ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MARCEL BRAY

La magnétohydrodynamique relativiste étudiée par la méthode de G. F. R. Ellis

Annales de l'I. H. P., section A, tome 23, nº 3 (1975), p. 303-311

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__23_3_303_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXIII, n° 3, 1975, p. 303-311. *Physique théorique.*

La magnétohydrodynamique relativiste étudiée par la méthode de G. F. R. Ellis.

par

Marcel BRAY

ABSTRACT. — This article proposes to study stream-lines and the trajectories of the magnetic field in relativistic magnetohydrodynamics according to G. F. R. Ellis' method [1].

I. INTRODUCTION

L'espace fondamental est une variété de Riemann V_4 munie d'une métrique hyperbolique normale de signature $+---$.

Le tenseur de Ricci est défini par les formules

$$R_{\alpha\beta} = R^{\cdot\nu}_{\cdot\beta\nu\alpha}\,; \qquad R^{\cdot\nu}_{\cdot\beta\lambda\alpha} = \partial_\lambda(\Gamma_\beta{}^\nu{}_\alpha) - \partial_\alpha(\Gamma_\beta{}^\nu{}_\lambda) + \Gamma_\beta{}^\sigma{}_\alpha\Gamma_\sigma{}^\nu{}_\lambda - \Gamma_\beta{}^\sigma{}_\lambda\Gamma_\sigma{}^\nu{}_\alpha\,.$$

Nous désignerons par $U^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial s}$ le champ des vecteurs unitaires ($U^\alpha U_\alpha = 1$) tangents aux lignes de courant.

Fondée sur l'emploi systématique de l'identité de Ricci

$$2X_{\alpha;[\beta;\gamma]} = X^\sigma R_{\sigma\alpha\beta\gamma}$$

la méthode de G. F. R. Ellis sera appliquée à l'étude des lignes de courant et des trajectoires de $\vec{h}$ en magnétohydrodynamique relativiste.

II. LIGNES DE COURANT

La contraction par $\vec{U}$ de l'identité de Ricci appliquée à $\vec{U}$

$$(U_{\alpha;\beta;\gamma} - U_{\alpha;\gamma;\beta} - U^\sigma R_{\sigma\alpha\beta\gamma})U^\gamma = 0$$

permet d'écrire en introduisant la notation $(\ )^{\cdot} \equiv U^{\nu}\nabla_{\nu}(\ )$

$$(U_{\alpha;\beta})^{\cdot} - \nabla_{\beta}(\dot{U}_{\alpha}) + U_{\alpha;\gamma}U^{\gamma}{}_{;\beta} - R_{\alpha\sigma\gamma\beta}U^{\sigma}U^{\gamma} = 0$$

Si l'on désigne par $\pi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - U_{\alpha}U_{\beta}$ l'opérateur de projection dans l'espace associé à $\vec{U}$, la définition $A_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha}{}^{\rho}\pi_{\beta}{}^{\sigma}U_{\rho;\sigma}$ entraîne

$$A_{\alpha\beta} = U_{\alpha;\beta} - \dot{U}_{\alpha}U_{\beta}\,; \qquad A_{\alpha\beta}U^{\beta} = 0\,.$$

Il vient

$$(A_{\alpha\beta})^{\cdot} = \dot{\pi}_{\alpha}{}^{\rho}\pi_{\beta}{}^{\sigma}U_{\rho;\sigma} + \pi_{\alpha}{}^{\rho}\dot{\pi}_{\beta}{}^{\sigma}U_{\rho;\sigma} + \pi_{\alpha}{}^{\rho}\pi_{\beta}{}^{\sigma}\langle U_{\rho;\sigma}\rangle^{\cdot}$$

Soit, en portant dans cette expression la valeur de $\langle U_{\rho;\sigma}\rangle^{\cdot}$

$$\langle A_{\alpha\beta}\rangle^{\cdot} = -U_{\alpha}\dot{U}^{\rho}U_{\rho;\beta} + U_{\alpha}U_{\beta}(\dot{U}^{\rho}\dot{U}_{\rho}) - \dot{U}_{\alpha}\dot{U}_{\beta} - U_{\beta}\dot{U}^{\rho}U_{\alpha;\rho} + \pi_{\alpha}^{\rho}\pi_{\beta}^{\sigma}\dot{U}_{\rho;\sigma} - A_{\alpha\gamma}A^{\gamma}{}_{\cdot\beta} + R_{\alpha\rho\sigma\beta}U^{\rho}U^{\sigma}$$

