

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. CAPDEQUI PEYRANÈRE

Approche algébrique du modèle de Thirring

Annales de l'I. H. P., section A, tome 23, n° 1 (1975), p. 99-112

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__23_1_99_0>

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Approche algébrique du modèle de Thirring

par

M. CAPDEQUI PEYRANÈRE

Département de Physique Mathématique ⁽¹⁾,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
34060 Montpellier-Cedex France

RÉSUMÉ. — On applique une méthode de quantification algébrique au modèle de Thirring. Plus précisément on trouve une condition sur le courant pour que l'hamiltonien de seconde quantification soit un opérateur autoadjoint positif sur l'espace de Fock des champs libres.

ABSTRACT. — We apply an algebraic method of second quantization to the Thirring model. More precisely we find a condition on the current in order that the hamiltonian of second quantization be a positive self adjoint operator on the free field Fock space.

INTRODUCTION

Le modèle de Thirring a été longuement étudié [1] [2] [3] [4]. Néanmoins, à notre connaissance, aucune résolution de type algébrique n'a été utilisée pour ce modèle. C'est ce que nous avons l'intention de faire dans ce travail.

Nous rappelons d'abord certains résultats sur le modèle de Thirring, modifié par une régularisation et dans lequel le courant d'interaction est considéré comme un potentiel extérieur. Ceux-ci nous permettront de trouver dans quelles conditions peut être appliquée la méthode de quantification algébrique utilisée par Bongaartz dans le cas d'un champ extérieur statique [5]. Plus précisément nous trouverons des conditions pour que

⁽¹⁾ Physique Mathématique et Technique. Équipe de recherche associée au C. N. R. S.

l'hamiltonien total soit un opérateur autoadjoint dans l'espace de Fock des champs libres.

Pour cette étude nous usons d'un espace-temps bidimensionnel M de signature temporelle $+1$ ($g_{00} = -g_{11} = 1$; $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$) [6]. En accord avec cette métrique, la représentation matricielle des générateurs de l'algèbre de Clifford est $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, l'identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et bien sur $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2g_{\mu\nu}$. Le produit scalaire de deux spineurs est écrit (u, v) , u et $v \in S(M)$ (spineurs sur M). Afin que les γ_μ soient hermitiens, ce produit sera donné par $(u, v) = u_2^* v_1 + u_1^* v_2$ si u_1, u_2 et v_1, v_2 sont respectivement les composantes des spineurs u et v .

SECTION I. — RÉSULTATS SUR LE MODÈLE DE THIRRING (MÉCANIQUE QUANTIQUE)

Nous n'avons besoin, pour l'instant, que d'une étude du modèle dans le cadre de la mécanique quantique. Néanmoins nous introduirons une régularisation dans l'équation habituelle du modèle. La nécessité de régulariser ne se situe pas, en effet, au niveau de la mécanique quantique mais au niveau de la théorie quantique des champs. Dans ce cas, champs et courants sont des distributions à valeur d'opérateur. Que signifient alors des expressions quadratiques en le courant (lagrangien d'interaction) ou comme le produit du courant par le champ? (pour plus de détails voir par exemple [7]).

Soit donc l'équation suivante où $\psi(x)$ appartient à $S(M)$:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + g\gamma^\mu (j_\mu * \eta)\psi(x) = 0 \quad (I.1)$$

où g est la constante de couplage, $j_\mu = (\psi(x), \gamma_\mu \psi(x))$ le courant et η la fonction régularisante ⁽²⁾ que nous supposons réelle et appartenant à l'espace $\mathcal{D}(M)$ (C^∞ à support compact).

Cette équation ⁽³⁾, malgré la présence de la fonction η , est invariante sous le groupe de jauge (transformations de $\Psi(x)$ en $\Psi^\lambda(x) = [\exp i\lambda(x)]\Psi(x)$ avec $\partial_\mu \lambda(x) = 0$) et invariante sous le groupe de Touschek [10] (transformations de $\Psi(x)$ en $\Psi^\pm(x) = [\exp i\pi\lambda\gamma^\pm]\Psi(x)$ avec $\gamma^\pm = 1 \pm \gamma_5$ et $\lambda \in \mathbb{R}$). Elle se prête donc au même style de traitement que l'équation habituelle :

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) + g\gamma^\mu j_\mu \Psi(x) = 0$$

Nous suivons donc la méthode de Klaiber [3]. Soit

$$\Psi(x) = [\exp i\alpha j(x)]\Phi(x) \quad (I.2)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Phi \in S(M)$, $j(x)$ sont à déterminer.

⁽²⁾ Berezin appelle cette fonction η le facteur de forme [8].

⁽³⁾ Pour plus de détails au sujet des invariances et des lois de conservation (cf. [7] [9]).

