\mathscr{L}^{\uparrow}$

$$\hat{\mathscr{D}}^{\alpha}_{g} = \mathscr{D}^{\alpha}_{g} \oplus \mathscr{D}^{\dot{\alpha}}_{g} \quad \text{avec} \quad \alpha = (k, k), \quad \dot{\alpha} = (-k, k)$$

Cette représentation est complètement définie par le nombre k entier ou demi-entier. Nous désignerons par la même lettre τ l'un des indices α ou $\dot{\alpha}$,

$$\dot{\tau} = \begin{cases} \dot{\alpha} & \text{si} \quad \tau = \alpha \\ \alpha & \text{si} \quad \tau = \dot{\alpha} \end{cases}$$

On appelle $\mathscr{M}$ l'espace de la représentation $g \to \hat{\mathscr{D}}^{\alpha}_{g}$. $\mathscr{M}$ est de dimension $2(2k + 1)$ et $\mathscr{M} = \mathscr{M}^{\alpha}_{k} \oplus \mathscr{M}^{\dot{\alpha}}_{k}$.

On désigne par la lettre ψ une fonction des x^{ν} à valeurs dans $\mathscr{M}$. $f^{\tau}_{k\nu}$ est la base de $\mathscr{M}$.

B : soit $g \to \mathscr{C}_g$ une représentation de $\mathscr{L}^{\uparrow}$

$$\mathscr{C}_g = \bigoplus_{\gamma j} \mathscr{C}^{\gamma j}_{g},$$

$\gamma = (a_0, a_1)$ définit une représentation irréductible de $\mathscr{L}^{\uparrow}_{+}$ et l'indice j indexe éventuellement des représentations équivalentes $\mathscr{N}_{\gamma j}$ est l'espace de la représentation et $\mathscr{N} = \bigoplus_{\gamma j} \mathscr{N}^{\gamma j} f^{\gamma j}_{a\rho}$ est la base de $\mathscr{N}^{\gamma j}$.

Considérons l'équation :

$$[\Sigma(B^{\gamma}_{a\rho}(x, p)T^{\gamma}_{a\rho})^i + b]\psi(x) = 0 \tag{1}$$

où les $T^{\gamma}_{a\rho}$ sont des opérateurs sur $\mathscr{M}$ et b une constante complexe.

Nous emploierons indifféremment le même symbole $T^{\gamma}_{a\rho}$ pour désigner l'opérateur sur $\mathscr{M}$ et la matrice de l'opérateur $T^{\gamma}_{a\rho}$ dans la base des $f^{\tau}_{k\nu}$.

Covariance de l'équation (1) par rapport à $\mathscr{L}^{\uparrow}_{+}$.

L'équation (1) est dite de forme covariante par rapport à $\mathscr{L}^{\uparrow}_{+}$ si lors d'une transformation $g \in \mathscr{L}^{\uparrow}_{+}$, les transformations simultanées $x' = gx$;

$p' = gp$; $\psi'(x') = \mathscr{D}_g\psi(x)$; $B'(x'p') = \mathscr{C}_g B(x, p)$ laissent inchangée la forme de l'équation (1).

Cette condition est équivalente aux relations suivantes entre les éléments de matrice des $T^{\gamma}_{a\rho}$:

$$[D^{\tau}, T^{\gamma}_{a\rho}] = \sum_{a'} T^{\gamma}_{a'\rho'} D_{a'a,\rho'\rho}$$

Ces relations s'écrivent :

$$\left\{\begin{aligned} [H^{\tau}_{+}, T^{\gamma}_{a\rho}] &= T^{\gamma}_{a\rho+1} H^{\gamma}_{+aa,\rho+1,\rho} \\ [H^{\tau}_{-}, T^{\gamma}_{a\rho}] &= T^{\gamma}_{a\rho-1} H^{\gamma}_{-aa,\rho-1\rho} \\ [H^{\tau}_{3}, T^{\gamma}_{a\rho}] &= T^{\gamma}_{a\rho} H^{\gamma}_{3aa\rho\rho} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} [F^{\tau}_{+}, T^{\gamma}_{a\rho}] &= \sum_{a'} T^{\gamma}_{a',\rho+1} F^{\gamma}_{+a'a,\rho+1\rho} \\ [F^{\tau}_{-}, T^{\gamma}_{a\rho}] &= \sum_{a'} T^{\gamma}_{a',\rho-1} F^{\gamma}_{-a'a,\rho-1\rho} \\ [F^{\tau}_{3}, T^{\gamma}_{a\rho}] &= \sum_{a'} T^{\gamma}_{a',\rho} F^{\gamma}_{3a'a,\rho\rho} \end{aligned}\right.$$