On en tire

$$\pi_{\mu}^{\alpha}\pi_{\nu}^{\beta}\langle A_{\alpha\beta}\rangle^{\cdot} = -\dot{U}_{\mu}\dot{U}_{\nu} + \pi_{\mu}^{\alpha}\pi_{\nu}^{\beta}\dot{U}_{\alpha;\beta} - A_{\mu\gamma}A^{\gamma}_{\cdot\nu} + R_{\mu\rho\sigma\nu}U^{\rho}U^{\sigma}$$

D'où, par contraction avec $g^{\mu\nu}$:

$$\pi^{\alpha\beta}(A_{\alpha\beta})^{\cdot} = \nabla_{\alpha}(\dot{U}^{\alpha}) - A_{\alpha\beta}A^{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta}$$

Calculant maintenant $(A_{\alpha\beta})^{\cdot}$ à partir de la forme $A_{\alpha\beta} = U_{\alpha;\beta} - \dot{U}_{\alpha}U_{\beta}$ on établit aisément les relations

$$\langle A_{\alpha\beta}\rangle^{\cdot} = \langle U_{\alpha;\beta}\rangle^{\cdot} - \ddot{U}_{\alpha}U_{\beta} - \dot{U}_{\alpha}\dot{U}_{\beta}\,; \quad (U^{\alpha}{}_{;\alpha})^{\cdot} = \nabla_{\alpha}(\dot{U}^{\alpha}) - A_{\alpha\beta}A^{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta}$$

Nous poserons dorénavant

$$U^{\alpha}{}_{;\alpha} \equiv \theta\,; \qquad A_{(\alpha\beta)} \equiv \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3}\pi_{\alpha\beta}\,; \qquad A_{[\alpha\beta]} \equiv \omega_{\alpha\beta}$$

D'après les équations d'Einstein avec terme cosmologique

$$R_{\alpha\beta} = \chi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) + \Lambda g_{\alpha\beta}\,; \qquad \chi = 8\pi$$

dans lesquelles $T_{\alpha\beta}$ représente le tenseur magnétohydrodynamique [*2*]

$$T_{\alpha\beta} = (c^2 rf + \mu\,|\,h\,|^2)U_{\alpha}U_{\beta} - \left(p + \frac{\mu}{2}|\,h\,|^2\right)g_{\alpha\beta} - \mu h_{\alpha}h_{\beta}$$

on a

$$R_{\alpha\beta}U^{\alpha}U^{\beta} = \chi(c^2 rf + \mu\,|\,h\,|^2 + 2p) + \Lambda$$

D'où l'équation de Rauchaudhuri

$$\dot{\theta} = \nabla_{\alpha}(\dot{U}^{\alpha}) - 2(\sigma^2 - \omega^2) - \frac{\theta^2}{3} - \frac{\chi}{2}(c^2 rf + \mu\,|\,h\,|^2 + 2p) - \Lambda$$

avec

$$2\sigma^2 = \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\,; \qquad 2\omega^2 = \omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}\,.$$

Introduisant avec G. F. R. Ellis la quantité $\dot{l}/l = \frac{\theta}{3}$ nous avons

$$\frac{3\ddot{l}}{l} = \dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} = \nabla_\alpha(\dot{\mathrm{U}}^\alpha) - 2(\sigma^2 - \omega^2) - \frac{\chi}{2}(c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2 + 2p) - \Lambda$$

Expression qui fait apparaître le paramètre de décélération

$$q \equiv -\frac{\ddot{l}}{l}\mathrm{H}^{-2}\,; \qquad \mathrm{H} = \frac{\theta}{3}$$

Par antisymétrisation de $\pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta \langle \mathrm{A}_{\alpha\beta} \rangle^{\dot{}}$ il vient

$$\pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\omega}_{\alpha\beta} = \pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\mathrm{U}}_{[\alpha;\beta]} - \mathrm{A}_{[\mu|\gamma|}\mathrm{A}^\gamma{}_{\nu]}\,,$$

soit encore

$$\pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\omega}_{\alpha\beta} = \pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\mathrm{U}}_{[\alpha;\beta]} + 2\sigma^\gamma{}_{[\mu}\omega_{\nu]\gamma} - \frac{2\theta}{3}\omega_{\mu\nu}$$

On déduit de cette relation par contraction en $\omega^{\mu\nu}$

$$(\omega^2)^{\dot{}} = \omega^{\alpha\beta}\dot{\mathrm{U}}_{[\alpha;\beta]} - \frac{4\theta}{3}\omega^2 + 2\sigma^\gamma{}_\mu\omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\gamma}$$

Il est commode de définir un vecteur $2\omega^\alpha = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{U}_\beta\omega_{\gamma\delta}$, $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$: tenseur de Levi-Civita.