On a

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) = i\gamma^\mu [i\alpha j \partial_\mu j(x)] \Psi(x) + i\gamma^\mu [\exp i\alpha j(x)] \partial_\mu \Phi(x)$$

Si on suppose que :

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Phi(x) = 0 \tag{C_1}$$

il vient :

$$g(j_\mu * \eta)(x) \Psi(x) = \alpha [\partial_\mu j(x)] \Psi(x)$$

et cela, quel que soit $\Psi(x) \in S(M)$, solution de (I.1).

Si on définit $j(x)$ par :

$$\partial_\mu j(x) = (j_\mu * \eta)(x) \tag{C_2}$$

il faut que

$$\alpha = g. \tag{C_3}$$

La fonction η étant réelle et $j_\mu(x)$ étant hermitien, la condition C_2 montre que $j(x)$ est aussi hermitien.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= (\Psi(x), \gamma_\mu \Psi(x)) \\ &= (e^{igj(x)} \Phi(x), \gamma_\mu e^{igj(x)} \Phi(x)) \\ &= (\Phi(x), \gamma_\mu \Phi(x)) \end{aligned}$$

De tout ceci, on conclut que le courant d'interaction peut être considéré comme un courant libre, et que la solution de l'équation (I.1) est (I.2) assortie des conditions (C_1, C_2, C_3).

L'important, pour ce qui suit, est que le courant $j_\mu(x)$ soit indépendant du champ $\Psi(x)$ et puisse donc être considéré comme un potentiel extérieur.

SECTION II. — THÉORIE ALGÈBRIQUE DU MODÈLE (THÉORIE DES CHAMPS)

A. Introduction.

(cf. [5] [11] [12]).

Les champs spinoriels $\Psi(x)$ ⁽⁴⁾, solutions des équations du formalisme hamiltonien :

$$(H) \left\{ \begin{aligned} &[\Psi(x^0, x^1), \Psi(x^0, y^1)]_+ = [\Psi^*(x^0, x^1), \Psi^*(x^0, x^1)]_+ = 0 \\ &[\Psi(x^0, x^1), \Psi(x^0, y^1)]_+ = \delta(x^1 - y^1) \\ &\frac{\partial \Psi}{\partial x^0}(x^0, x^1) = i[H, \Psi(x^0, x^1)]_- \\ &\frac{\partial \Psi^*}{\partial x_0}(x^0, x^1) = i[H, \Psi^*(x^0, x^1)]_- \end{aligned} \right.$$

où H est l'hamiltonien, sont des champs de Heisenberg.

⁽⁴⁾ A partir de cette section les lettres Ψ désignent des opérateurs et non des fonctions.

$\Psi(x^0, x^1) = e^{iHx^0}\Psi(0, x^1)e^{-iHx^0}$ vérifie (H) si $\Psi(0, x^1)$ vérifie aussi (H) : x^0 peut être considéré comme un paramètre. Ces champs seront notés $\Psi(x^1)$; pour obtenir de véritables distributions à valeur d'opérateur, on étale ces champs à l'aide de fonctions-test adéquates :

$$\Psi(f) = \sum_{\sigma=1,2} \int \Psi_{\sigma}(x^1) \bar{f}_{\sigma}(x^1) dx^1 \quad \text{où } f = f_1 \oplus f_2.$$

On a alors

$$[\Psi(f), \Psi(g)]_+ = [\Psi^*(f), \Psi^*(g)]_+ = 0.$$

et

$$[\Psi(f), \Psi^*(g)]_+ = \sum_{\sigma=1,2} \int \bar{f}_{\sigma}(x^1) g_{\sigma}(x^1) dx^1 = (f, g).$$

$\Psi(f)$ et $\Psi^*(f)$ peuvent être considérés comme les générateurs d'une C^* -algèbre abstraite dont les propriétés seront obtenues par l'étude de cette C^* -algèbre.

Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert réel séparable de dimension paire. A \mathcal{H} est associée l'algèbre de Clifford $C_0(\mathcal{H})$ jouissant des propriétés suivantes :

- . $C_0(\mathcal{H})$ est une C^* -algèbre complexe à unité.
- . Il existe une application injective réelle R de \mathcal{H} dans $C_0(\mathcal{H})$ telle que :

$$[R(z_1), R(z_2)]_+ = 2(z_1, z_2)_R I, \quad z_1, z_2 \in \mathcal{H},$$

$(z_1, z_2)_R$ étant le produit scalaire réel défini sur \mathcal{H} . La complétion de $C_0(\mathcal{H})$ par rapport à la norme naturelle dans $C_0(\mathcal{H})$ fournit $C(\mathcal{H})$, la C^* -algèbre des fermions. C'est une algèbre simple dont les $*$ représentations sont fidèles et préservent la norme. Si T est une transformation orthogonale de \mathcal{H} , alors il existe un automorphisme unique α_T dans $C(\mathcal{H})$ tel que $\alpha_T[R(z)] = R(Tz)$.