ce qui donne :

$$\langle \tau k v \mid T^{\gamma}_{a\rho} \mid \tau' k v' \rangle = (-1)^{k-v'} \frac{\langle kvk - v' \mid kk_{a\rho} \rangle}{(2a+1)^{\frac{1}{2}}} (\tau k \mid T^{\gamma}_{a} \mid \tau \dot{k})$$

où les $\langle kvk - v' \mid kk_{a\rho} \rangle$ sont les coefficients de couplage vectoriel ou coefficients de Clebsch-Gordan du groupe des rotations de R. Les $(\tau k \mid T^{\gamma}_{a} \mid \tau' k')$ sont obtenus par les relations :

$$\left\{\begin{aligned} &[kA^{\tau'}_{k} - kA^{\tau}_{k}][(2k-a+1)(2k+a+2)]^{\frac{1}{2}}(\tau k \mid T^{\gamma}_{a} \mid \tau' k) \\ &\qquad = -[(a+1)^2(2k-a+1)(2k-a)]^{\frac{1}{2}} C^{\gamma}_{a+1}(\tau k \mid T^{\gamma}_{a+1} \mid \tau' k) \\ &\qquad\quad + [a^2(2k+a+2)(2k+a+1)]^{\frac{1}{2}} C^{\gamma}_{a}(\tau k \mid T^{\gamma}_{a-1} \mid \tau' k) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &[A^{\gamma}_{k} - A^{\tau}_{k}][(2k-a+1)(2k+a+2)]^{\frac{1}{2}}(\tau k \mid T^{\gamma}_{a} \mid \tau' k) \\ &\qquad = [(2k-a)(2k-a+1)]^{\frac{1}{2}} C^{\gamma}_{a+1}(2k \mid T^{\gamma}_{a+1} \mid \tau' k) \\ &\qquad\quad + [(2k+a+1)(2k+a+2)]^{\frac{1}{2}} C^{\gamma}_{a-1}(\tau k \mid T^{\gamma}_{a-1} \mid \tau' k) \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &[A^{\gamma}_{k} + A^{\tau}_{k}][(2k-a+1)(2k+a+2)]^{\frac{1}{2}}(\tau k \mid T^{\gamma}_{a} \mid \tau' k) \\ &\qquad = -[(2k-a)(2k-a+1)]^{\frac{1}{2}} C^{\gamma}_{a+1}(\tau k \mid T^{\gamma}_{a+1} \mid \tau' k) \\ &\qquad\quad + [(2k+a+1)(2k+a+2)]^{\frac{1}{2}} C^{\gamma}_{a}(\tau k \mid T^{\gamma}_{a-1} \mid \tau' k) \end{aligned}\right.$$

A l'aide de ces relations, nous démontrons les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *$\mathscr{M}$ étant l'espace de la représentation complètement irréductible de $\mathscr{L}^{\uparrow}$ $g \to \hat{\mathscr{D}}^{\alpha}_{g} = \mathscr{D}^{\dot{\alpha}}_{g} \oplus \mathscr{D}^{\alpha}_{g}$ avec $\alpha = (k, k)$, et les $T^{\gamma}_{a\rho}$ étant des opérateurs sur $\mathscr{M}$.*

Pour que l'équation (1) *soit de forme covariante par rapport à $\mathscr{L}^{\uparrow}_{+}$ il faut et il suffit que les $T^{\gamma}_{a\rho}$ satisfassent aux conditions suivantes :*

a) *il existe des sous-espaces de $\mathscr{M}$, différents de $\mathscr{M}$ et de $\mathscr{M}^{\tau}$, invariants par rapport aux opérateurs $T^{\gamma}_{a\rho}$ seulement dans le cas où $\gamma = (0, 0)$;*

b) *le sous-espace $\mathscr{M}^{\tau}$ est invariant par rapport aux opérateurs $T^{\gamma}_{a\rho}$ pour les seuls $\gamma = (l, l)$ et $\gamma = (-l, l)$ $l = 2k, 2k-1, \ldots, 0$.*