D'après la propriété $\omega_{\alpha\beta}\mathrm{U}^\beta = 0$ on a

$$\pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\omega}_{\alpha\beta} = \dot{\omega}_{\mu\nu} - \mathrm{U}_\mu\omega_{\nu\alpha}\dot{\mathrm{U}}^\alpha + \mathrm{U}_\nu\omega_{\mu\alpha}\dot{\mathrm{U}}^\alpha$$

puis

$$\pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\mathrm{U}}_{[\alpha;\beta]} = \dot{\mathrm{U}}_{[\mu;\nu]} + \mathrm{U}_{[\mu}\ddot{\mathrm{U}}_{\nu]} + \mathrm{U}^\alpha\dot{\mathrm{U}}_{\alpha;[\mu}\mathrm{U}_{\nu]}$$

Portant ces expressions dans celle de $\dot{\omega}^\alpha$ on trouve

$$2\dot{\omega}^\xi = \eta^{\xi\rho\mu\nu}\langle \dot{\mathrm{U}}_\rho\omega_{\mu\nu} \rangle + \eta^{\xi\rho\mu\nu}\mathrm{U}_\rho\left\langle \dot{\mathrm{U}}_{[\mu;\nu]} + 2\sigma^\gamma{}_{[\mu}\omega_{\nu]\gamma} - \frac{2\theta}{3}\omega_{\mu\nu} \right\rangle$$

Quelques transformations conduisent à la forme équivalente :

$$2(l^2\omega^\xi)^{\dot{}} = l^2\eta^{\xi\rho\mu\nu}\langle \dot{\mathrm{U}}_\rho\omega_{\mu\nu} + \mathrm{U}_\rho\{\dot{\mathrm{U}}_{[\mu;\nu]} + 2\sigma^\gamma{}_{[\mu}\omega_{\nu]\gamma}\}\rangle$$

dont la projection sur l'espace associé à $\vec{\mathrm{U}}$ s'écrit

$$\pi^\tau{}_\xi(l^2\omega^\xi)^{\dot{}} = \frac{l^2}{2}\eta^{\tau\rho\mu\nu}\mathrm{U}_\rho\dot{\mathrm{U}}_{\mu;\nu} + l^2\sigma^\tau{}_\xi\omega^\xi$$

Par un calcul similaire à celui utilisé dans le cas de l'antisymétrie on peut trouver

$$\pi_{(\mu}{}^\alpha\pi_{\nu)}{}^\beta\dot{\mathrm{A}}_{\alpha\beta} = \pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\mathrm{A}}_{(\alpha\beta)} = -\dot{\mathrm{U}}_\mu\dot{\mathrm{U}}_\nu + \pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\mathrm{U}}_{(\alpha;\beta)} - \mathrm{A}_{(\mu|\gamma|}\mathrm{A}^\gamma{}_{\nu)} + \mathrm{R}_{\mu\rho\sigma\nu}\mathrm{U}^\rho\mathrm{U}^\sigma$$

Or

$$\mathrm{A}_{(\mu|\gamma|}\mathrm{A}^\gamma{}_{\nu)} = \sigma_{\mu\gamma}\sigma^\gamma{}_\nu + \omega_{\mu\gamma}\omega^\gamma{}_\nu + \frac{2\theta}{3}\sigma_{\mu\nu} + \frac{\theta^2}{9}\pi_{\mu\nu}$$

En outre

$$\pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{A}_{(\alpha\beta)} = \pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{\dot{\theta}}{3}\pi_{\mu\nu}\,; \qquad \pi^{\alpha\beta}\dot{\sigma}_{\alpha\beta} = 0$$

Il vient

$$\pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{A}_{(\alpha\beta)} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}(\pi^{\alpha\beta}\dot{A}_{(\alpha\beta)}) = \pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \dot{\theta}\left(\frac{1}{3}\pi_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\right)$$

Le tenseur figurant au premier membre de cette relation est à trace nulle et dans le second membre on peut remplacer $\dot{\theta}$ conformément à l'équation de Raychaudhuri ce qui fournit la loi de propagation de $\sigma_{\alpha\beta}$ dans l'espace associé à $\vec{U}$.