B. Construction de la C^* -algèbre.

Soit l'espace de Hilbert complexe $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tel que $(\lambda f, g) = \bar{\lambda}(f, g)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, f et $g \in \mathcal{H}$. Si on se restreint aux λ réels, cet espace complexe peut être assimilé à un espace de Hilbert réel en prenant la partie réelle du produit scalaire :

$$(f, g)_R = \text{Re}(f, g).$$

Les générateurs de $C(\mathcal{H})$ peuvent être définis par

$$\begin{aligned} \Psi(f) &= \frac{1}{2} [R(f) + iR(if)], \\ \Psi^*(f) &= \frac{1}{2} [R(f) - iR(if)]. \end{aligned} \quad \forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

Ils vérifient les relations habituelles :

$$\begin{aligned} [\Psi(f), \Psi(g)]_+ &= [\Psi^*(f), \Psi^*(g)]_+ = 0 \\ [\Psi(f), \Psi^*(g)]_+ &= (f, g)I \end{aligned}$$

De plus $\Psi^*(f)$ dépend linéairement de f et $\Psi(f)$ antilinéairement.

Si T est un opérateur unitaire sur $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors il existe un automorphisme α_T tel que $\alpha_T[R(f)] = R(Tf)$. Les champs étalés sont représentés par $\Psi(f)$ et $\Psi^*(f)$ et engendrent la C^* -algèbre des champs de fermions.

Il nous faut trouver à présent un automorphisme représentant l'évolution temporelle du système physique. A cet effet, revenons à l'équation d'évolution du modèle de Thirring (I. 1). Soit $A(j_\mu, \eta)$ l'opérateur vectoriel réel défini par la correspondance suivante :

$$h(x) \rightarrow (j_\mu * \eta)(x)h(x), \quad h \in S(M)$$

L'équation classique du modèle s'écrit alors :

$$i\gamma^\mu \partial_\mu h + g\gamma^\mu A(j_\mu, \eta)h = 0$$

ou en décomposant :

$$[i\partial_0 + gA(j_0, \eta)]h + \gamma^0\gamma^1[i\partial_1 + gA(j_1, \eta)]h = 0.$$

Définissons l'« hamiltonien de Schrödinger » B par

$$i\partial_0 h = B h \quad \text{où} \quad B = B_0 + gB_1$$

avec $B_0 = -i\gamma^0\gamma^1\partial_1$ et $B_1 = -A(j_0, \eta) - \gamma^0\gamma^1A(j_1, \eta)$. Pour le produit scalaire dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, B est self adjoint dans $D(B_0) \cap D(B_1)$, domaine dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ puisque B_0 est une dérivation et B_1 est une multiplication.

L'hamiltonien de Schrödinger B est indépendant du temps. En effet $\partial_0 B = \partial_0(j^0 + \gamma_0\gamma_1j^1) * \eta$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \partial_0 j^0 + \partial_0 j^1 & 0 \\ 0 & \partial_0 j^0 - \partial_0 j^1 \end{pmatrix} * \eta$$

Si on veut que $\partial_0 B$ soit nul, il faut donc que $\partial_0 j^\mu = 0, \mu = 0, 1$. Or on sait (voir section I) que le courant libre est identique au courant d'interaction :

$$j_\mu(x) = (\Phi(x), \gamma_\mu \Phi(x))$$

où $\Phi(x)$ est tel que : $i\gamma^\mu \partial_\mu \Phi(x) = 0$. Mais si $\Phi(x) = \Phi(t, x_1)$ est un champ libre alors

$$\Phi(t, x_1) = \exp(-iB_0 t)\Phi(0, x_1)$$

avec $B_0 = -i\gamma_0\gamma_1\partial_1$. Vu les propriétés d'hermiticité de $i\partial_1$ par rapport au produit scalaire dans $S(M)$ et d'anti-hermiticité de $\gamma_0\gamma_1$ par rapport à

ce même produit scalaire, on a successivement, puisque $\gamma_0\gamma_1$ anticommute avec γ_μ :

$$\begin{aligned} j_\mu(t, x_1) &= (e^{-iB_0 t}\Phi(0, x_1), \gamma_\mu e^{-iB_0 t}\Phi(0, x_1)) \\ &= (e^{-iB_0 t}\Phi(0, x_1), e^{+iB_0 t}\gamma_\mu\Phi(0, x_1)) \\ &= (e^{-i(B_0)^* t}e^{-iB_0 t}\Phi(0, x_1), \gamma_\mu\Phi(0, x_1)) \\ &= (e^{+iB_0 t}e^{-iB_0 t}\Phi(0, x_1), \gamma_\mu\Phi(0, x_1)) = j_\mu(0, x_1) \end{aligned}$$

On a donc bien $\partial_0 j^\mu = 0$. On en déduit, puisque B ne dépend pas du temps que l'équation $i\partial_0 h = Bh$ a pour solution dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$:

$$h(t, x_1) = \exp(-iBt)h(0, x_1).$$

Par conséquent il existe un opérateur unitaire dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ représentant l'évolution temporelle du système. Il induit donc un automorphisme α_T représentant l'évolution :

$$\alpha_T[\Psi(h)] = \Psi[e^{iBt}h], \quad h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad (\text{II. B1})$$

Il est bien évident que la méthode employée ci-dessus n'est correcte que dans le cas où le courant d'interaction est égal au courant libre. Ce qui revient à dire que le courant est indépendant du champ et peut donc être considéré comme une source extérieure statique.