Dans ce cas, les éléments non nuls de l'opérateur $T^{\gamma}_{a\rho}$ *dans la base des* $f^{\tau}_{k\nu}$ *sont donnés par la formule :*

$$(2) \quad \begin{cases} \langle \alpha k\nu \,|\, T^{\gamma}_{l\rho} \,|\, \alpha k\nu \rangle = (-1)^{k-\nu'} \langle k\nu k - \nu' \,|\, kkl\rho \rangle h_{\gamma} & pour \quad \gamma = (\ l, l) \\ \langle \dot\alpha k\nu \,|\, T^{\gamma}_{l\rho} \,|\, \dot\alpha k\nu \rangle = (-1)^{k-\nu'} \langle k\nu k - \nu' \,|\, kkl\rho \rangle r_{\gamma} & pour \quad \gamma = (-l, l) \end{cases}$$

où h_γ *et* r_γ *sont des constantes complexes ;*

c) *il n'existe aucun sous-espace de* $\mathcal{M}$ *différent de* $\mathcal{M}$ *et invariant par rapport aux opérateurs* $T^{\gamma}_{a\rho}$ *(ρ fixé) que dans le seul cas où* $\gamma = (0, 2k)$. *Les éléments de matrice non nuls des opérateurs* $T^{\gamma}_{a\rho}$ *dans la base des* $f^{\tau}_{k\nu}$ *sont alors donnés par les formules :*

$$(3) \quad \begin{cases} \langle \alpha k\nu \,|\, T^{(0,2k)}_{a\rho} \,|\, \dot\alpha k\nu \rangle = (-1)^{k-\nu'}(-i)^{a} \langle k\nu k - \nu' \,|\, kka\rho \rangle t_{\gamma} \\ \langle \dot\alpha k\nu \,|\, T^{(0,2k)}_{a\rho} \,|\, \alpha k\nu' \rangle = (-1)^{k-\nu'}(-i)^{a} \langle k\nu k - \nu' \,|\, kka\rho \rangle w_{\gamma} \end{cases}$$

où t_γ *et* w_γ *sont des constantes complexes.*

Les $\langle k\nu k - \nu' \,|\, kka\rho \rangle$ sont les coefficients de couplage vectoriels, ils sont nuls pour $\nu' \neq \nu - \rho$, on a :

$$\langle k\nu k - \nu' \,|\, kka\rho \rangle = \langle kka\rho \,|\, k\nu k - \nu' \rangle$$

et

$$(4) \quad \begin{gathered} \sum_{\gamma\gamma'} \langle kka'\rho' \,|\, k\nu k - \nu' \rangle \langle k\nu k - \nu' \,|\, kka\rho \rangle = \delta_{aa'}\delta_{\rho\rho} \times \eta(a, k) \\ \eta(a, k) \text{ est nul} \qquad \text{si} \quad a > 2k \\ \eta(a, k) = 1 \qquad \text{si} \quad a \leqslant 2k \\ \sum_{a} \langle k\nu k - \nu' \,|\, kka\rho \rangle \langle kka\rho \,|\, k\nu_1 k - \nu'_1 \rangle = \delta\nu\nu_1\delta\nu \end{gathered}$$

Remarque. — Le théorème I nous dit que les seules valeurs de γ compatibles avec la valeur k qui définit la représentation $g \to \hat{\mathcal{D}}^{\alpha}_{g}$ sont :

$$\gamma = (0, 2k)\,; \qquad \gamma = (l, l)\,; \qquad \gamma = (-l, l): \qquad l = 2k, 2k - 1, \ldots, 0.$$

les expressions des éléments de matrices des $T^{\gamma}_{a\rho}$ étant données par ce même théorème. Il en résulte : pour que le système (1) soit irréductible, il faut qu'il existe dans la somme $\Sigma B^{\gamma}_{a\rho}T^{\gamma}_{a\rho}$ au moins un $\gamma = (0, 2k)$.

Covariance de l'équation (1) par rapport à $\mathcal{L}^{\uparrow}$.

L'équation (1) est de forme covariante par rapport à $\mathcal{L}^{\uparrow}$ si lors d'une transformation $g \in \mathcal{L}^{\uparrow}$ les transformations simultanées $x' = gx$, $p' = gp$, $\psi'(x') = \mathcal{D}_g\psi_{(x)}$, $B'(x'p') = \mathcal{C}_g B(x, p)$, laissent inchangée la forme de l'équation (1).

On en déduit :

1) l'équation (1) est de forme covariante par rapport à $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$,

2) la forme de l'équation (1) reste inchangée lors des transformations simultanées $x' = sx$, $p' = sp$, $\psi'(x') = S\psi(x)$, $B'(x', p') = SB(x, p)$.

Il en résulte de la condition 1, que les éléments de matrice des opérateurs sont donnés par les formules.