On peut faire apparaître dans cette loi un terme spécial lié au tenseur de Weyl

$$C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} - 2g^{[\alpha}{}_{[\gamma}R^{\beta]}{}_{\delta]} + \frac{R}{3}g^{[\alpha}{}_{[\gamma}g^{\beta]}{}_{\delta]}\,.$$

Posant $\Psi \equiv C_{\mu\rho\nu\sigma}U^\rho U^\sigma$ on a

$$\Psi = \left\{ R_{\mu\rho\nu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}R_{\rho\nu} + \frac{1}{2}g_{\rho\nu}R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}g_{\rho\sigma}R_{\mu\nu} + \frac{R}{6}[g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}] \right\} U^\rho U^\sigma$$

En vertu des équations d'Einstein

$$R_{\alpha\beta}U^\beta = U_\alpha\left\{\frac{\chi}{2}(c^2rf + \mu\,|\,h\,|^2 + 2p) + \Lambda\right\}$$

d'où :

$$\Psi = R_{\mu\rho\nu\sigma}U^\rho U^\sigma - \pi_{\mu\nu}\left\langle \frac{\chi}{6}(c^2rf + 2p) + \frac{\Lambda}{3}\right\rangle + \frac{\chi\mu}{2}h_\mu h_\nu$$

Comme $-\,\omega_{\mu\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\nu} = \omega_\mu\omega_\nu - (\omega^\rho\omega_\rho)\pi_{\mu\nu}$; $\omega^\alpha\omega_\alpha = -\,\omega^2$ on obtient finalement :

$$\pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{\sigma}_{\alpha\beta} = -\,\dot{U}_\mu\dot{U}_\nu + \pi_\mu{}^\alpha\pi_\nu{}^\beta\dot{U}_{(\alpha;\beta)} - \sigma_{\mu\gamma}\sigma^{\gamma}{}_{\nu} + \omega_\mu\omega_\nu - \frac{2\theta}{3}\sigma_{\mu\nu} - \frac{\pi_{\mu\nu}}{3}\langle \nabla_\alpha(\dot{U}^\alpha) - 2\sigma^2 - \omega^2\rangle + \frac{\chi\mu}{2}\left\langle\frac{\pi_{\mu\nu}}{3}|\,h\,|^2 + h_\mu h_\nu\right\rangle - E_{\mu\nu}$$

avec $E_{\mu\nu} = C_{\mu\rho\nu\sigma}U^\rho U^\sigma$.

La multiplication par $\sigma^{\mu\nu}$ fournirait la quantité $(\sigma^2)^\cdot$ soit

$$(\sigma^2)^\cdot = -\,\sigma^{\alpha\beta}\dot{U}_\alpha\dot{U}_\beta + \sigma^{\alpha\beta}\dot{U}_{(\alpha;\beta)} - \sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\gamma}\sigma^{\gamma}{}_{\nu} + \sigma^{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta - \frac{4\theta}{3}\sigma^2 + \frac{\chi\mu}{2}(\sigma^{\alpha\beta}h_\alpha h_\beta) - (\sigma^{\alpha\beta}E_{\alpha\beta})\,.$$

L'identité de Ricci entraîne $g^{\alpha\gamma}\pi^{\mu\beta} \langle U_{\alpha;\beta;\gamma} - U_{\alpha;\gamma;\beta} - U^{\sigma}R_{\sigma\alpha\beta\gamma} \rangle = 0$ ou $\pi^{\mu\beta} \langle \nabla_{\gamma}(U^{\gamma}{}_{;\beta}) - \theta_{\beta} \rangle = 0$; $\theta_{\beta} \equiv \nabla_{\beta}\theta$ soit, en remplaçant $U_{\alpha;\beta}$ par

$$\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3}\pi_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \dot{U}_{\alpha}U_{\beta}$$

$$\pi^{\mu\beta}\left\langle \nabla_{\gamma}(\sigma^{\gamma}_{\cdot\beta} + \omega^{\gamma}_{\cdot\beta}) - \frac{2\theta_{\beta}}{3} + \dot{U}^{\gamma}(\sigma_{\beta\gamma} + \omega_{\beta\gamma}) \right\rangle = 0$$

ou équivalemment

$$\nabla_{\gamma}(\sigma^{\gamma\mu} + \omega^{\gamma\mu}) + 2(\sigma^2 - \omega^2)U^{\mu} - \frac{2}{3}\pi^{\mu\beta}\theta_{\beta} + (\sigma^{\mu}_{\cdot\gamma} + \omega^{\mu}_{\cdot\gamma})\dot{U}^{\gamma} = 0\,.$$