Une autre conséquence de l'indépendance du courant par rapport à la variable temporelle est qu'il est inutile de régulariser le courant par rapport aux deux variables. Donc dans ce qui suit nous supposons que la fonction régularisante η est une fonction de x_1 seule et que c'est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (fonction C^∞ à support compact).

C. Espaces de représentation.

Nous étudions seulement les espaces de Fock mais nous faisons la différence entre espace de Fock des champs libres et espace de Fock des champs en interaction. Par définition la donnée de la C^* -algèbre $C(\mathcal{H}) = C(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$ et des automorphismes associés à B_0 et à B sera appelée respectivement système libre et système total. Nous les noterons $\{C(\mathcal{H}), \alpha_T^0\}$ et $\{C(\mathcal{H}), \alpha_T\}$. Une $*$ -représentation irréductible $C(\mathcal{H})$ en tant que C^* -algèbre d'opérateurs dans un espace de Hilbert K sera dite représentation « physique » d'un système ou d'un autre si elle vérifie les trois points suivants :

. Il existe un groupe continu à un paramètre d'opérateurs unitaires représentant l'automorphisme α_t :

$$\alpha_t(A) = e^{iHt}Ae^{-iHt}, \quad A \in C(\mathcal{H}).$$

. $H \geq 0$.

. Il existe un unique vecteur $|0\rangle \in K$ tel que $e^{iHt}|0\rangle = |0\rangle$. En termes physiques, ces trois points signifient que l'on postule l'existence de l'hamiltonien en tant qu'opérateur self adjoint, la positivité de l'énergie et l'existence du vide comme seul vecteur invariant.

L'existence et l'unicité (à une équivalence unitaire près) de cette représentation « physique » associée au système $\{C(\mathcal{H}), \alpha_T\}$ ont été prouvées dans [13].

Soit E_F l'espace multiparticulaire antisymétrique défini par

$$E_F(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$$

avec $M_0 = \mathbb{C}$, $M_1 = M$ et $M_n \wedge M \wedge \dots \wedge M$ (\wedge : produit tensoriel antisymétrique). Si A est un opérateur self adjoint sur M , il induit un opérateur self adjoint $\rho(A)$ sur E_F tel que :

$$\left. \begin{aligned} \cdot A \geq B &\Rightarrow \rho(A) \geq \rho(B) \\ \cdot e^{i\rho(A)t}\rho(B)e^{-i\rho(A)t} &= \rho[e^{iAt}Be^{-iAt}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.C.2})$$

où A et B sont self adjoints sur M [14].

Étudions à présent le système libre $\{C(\mathcal{H}), \alpha_T^0\}$. Il est nécessaire de trouver des opérateurs de champs qui représentent les générateurs de la C^* -algèbre $C(\mathcal{H})$ et qui satisfont les relations d'anticommuation. A cet effet considérons l'« hamiltonien de Schrödinger » B_0 et les sous-espaces H_+ et H_- reliés aux parties positive et négative du spectre de B_0 . Alors nous définissons les projecteurs P_+, P_- sur H_+, H_- par $P_{\pm}\mathcal{H} = H_{\pm}$.

Nous définissons aussi l'espace monoparticulaire par $H' = H_p \oplus H_a$ où H_p et H_a sont des copies de H_+ correspondant aux espaces des particules et des antiparticules. On peut écrire :

$$I_p H_+ = H_p = P_p H' \quad \text{et} \quad I_a H_+ = H_a = P_a H'$$

Ces relations définissent I_p et I_a comme des identificateurs et P_p et P_a des projecteurs sur H_p et H_a .

Soit C la conjugaison de charge ($[C, B]_+ = 0$) et soit μ l'application orthogonale telle que $\mu(\mathcal{H}) = H'$. Alors

$$\mu = I_p P_+ + I_a C P_-$$

L'espace de représentation de la théorie libre est l'espace multiparticulaire sur $H' : K_0 = E_F(H')$. On définit les créateurs et les annihilateurs sur l'espace de Hilbert K_0 pour tout $f \in \mathcal{H}$ par :

$$\begin{aligned} \text{créateur de particule} & : p^*(f) = b^*(\mu P_+ f) \\ \text{» d'antiparticule} & : a^*(f) = b^*(\mu P_- f) \\ \text{annihilateur de particule} & : p(f) = b(\mu P_+ f) \\ \text{» d'antiparticule} & : a(f) = b(\mu P_- f) \end{aligned}$$

où b est l'annihilateur sur H' .