La condition 2 nous donne la relation :

$$\langle \dot{\tau}kv \,|\, T^{\dot{\gamma}}_{a\rho} \,|\, \dot{\tau}'kv' \rangle = S^{\dot{\tau}\tau}_{k} S^{\dot{\gamma}\gamma}_{a} \langle \tau kv \,|\, T^{\gamma}_{a\rho} \,|\, \tau'kv' \rangle S^{\tau'\tau'}_{k}$$

Compte tenu des valeurs des éléments de matrice de l'opérateur S, nous obtenons le résultat suivant :

a) si le symbole γ correspond à une représentation $\mathscr{D}^{(0,2k_1)}_{-}$

$$\langle \dot{\tau}kv \,|\, T^{\dot{\gamma}}_{a\rho} \,|\, \dot{\tau}'kv' \rangle = (-1)^{2k+a+1} \langle \tau kv \,|\, T^{\gamma}_{a\rho} \,|\, \tau'kv' \rangle \tag{5}$$

b) dans les autres cas :

$$\langle \dot{\tau}kv \,|\, T^{\dot{\gamma}}_{a\rho} \,|\, \dot{\tau}'kv' \rangle = (-1)^{2k+a} \langle \tau kv \,|\, T^{\gamma}_{a\rho} \,|\, \tau'kv' \rangle \tag{6}$$

Compte tenu des formules 2, 3, 5, 6, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *$\mathscr{M}$ étant l'espace de la représentation complètement irréductible de $\mathscr{L}^{\uparrow}$, $g \to \hat{\mathscr{D}}^{\alpha}_{g} = \mathscr{D}^{\alpha}_{g} \oplus \mathscr{D}^{\dot{\alpha}}_{g}$ avec $\alpha = (k, k)$, et les $T^{\gamma}_{a\rho}$ étant des opérateurs sur $\mathscr{M}$.*

Pour que l'équation (1) *soit de forme covariante par rapport à $\mathscr{L}^{\uparrow}$ il faut et il suffit que les $T^{\gamma}_{a\rho}$ satisfassent aux conditions suivantes.*

Les seules valeurs de γ, compatibles avec la valeur k qui définit la représentation $g \to \hat{\mathscr{D}}^{(k,k)}_{g}$ sont : $\gamma = (0, 2k)$, $\gamma = (l, l)$, $\gamma = (-l, l)$, $l = 2k, 2k - 1, \ldots, 0$.

1° *Si le symbole γ correspond à la représentation $g \to \mathscr{C}^{(0,2k)}_{g}$ de $\mathscr{L}^{\uparrow}$, les éléments de matrice non nuls des $T^{\gamma}_{a\rho}$ sont donnés par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha kv \,|\, T^{\gamma}_{a\rho} \,|\, \dot{\alpha}kv' \rangle = (-1)^{k-v'}(i)^{a} \langle \alpha kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle t_{\gamma_-} \\ \langle \dot{\alpha}kv \,|\, T^{\gamma}_{a\rho} \,|\, \alpha kv' \rangle = (-1)^{2k+a+1} \langle \alpha kv \,|\, T^{\gamma}_{a\rho} \,|\, \dot{\alpha}kv' \rangle w_{\gamma_-} = (-1)^{2k+1} t_{\gamma_-} \end{array} \right. \tag{7}$$

où t_{γ_-} est une constante complexe.

2° *Si le symbole γ correspond à la représentation $g \to \hat{\mathscr{C}}^{(0,2k)}_{g+}$ de $\mathscr{L}^{\uparrow}$, les éléments de matrice non nuls des $T^{\gamma_+}_{a\rho}$ sont donnés par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha kv \,|\, T^{\gamma_+}_{a\rho} \,|\, \dot{\alpha}kv' \rangle = (-1)^{k-v'}(i)^{a} \langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle t_{\gamma_+} \\ \langle \dot{\alpha}kv \,|\, T^{\gamma_+}_{a\rho} \,|\, \alpha kv' \rangle = (-1)^{2k+a} \langle \alpha kv \,|\, T^{\gamma_+}_{a\rho} \,|\, \dot{\alpha}kv' \rangle w_{\gamma_+} = (-1)^{2k} t_{\gamma_+} \end{array} \right. \tag{8}$$

où t_{γ_+} est une constante complexe.

3° *Si le symbole γ correspond à la représentation $g \to \hat{\mathscr{C}}^{\gamma}_{g}$ de $\mathscr{L}^{\uparrow}$; $\gamma = (l, l)$, $\gamma = (-l, l)$: $l = 2k, 2k - 1, \ldots, 0$.*

Les éléments de matrice des $T^{\gamma}_{a\rho}$ sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha kv \,|\, T^{\gamma}_{l\rho} \,|\, \alpha kv' \rangle = (-1)^{k-v'} \langle kvk - v' \,|\, kkl\rho \rangle h_{\gamma} \quad \text{pour} \quad \gamma = (l, l) \\ \langle \dot{\alpha}kv \,|\, T^{\dot{\gamma}}_{l\rho} \,|\, \dot{\alpha}kv' \rangle = (-1)^{2k+a} \langle \alpha kv \,|\, T^{\gamma}_{l\rho} \,|\, \alpha kv' \rangle r_{\dot{\gamma}} = (-1)^{2k+a} h_{\gamma} \end{array} \right. \tag{9}$$

où h_{γ} est une constante complexe.