On en déduit les opérateurs de champ :

$$\Psi(f) = p(f) + a^*(f) \quad \text{et} \quad \Psi^*(f) = p^*(f) + a(f).$$

Ils vérifient les relations d'anticommutation usuelles. Il reste à vérifier les trois points précédents. Soit Q_0 l'opérateur dans H' suivant :

$$Q_0 = I_p P + B_0 I_p^{-1} P_p + I_a P + B_0 I_a^{-1} P_a$$

On peut montrer [5] [7] qu'il est self adjoint et positif. Donc $\rho(Q_0)$ sera un opérateur positif self adjoint dans K_0 . On peut montrer aussi qu'il satisfait à la relation suivante ([5] [7]).

$$\alpha_t^0[\Psi(f)] = e^{i\rho(Q_0)t}\Psi(f)e^{-i\rho(Q_0)t}, \quad t \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{H} \quad (\text{II.C.3})$$

ainsi qu'au principe d'unicité du vide.

Ainsi $\rho(Q_0)$ peut être interprété comme un hamiltonien libre de seconde quantification.

Bien évidemment, on peut faire la même chose avec le système $\{C(\mathcal{H}), \alpha_t\}$ et trouver un hamiltonien total $\rho(Q)$, opérateur positif et self adjoint sur l'espace des champs en interaction K défini de manière analogue à K_0 . L'interaction fermionique de Thirring ne change pas la structure de la démonstration puisque particules et antiparticules ont le même comportement vis-à-vis de cette interaction (Dans le cas contraire, voir par exemple [5]).

D. Nouvelle définition de l'hamiltonien. Théorèmes fondamentaux.

Nous venons de voir qu'il fallait distinguer les deux espaces de représentation K_0 et K , suivant que les opérateurs de champs correspondaient à une théorie libre ou à une théorie en interaction. Les hamiltoniens $\rho(Q_0)$ et $\rho(Q)$ opèrent, bien sûr, dans K_0 et K respectivement. On suppose souvent que $\rho(Q)$ est aussi un opérateur self adjoint dans K_0 , ce qui est en général faux. Ainsi allons-nous donner une autre définition de l'hamiltonien afin que ce nouvel opérateur soit réellement un opérateur positif, self adjoint, dans l'espace des champs libres K_0 . Pour ce faire, nous utilisons la possibilité de définir l'hamiltonien H uniquement par ses relations de commutation avec les champs irréductibles $\Psi(f)$ et $\Psi^*(f)$: $[\Psi(f), H]_- = \Psi(Bf)$, B étant l'« hamiltonien » de Schrödinger défini à la sous-section II B. Pour des champs libres, nous avons la relation (II.C.3). De la même manière, on démontrerait la relation suivante pour des champs en interaction :

$$\alpha_t[\Psi(f)] = e^{i\rho(Q)t}\Psi(f)e^{-i\rho(Q)t}$$

Appelons $\rho(Q) = H$ et utilisons (II.B.1) ; nous trouvons :

$$\Psi(e^{iBt}f) = e^{iHt}\Psi(f)e^{-iHt} \quad (\text{II.D.4})$$

Par cette relation ⁽⁵⁾, l'hamiltonien H est défini seulement à une constante additive près ($f \in \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$). En outre nous sommes sûrs que H est un

⁽⁵⁾ $[\Psi(f), H]_- = \Psi(Bf)$ est la forme infinitésimale de (II.D.4).

opérateur dans K , positif self adjoint et tel que $e^{iHt} | 0 \rangle = | 0 \rangle$. Il reste à savoir quand H sera un opérateur dans K_0 . A cet effet nous énonçons deux théorèmes démontrés par Bongaartz [5].

THÉORÈME 1. — Il existe un opérateur self-adjoint H dans K_0 satisfaisant à la relation (II.D.4) si et seulement si $P_+ e^{iBt} P_-$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt dans \mathcal{H} .

THÉORÈME 2. — Soit B un opérateur self-adjoint dans \mathcal{H} avec $B = B_0 + gB_1$. Soit $B_1(s) = e^{-iB_0 s} B_1 e^{+iB_0 s}$, $s \in \mathbb{R}$ et $R_1(t) = -i \int_0^t B_1(s) ds$. Si $P_+ R_1(t) P_-$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, alors $P_+ e^{iBt} P_-$ est aussi un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Le second théorème est plus restrictif que le premier, mais il est plus maniable et nous l'utiliserons dans la section suivante.

Dans toute la construction que nous avons faite le fait que l'hamiltonien de Schrödinger soit indépendant du temps est essentiel. Dans le cas d'un potentiel extérieur non statique voir par exemple [15] [19].

SECTION III. — APPLICATION AU MODÈLE DE THIRRING

Dans le cas particulier du modèle de Thirring tel qu'il a été étudié à la section I (i. e. avec une régularisation) on peut déduire le théorème suivant du théorème 2.