Nous trouvons que le nombre des $T^{\gamma}_{a\rho}$ est égal à

$$[1 + 3 + \ldots + (4k + 1)] = (2k + 1)^2$$

si le symbole γ correspond à la représentation $g \to \hat{\mathscr{C}}_{g_-}^{(0,2k)}$ de $\mathscr{L}^\uparrow$ ou à la représentation $g \to \hat{\mathscr{C}}_{g_+}^{(0,2k)}$ de $\mathscr{L}^\uparrow$.

Le nombre de $T_{a\rho}^\gamma$ est égal à $2(2l+1)$ pour la valeur γ correspondant à la représentation $g \to \hat{\mathscr{C}}_g^{(l,l)}$ de $\mathscr{L}^\uparrow$. Les valeurs possibles de l étant : $2k, 2k-1, \ldots, 0$.

Le nombre de $T_{a\rho}^\gamma$ correspondant aux différentes valeurs de l est :

$$2[1 + 3 + \ldots + (4k+1)] = 2(2k+1)^2$$

Le nombre total de matrices $T_{a\rho}^\gamma$ associées aux $B_{a\rho}^\gamma$ est donc de $4(2k+1)^2$.

L'espace vectoriel F des matrices carrées à $2(2k+1)$ lignes et $2(2k+1)$ colonnes; est de dimension $4(2k+1)^2$.

Nous allons montrer que les $4(2k+1)^2$ matrices carrées $T_{a\rho}^\gamma$ que nous avons obtenues forment une base de F.

Nous employons les notations suivantes :

$(T_{a\rho}^\gamma)^{I_1}$ si γ correspond à la représentation $g \to \hat{\mathscr{D}}_{g_-}^{(0,2k)}$
$(T_{a\rho}^\gamma)^{I_2}$ si γ correspond à la représentation $g \to \hat{\mathscr{D}}_{g_+}^{(0,2k)}$
$(T_{a\rho}^\gamma)^{I}$ si γ correspond à l'une des représentations précédentes
$(T_{a\rho}^\gamma)^{II_1}$ si γ correspond à l'une des représentations $g \to \mathscr{D}_g^{(l,l)}$:
$l = 2k, 2k-1, \ldots, 0$
$(T_{a\rho}^\gamma)^{II_2}$ si γ correspond à l'une des représentations $g \to \mathscr{D}_g^{(-l,l)}$:
$l = 2k, 2k-1, \ldots, 0$
$(T_{a\rho}^\gamma)^{II}$ si γ correspond à l'une des représentations précédentes

les $(2k+1)^2$ matrices $(T_{a\rho}^\gamma)^{I_1}$ engendrent un espace vectoriel E_{I_1}
les $(2k+1)^2$ matrices $(T_{a\rho}^\gamma)^{I_2}$ engendrent un espace vectoriel E_{I_2}
les $2(2k+1)^2$ matrices $(T_{a\rho}^\gamma)^{II}$ engendrent un espace vectoriel E_I
les $(2k+1)^2$ matrices $(T_{a\rho}^\gamma)^{II_1}$ engendrent un espace vectoriel E_{II_1}
les $(2k+1)^2$ matrices $(T_{a\rho}^\gamma)^{II_2}$ engendrent un espace vectoriel E_{II_2}
les $2(2k+1)^2$ matrices $(T_{a\rho}^\gamma)^{II}$ engendrent un espace vectoriel E_{II}
les $4(2k+1)^2$ matrices $(T_{a\rho}^\gamma)$ engendrent un espace vectoriel E

les matrices $(T_{a\rho}^\gamma)^{Lm}$ ou $L = I, II$ et $m = 1, 2$ engendrent pour ρ fixé un sous-espace vectoriel de E_{Lm} que nous notons E_{Lm_ρ}, E_{Lm_ρ} est de dimension $(2k-\rho+1)$.

Il est clair, d'après les expressions des éléments de matrices des $T_{a\rho}^\gamma$ que :

$$E_{Lm} \cap \sum_{\substack{L' \neq L \\ \text{ou } m' \neq m}} E_{L'm'} = \{0\} \qquad \text{c'est-à-dire} \quad E = \oplus E_{Lm}$$

$$\sum_{L,m} E_{Lm} = E$$

$$E_{Lm} = \bigoplus_{\rho=-2k}^{2k} E_{Lm_\rho}$$

nous allons montrer que chacun des espaces vectoriels E_{Lm} est de dimension $(2k+1)^2$.