THÉORÈME. — Le théorème 2 est vérifié si le courant $j_\mu(x_0, x_1) = j_\mu(0, x_1)$ est une distribution de l'espace $\mathcal{D}'_{\mathcal{L}^2}$, par rapport bien sûr à la variation spatiale.

$\mathcal{D}'_{\mathcal{L}^2}$ est le dual de $\mathcal{D}_{\mathcal{L}^2}$, espace vectoriel des fonctions de \mathcal{D} dont toutes les dérivées appartiennent à \mathcal{L}^2 . Les distributions de $\mathcal{D}'_{\mathcal{L}^2}$ peuvent être caractérisées comme étant des sommes finies de dérivées de fonctions de \mathcal{L}^2 . Pour plus de détails sur ces espaces voir, par exemple [16].

Démonstration. — Les transformées de Fourier par rapport à x_1 du courant j_μ et de la fonction η seront notées \tilde{j}_μ et $\tilde{\eta}$. La transformée de Fourier de j_μ existe car les espaces $\mathcal{D}'_{\mathcal{L}^p}$ sont inclus dans l'espace S' des distributions tempérées, espace invariant par cette transformation. De plus [16] ($j_\mu * \eta$) est une fonction C^∞ de l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier sera donc une fonction de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Dans l'espace des moments, le transformé de B_0 est l'énergie totale du système libre. Comme $B_1 = -A(j_0, \eta) - \gamma_5 A(j_1, \eta)$ est un opérateur qui agit multiplicativement, l'opérateur

$$P_+ R_1(t) P_- = -i \int_0^t P_+ e^{-iB_0 s} B_1 e^{+iB_0 s} P_- ds$$

à pour noyau dans l'espace des moments :

$$N(t, k_1, k_2) = -i \int_0^t P_+(k_2) P_-(k_1) e^{-i(E_2 - E_1)s} \tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1) \cdot [\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) + \gamma_5 \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)] ds.$$

Les projecteurs $P_{\pm}(k)$ sont égaux à $\frac{1}{2} \left(I \pm \gamma_5 \frac{k^1}{E_1} \right)$ avec $k^1 \in \mathbb{R}$ et $E = |k^1| \in \mathbb{R}^+$

$$P_+(k_2) P_-(k_1) = \frac{1}{4} \left(I + \gamma_5 \frac{k_2^1}{E_2} \right) \left(I - \gamma_5 \frac{k_1^1}{E_1} \right) = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{k_1^1 k_2^1}{E_1 E_2} - \gamma_5 \left(\frac{k_1^1}{E_1} - \frac{k_2^1}{E_2} \right) \right] I$$

En examinant tous les cas possibles, on trouve

$$P_+(k_2) P_-(k_1) = \frac{1}{2} (I + \gamma_5) \theta(-k_1^1) \theta(k_2^1) + \frac{1}{2} (I - \gamma_5) \theta(k_1^1) \theta(-k_2^1)$$

où θ est la fonction d'Heaviside.

On a, de plus, les relations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (I + \gamma_5) \gamma_5 &= \frac{1}{2} (I + \gamma_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} (I - \gamma_5) \gamma_5 &= -\frac{1}{2} (I - \gamma_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le noyau de l'opérateur $P_+ R_1(t) P_-$ peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$N(t, k_1, k_2) = \begin{bmatrix} N_{11}(t, k_1, k_2) & 0 \\ 0 & N_{22}(t, k_1, k_2) \end{bmatrix}$$

avec

$$N_{11}(t, k_1, k_2) = -i \theta(-k_1^1) \theta(k_2^1) \int_0^t e^{-i(E_2 - E_1)s} \tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1) [\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) + \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)] ds. \quad (\text{III.1})$$

et

$$N_{22}(t, k_1, k_2) = -i \theta(k_1^1) \theta(-k_2^1) \int_0^t e^{-i(E_2 - E_1)s} \tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1) [\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) - \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)] ds \quad (\text{III.2})$$

On en déduit que l'opérateur intégral $P_+ R_1(t) P_- = T$ s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

avec $T_{ii}(\cdot) = \int N_{ii}(t, k_1, k_2)(\cdot) dk_1^1$.

Pour que T soit un opérateur de Hilbert-Schmidt, il faut que T_{11} et T_{22}

le soient aussi. Etant du type intégral, leurs normes d'Hilbert-Schmidt sont données par [17] :

$$\|T_{ii}\|_2^2 = \int |N_i(t, k_1, k_2)|^2 dk_1^1 dk_2^1 \tag{III.3}$$

et T sera H - S si $\|T_{ii}\|_2^2 < \infty$.