Soit par exemple E_{I_1}. Nous allons montrer que les $(T^{\gamma}_{a\rho})^{I_1}$ pour ρ fixé forment une base de $E_{I_1\rho}$.

Les matrices $(T^{\gamma}_{a\rho})^{I_1}$ ont au plus un élément par ligne et par colonne ; d'autre part, les éléments non nuls de $(T^{\gamma}_{a\rho})^{I_1}$ ont mêmes indices de ligne et mêmes indices de colonne que les éléments non nuls de $(T^{\gamma}_{a'\rho})^{I_2}$.

A la matrice carrée $(T^{\gamma}_{a\rho})^{I_1}$, nous associons la matrice colonne $K^{\gamma}_{a\rho}$ à $2k+1$ lignes définie de la façon suivante : l'élément de $K^{\gamma}_{a\rho}$ dont l'indice de ligne est (kv), est égal à $\langle \alpha kv \,|\, T^{\gamma}_{a\rho} \,|\, \dot{\alpha} kv \rangle$.

Les $K^{\gamma}_{a\rho}$ (ρ fixé) engendrent un espace vectoriel E'_{ρ}.

L'application $T^{\gamma}_{a\rho} \to K^{\gamma}_{a\rho}$ est un isomorphisme.

Les relations d'orthogonalité des $\langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle$ nous montrent que les $K^{\gamma}_{a\rho}$ (ρ fixé) forment une base de E'_{ρ}. Il s'ensuit que les $(T^{\gamma}_{a\rho})^{I_1}$ (ρ fixé) forment une base de $E_{I_1\rho}$. Par conséquent les $(2k+1)^2$ matrices $(T^{\gamma}_{a\rho})^{I_1}$ forment une base de E_{I_1}.

On démontrerait de la même façon que la dimension de chacun des espaces vectoriels E_{Lm} est égale à $(2k+1)^2$ la dimension de E est donc égale à $4(2k+1)$ par conséquent l'espace vectoriel E engendré par les $2(2k+1)$ matrices $T^{\gamma}_{a\rho}$ est l'espace vectoriel F des matrices carrées à $2(2k+1)$ lignes et $2(2k+1)$ colonnes.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Les $4(2k+1)^2$ matrices $T^{\gamma}_{a\rho}$ obtenues par le théorème II forment une base de l'espace vectoriel des matrices carrées à $2(2k+1)$ lignes et $2(2k+1)$ colonnes.*

ALGÈBRE DES MATRICES $T^{\gamma}_{\alpha\rho}$

Relation de symétrie. — Les relations de symétrie des coefficients $\langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle$ nous donne les relations de symétrie suivantes entre les éléments de matrices des $T^{\gamma}_{a\rho}$:

$$\begin{aligned}\langle \tau kv \,|\, T^{\gamma}_{a\rho} \,|\, \tau' kv' \rangle &= (-1)^{a+\rho} \langle k - v' \,|\, T^{\gamma}_{a\rho} \,|\, k - v \rangle \\ &= (-1)^{\rho} \quad \langle kv' \,|\, T^{\gamma}_{a-\rho} \,|\, kv \rangle \\ &= (-1)^{a} \quad \langle k - v \,|\, T^{\gamma}_{a-\rho} \,|\, k - v' \rangle\end{aligned}$$

Choix d'une détermination des matrices $T^{\gamma}_{a\rho}$. — Le théorème II donne les expressions des éléments de la matrice $T^{\gamma}_{a\rho}$. $T^{\gamma}_{a\rho}$ étant déterminée à une constante arbitraire près. Cette constante étant la même pour toutes les matrices $T^{\hat{\gamma}}_{a\rho}$ correspondant à la même valeur de $\hat{\gamma}$.