Il vient alors immédiatement d'après (III. 1) et (III. 2)

$$|N_{11}(t, k_1, k_2)| = \left| \theta(-k_1^1)\theta(k_2^1) \cdot \frac{1 - e^{+i(E_1 - E_2)t}}{E_1 - E_2} \cdot \frac{|\tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1)[\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) + \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)]|}{|\tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1)[\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) + \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)]|} \right|$$

et

$$|N_{22}(t, k_1, k_2)| = \left| \theta(k_1^1)\theta(-k_2^1) \cdot \frac{1 - e^{+i(E_1 - E_2)t}}{E_1 - E_2} \cdot \frac{|\tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1)[\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) - \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)]|}{|\tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1)[\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) - \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)]|} \right|$$

En appliquant (III. 3) on a :

$$\|T_{11}\|_2^2 \leq \int dk_1^1 dk_2^1 \left\{ \left| \theta(-k_1^1)\theta(k_2^1) \cdot \frac{1 - e^{+i(E_1 - E_2)t}}{E_1 - E_2} \cdot \frac{|\tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1)[\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) + \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)]|}{|\tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1)[\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) + \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)]|} \right|^2 \right\}$$

c'est-à-dire :

$$\|T_{11}\|_2^2 \leq \int_{-\infty}^0 dk_1^1 \int_0^{\infty} dk_2^1 \left\{ \left| \frac{1 - e^{+i(E_1 - E_2)t}}{E_1 - E_2} \cdot \frac{|\tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1)[\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) + \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)]|}{|\tilde{\eta}(k_2^1 - k_1^1)[\tilde{j}_0(k_2^1 - k_1^1) + \tilde{j}_1(k_2^1 - k_1^1)]|} \right|^2 \right\} \tag{III.4}$$

Et de même pour T_{22} .

Si on change k_1^1 en $-k_1^1$ dans T_{11} et k_2^1 en $-k_2^1$ dans T_{22} , on a dans chacun d'eux $E_i = k_i^1$. Pour T_{11} par exemple, on a d'après (III. 4)

$$\|T_{11}\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}^+} dE_1 dE_2 \left| \frac{1 - e^{+i(E_1 - E_2)t}}{E_1 - E_2} \tilde{\eta}(E_1 + E_2) \cdot \frac{|\tilde{j}_0(E_1 + E_2) + \tilde{j}_1(E_1 + E_2)|}{|\tilde{j}_0(E_1 + E_2) + \tilde{j}_1(E_1 + E_2)|} \right|^2 \tag{III.5}$$

Soit à présent $E_1 + E_2 = q$ et $E_1 - E_2 = p$; alors $p < q$, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^+$ et le jacobien est égal à $\frac{1}{2}$. (III. 5) donne :

$$\|T_{11}\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} dq \int_{-\infty}^q dp \left| \frac{1 - e^{ipt}}{p} \tilde{\eta}(q)[\tilde{j}_0(q) + \tilde{j}_1(q)] \right|^2$$

et

$$\|T_{22}\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} dq \int_{-\infty}^q dp \left| \frac{1 - e^{ipt}}{p} \tilde{\eta}(-q)[\tilde{j}_0(-q) - \tilde{j}_1(-q)] \right|^2$$

ou encore

$$\|T_{11}\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^+} \left(|\tilde{\eta}(q)[\tilde{j}_0(q) + \tilde{j}_1(q)]|^2 \int_{-\infty}^q \frac{1 - \cos pt}{p^2} dp \right) dq \quad (\text{III.6})$$

et de même pour T_{22} .

$$\text{Or (voir appendice)} \int_{-\infty}^q \frac{1 - \cos pt}{p^2} \leq t \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right) + \frac{\cos qt - 1}{q}.$$

Si l'intégrale (III.6) avec le terme $t \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right)$ converge, celle avec le terme $\frac{\cos qt - 1}{2}$ convergera *a fortiori* car il n'introduit pas de divergence

à l'origine $\left(\sim \frac{1}{2} qt^2 \right)$ et renforce la convergence à l'infini $\left(\sim \frac{1}{q} \right)$.

Il suffit donc, pour que T soit un opérateur de Hilbert-Schmidt, que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^+} dq |\tilde{\eta}(\pm q) \cdot [\tilde{j}_0(\pm q) \pm \tilde{j}_1(\pm q)]|^2$ converge. Cela signifie que $\tilde{\eta}(\pm q) \cdot [\tilde{j}_0(\pm q) \pm \tilde{j}_1(\pm q)] \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+)$ ou, d'après les propriétés de la transformation de Fourier, que

$$[\eta * (j_0 \pm j_1)] \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$$

Donc $[I\theta](j_0 \pm j_1)$ est bien une distribution de $\mathcal{D}'_{\mathcal{L}^2}$. Ce qui implique bien que $j_\mu(x_0, x_1) = j_\mu(0, x_1)$ soit une distribution de $\mathcal{D}'_{\mathcal{L}^2}$ par rapport à la variable spatiale. D'où le théorème.

CONCLUSION

La condition obtenue pour avoir un hamiltonien total satisfaisant à la relation (II. D.4) n'est pas incompatible avec la mécanique quantique. En effet on trouve que le courant $j_\mu(x) = (\Psi(x), \gamma_\mu \Psi(x))$ est une distribution de $\mathcal{D}'_{\mathcal{L}^2}$ si on régularise le problème, i. e. pour une situation non locale. Dans le cas local, c'est-à-dire sans régularisation, on aurait trouvé que $j_\mu(x)$ doit être une fonction de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Or en mécanique quantique, $\Psi(x)$ est une fonction de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, et par conséquent le courant $j_\mu(x)$, qui est quadratique en la fonction d'onde, est une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Il n'y a pas incompatibilité car les espaces $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ont une intersection dense. La résolution algébrique de notre problème permet donc de trouver un « bon » hamiltonien total (self adjoint, positif...) et ce, sans conditions draconiennes.

APPENDICE

Soit $I(t, q) = \int_{-\infty}^q \frac{1 - \cos pt}{p^2} dp$. Définissons I_1 et I_2 par $I_1 = I(t, 0)$ et $I_2 = I(t, q) - I(t, 0)$.

En intégrant par parties, on a successivement :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos pt}{p^2} dp = t \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = t \frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \frac{\cos qt - 1}{q} + t \int_0^{qt} \frac{\sin x}{x} dx$$

La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est bornée pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Donc $F(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$ existe pour tout $y \in \mathbb{R}^+$.

Trouvons les extremums de $F(y)$: $\frac{dF}{dy} = \frac{\sin y}{y}$, donc $F(y)$ a des extremums en $y = n\pi (n \in \mathbb{N}^*)$.

Le maximum est atteint pour $n = 1$. En effet :

$$F(y) = \sum_{n=0}^N \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{(n+1)\pi}^y \frac{\sin x}{x} dx$$

Définissons u_n par

$$u_n = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Alors

$$u_{n+1} - u_n = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin x| \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - \pi} \right) dx < 0$$

Mais $u_{n+1} < u_n$ implique $F(\pi) > F(y)$ quel que soit $y > \pi$.

Par conséquent

$$I_2 < \frac{\cos qt - 1}{q} + t \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$F(\pi)$ étant inférieure à 2 (1,85193 ... [18]) on a bien

$$I(t, q) = \int_{-\infty}^q \frac{1 - \cos pt}{p^2} dp < \frac{\cos qt - 1}{q} + t \left(\frac{\pi}{2} + 2 \right).$$

L'auteur remercie le Professeur G. Loupias pour son aide constante et le Docteur R. Sciler pour une lecture critique du manuscrit.

REFERENCES

- [1] W. E. THIRRING, *Ann. Phys.*, t. 3, 1958, p. 91.
- [2] V. GLASER, *Nuovo Cimento*, t. 9, 1958, p. 990.
- [3] B. KLAIBER, *Lecture notes*. Theoretical Physics Institute. University of Colorado, Vol. 1, 1967, p. 141.
- [4] A. S. WIGHTMAN, *Cargèse Lecture in theoretical physics*, 1964, Maurice Levy Editor, Gordon and Breach.

- [5] P. J. M. BONGAARTZ, *Ann. Phys.*, t. **56**, 1970, p. 108.
- [6] M. CAPDEQUI PEYRANÈRE, *D. E. A.*, juin 1971, Montpellier (non publié).
- [7] M. CAPDEQUI PEYRANÈRE, *Thèse de spécialité*, juin 1973, Montpellier (non publié).
- [8] F. A. BEREZIN, *The method of second quantization*, Academic Press, New York, 1966.
- [9] C. M. SOMMERFELD, *Ann. Phys.*, t. **16**, 1964, p. 1.
- [10] B. F. TOUSCHEK, *Nuovo Cimento*, t. **5**, 1957, p. 754 et t. **5**, 1957, p. 1281.
- [11] A. GUICHARDET, *Algèbres d'observables associées aux relations de commutation*, Armand Colin, Paris, 1968.
- [12] D. SHALE and W. F. STINESPRING, *Ann. Math.*, t. **80**, 1964, p. 365.
- [13] M. WEINLESS, *Journal of Funct. Analysis*, t. **4**, 1965, p. 350.
- [14] J. M. COOK, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **74**, 1951, p. 222.
- [15] R. SEILER, *Commun. math. Phys.*, t. **25**, 1972, p. 127.
- [16] L. SCHWARTZ, *Theorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966, p. 201.
- [17] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, Berlin, 1966.
- [18] JAHNKE-EMDE-LOSCH, *Table of higher functions*, Mac Graw-Hill Book Company.
- [19] A. S. WIGHTMANN, Relativistic wave equations as singular hyperbolic systems, *Proc. Symp. in Pure Math.*, vol. **XXIII**, Berkeley, 1971, Providence (R. I.), 1973.

(Manuscrit reçu le 12 novembre 1973).