Nous prenons pour les constantes $C_{\hat{\gamma}}$ un choix tel que :

$$\langle \tau kv \,|\, T^{\gamma}_{a\rho} \,|\, \tau' kv' \rangle = \langle \tau kv' \,|\, T^{\gamma}_{a-\rho} \,|\, \tau' kv \rangle$$

Nous avons alors les éléments de matrices de $T^{\gamma}_{a\rho}$ qui s'expriment par les formules :

$$\begin{aligned}
\langle \alpha k v \,|\, (T^{\gamma}_{a\rho})^{I_1} \,|\, \dot{\alpha} k v' \rangle &= (-1)^{k-v'}(\;\; i)^{2k+a+1} \langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle \\
\langle \dot{\alpha} k v \,|\, (T^{\gamma}_{a\rho})^{I_1} \,|\, \alpha k v' \rangle &= (-1)^{k-v'}(-i)^{2k+a+1} \langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle \\
\langle \alpha k v \,|\, (T^{\gamma}_{a\rho})^{I_2} \,|\, \dot{\alpha} k v' \rangle &= (-1)^{k-v'}(\;\; i)^{2k+a} \langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle \\
\langle \dot{\alpha} k v \,|\, (T^{\gamma}_{a\rho})^{I_2} \,|\, \alpha k v' \rangle &= (-1)^{k-v'}(-i)^{2k+a} \langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle \\
\langle \alpha k v \,|\, (T^{\gamma}_{a\rho})^{II_1} \,|\, \alpha' k v' \rangle &= (-1)^{k-v'} \langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle \\
\langle \dot{\alpha} k v \,|\, (T^{\gamma}_{a\rho})^{II_2} \,|\, \dot{\alpha} k v' \rangle &= (-1)^{k-v'}(-1)^{2k+a} \langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle
\end{aligned}$$

Les $T^{\gamma}_{a\rho}$ peuvent s'écrire $(T^{\gamma}_{a\rho})^{Lm} = \sigma^{Lm}_{\gamma a} \otimes B_{a\rho}$

$$\langle \tau k v \,|\, (T^{\gamma}_{a\rho})^{Lm} \,|\, \tau' k v' \rangle = \langle \tau \,|\, \sigma^{Lm}_{\gamma a} \,|\, \tau' \rangle \langle kv \,|\, B_{a\rho} \,|\, kv' \rangle$$

où nous avons posé :

$$\langle kv \,|\, B_{a\rho} \,|\, kv' \rangle = (-1)^{k-v'} \langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle$$

Les matrices $\sigma^{Lm}_{\gamma a}$ qui sont des matrices à deux lignes et deux colonnes sont définies par :

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha \,|\, \sigma^{I_1}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = (+i)^{2k+a+1}\delta_{\tau\dot{\alpha}} \,; &\quad& \langle \dot{\alpha} \,|\, \sigma^{I_1}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = (-i)^{2k+a+1}\delta_{\tau\alpha} \\
&\langle \alpha \,|\, \sigma^{I_2}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = (i)^{2k+a}\delta_{\tau\dot{\alpha}} &\quad& \langle \dot{\alpha} \,|\, \sigma^{I_2}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = (-i)^{2k+a}\delta_{\tau\alpha} \\
&\langle \alpha \,|\, \sigma^{II_1}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = \delta_{\tau\alpha} &\quad& \langle \dot{\alpha} \,|\, \sigma^{II_1}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = 0 \\
&\langle \alpha \,|\, \sigma^{II_2}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = 0 &\quad& \langle \dot{\alpha} \,|\, \sigma^{II_2}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = (-1)^{2k+a}\delta_{\tau\dot{\alpha}}
\end{aligned}$$

Étude de l'algèbre des matrices $B_{a\rho}$. — Les matrices $B_{a\rho}$ forment une base de l'espace vectoriel M des matrices à $2k + 1$ lignes et $(2k + 1)$ colonnes (même démonstration qu'à la p. 312).

Appelons M_ρ le sous-espace vectoriel de M engendré par les matrices $B'_{a\rho}$ (ρ fixé).

Le produit $B_{a\rho} \times B_{a'\rho'} \in M_\rho$.

Nous avons donc :

$$B_{a\rho}B_{a'\rho'} = \sum_{a''=\rho+\rho'}^{2k} b_{a'',\rho,\rho'} B_{a'',\rho+\rho'}$$

compte tenu de l'expression des éléments de matrices des $B_{a\rho}$ et des relations d'orthogonalité des coefficients $\langle kvk - v' \,|\, kka\rho \rangle$. Nous trouvons que les $b_{a'',\rho,\rho'}$ sont donnés par la formule :

$$\begin{aligned}
b_{a'',\rho+\rho'} = \sum_{v} (-1)^{k-v+\rho} \langle a'', \rho + \sum \rho' \,|\, v, -v + \rho + \rho' \rangle \\
\langle v - \rho, - v + \rho + \rho' \,|\, a'\rho' \rangle \langle v - v + \rho \,|\, a\rho \rangle \\
\langle kvkv' \,|\, kka\rho \rangle = \langle vv' \,|\, a\rho \rangle
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$
\mathrm{B}_{a_1\rho_1} \ldots \mathrm{B}_{a_n\rho_n} = \sum_{a'_2=\rho_1+\ldots+\rho_n}^{2k} \cdots \sum_{a'_n=\rho_{n-1}+\rho_n}^{2k} b_{a'_2,\rho_1,\rho_2+\ldots+\rho_n} \ldots b_{a'_n,\rho_{n-1},\rho_n} \mathrm{B}_{a'_2,\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_n}
$$

Algèbre des matrices $\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho}$. — Nous construisons les matrices

$$
2(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_1} = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}_1} + i(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}_2}\right] \quad \text{et} \quad 2(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_2} = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}_1} - i(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}_2}\right]
$$

nous avons :

$$
(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_1} = \sigma^{\mathrm{I}'_1}_{\gamma a} \otimes \mathrm{B}_{a\rho} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_2} = \sigma^{\mathrm{I}'_2}_{\gamma a} \otimes \mathrm{B}_{a\rho}
$$

avec :

$$
\begin{array}{ll}
\langle \alpha \,|\, \sigma^{\mathrm{I}'_1}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = (i)^{2k+a+1}\delta_{\dot{\alpha}\tau} \,; & \langle \alpha \,|\, \sigma^{\mathrm{I}'_2}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = 0 \\
\langle \dot{\alpha} \,|\, \sigma^{\mathrm{I}'_1}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle\, 0 \qquad ; & \langle \dot{\alpha} \,|\, \sigma^{\mathrm{I}'_2}_{\gamma a} \,|\, \tau \rangle = (-\,i)^{2k+a+1}
\end{array}
$$

compte tenu des propriétés précédentes, nous obtenons :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_1}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{I}'_1} = (\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_2}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{I}'_2} = (\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{II}_1}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{II}_2} = (\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{II}_2}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{II}_1} \\
\quad = (\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_1}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{II}_1} = (\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_2}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{II}_2} = (\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{II}_1}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{I}'_2} = (\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{II}_2}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{I}'_1} = 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{II}_1}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{II}_1} = \sum\limits_{a''} b_{a'',\rho,\rho'}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'',\rho+\rho'})^{\mathrm{II}_1} \\
(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{II}_2}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{II}_2} = \sum\limits_{a''} b_{a'',\rho,\rho'} \times (-\,1)^{2k+a+a'+a''}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'',\rho+\rho'})^{\mathrm{II}_2} \\
(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_1}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{I}'_2} = \sum\limits_{a''} b_{a'',\rho,\rho'} \times (i)^{a-a'}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'',\rho+\rho'})^{\mathrm{II}_1} \\
(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_2}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{I}'_1} = \sum\limits_{a''} b_{a'',\rho,\rho'} \times (-\,i)^{a-a'} \times (-\,1)^{2k+a''}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'',\rho+\rho'})^{\mathrm{II}_2} \\
(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_1}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{II}_2} = \sum\limits_{a''} b_{a'',\rho,\rho'} \times (i)^{a-a''} \times (-\,1)^{2k+a''}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'',\rho+\rho'})^{\mathrm{I}} \\
(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{I}'_2}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{II}_1} = \sum\limits_{a''} b_{a'',\rho,\rho'} \times (-\,i)^{a-a''}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'',\rho+\rho'})^{\mathrm{I}'_2} \\
(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{II}_1}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{I}'_1} = \sum\limits_{a''} b_{a'',\rho,\rho'} \times (i)^{a-a''}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'',\rho+\rho'})^{\mathrm{I}'_1} \\
(\mathrm{T}^{\gamma}_{a\rho})^{\mathrm{II}_2}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'\rho'})^{\mathrm{I}'_2} = \sum\limits_{a''} b_{a'',\rho,\rho'} \times (-\,i)^{a'-a''} \times (-\,1)^{2k+a}(\mathrm{T}^{\gamma}_{a'',\rho+\rho'})^{\mathrm{I}}
\end{array}
\right.
$$

Avec

$$b_{a'',\rho,\rho'} = \sum_{\nu} (-1)^{k-\nu+\rho} \langle a', \rho + \rho' \mid \nu, -\nu + \rho + \rho' \rangle \langle \nu, -\nu + \rho \mid a\rho \rangle \langle \nu - \rho, -\nu + \rho + \rho' \rangle$$

CONCLUSION

La détermination des matrices T ne dépend que de la variance des champs considérés. Dans un travail ultérieur nous nous proposons de développer une étude plus complète des systèmes d'équations considérés ici et notamment d'étudier les caractères de leurs solutions correspondant à des fonctions d'ondes.

(Manuscrit reçu le 10 janvier 1975)