Puisque $U_{[\alpha;\beta;\gamma]} = 0$, $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}U_{[\alpha;\beta;\gamma]}U_{\delta} = 0$ soit en développant

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}U_{\delta} \langle \omega_{\alpha\beta;\gamma} + \dot{U}_{\alpha}U_{\beta;\gamma} \rangle = 0$$

On établit aisément les relations $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}U_{\delta}\dot{U}_{\alpha}U_{\beta;\gamma} = 2(\omega^{\alpha}\dot{U}_{\alpha})$

$$2\nabla_{\gamma}(\omega^{\gamma}) = \eta^{\gamma\delta\alpha\beta}\omega_{\delta\gamma}\omega_{\alpha\beta} - 2(\omega^{\alpha}\dot{U}_{\alpha}) + \eta^{\gamma\delta\alpha\beta}U_{\delta}\omega_{\alpha\beta;\gamma}$$

A l'aide de ces résultats et de la remarque $\omega_{\alpha\beta}\omega^{*\alpha\beta} = 0$

$$2\omega^{*\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta\rho\sigma}\omega_{\rho\sigma} = 2[\omega^{\alpha}U^{\beta} - \omega^{\beta}U^{\alpha}]$$

il vient

$$\nabla_{\alpha}(\omega^{\alpha}) + 2(\omega^{\alpha}\dot{U}_{\alpha}) = 0$$

Toujours d'après l'identité de Ricci écrite $Z_{\alpha\mu\nu} \equiv 2U_{\alpha;[\mu;\nu]} - U^{\sigma}R_{\sigma\alpha\mu\nu} = 0$ on a $U_{\rho}\eta_{(\dot{\alpha}}{}^{\rho\mu\nu}Z_{\beta)\mu\nu} = 0$.

Quelques réductions basées sur le calcul de

$$U_{\alpha;\mu;\nu} = \nabla_{\nu}\left\langle \sigma_{\alpha\mu} + \frac{\theta}{3}\pi_{\alpha\mu} + \omega_{\alpha\mu} + \dot{U}_{\alpha}U_{\mu} \right\rangle$$

conduisent à la formule

$$\eta_{\dot{\beta}}{}^{\rho\mu\nu}U_{\rho}U_{\alpha;\mu;\nu} = \eta_{\dot{\beta}}{}^{\rho\mu\nu}U_{\rho}\left\langle (\sigma_{\alpha\mu} + \omega_{\alpha\mu})_{;\nu} + \frac{g_{\alpha\mu}}{3}\theta_{\nu} \right\rangle + 2\left(\dot{U}_{\alpha} - \frac{\theta}{3}U_{\alpha}\right)\omega_{\beta}$$

On en déduit

$$4\dot{U}_{(\lambda}\omega_{\tau)} + 2\pi_{\lambda}{}^{\alpha}\pi_{\tau}{}^{\beta}U_{\rho}\eta_{(\alpha}{}^{\rho\mu\nu} \langle \sigma_{\beta)\mu;\nu} + \omega_{\beta)\mu;\nu} \rangle + \pi_{\lambda}{}^{\alpha}\pi_{\tau}{}^{\beta}U_{\rho}U^{\sigma}\eta_{(\alpha}{}^{\rho\mu\nu}R_{\beta)\sigma\mu\nu} = 0$$

Compte tenu des relations $R_{\alpha\beta}U^{\beta} = KU_{\alpha}$ le dernier terme peut être mis sous la forme $U_{\rho}U^{\sigma}\eta_{(\dot{\lambda}}{}^{\rho\mu\nu}R_{\tau)\sigma\mu\nu} = U_{\rho}U^{\sigma}\eta_{(\dot{\lambda}}{}^{\rho\mu\nu}C_{\tau)\sigma\mu\nu}$. Par conséquent en définissant $2H_{\lambda\tau} = U_{\rho}U^{\sigma}\eta_{(\dot{\lambda}}{}^{\rho\mu\nu}C_{\tau)\sigma\mu\nu}$ on a

$$H_{\lambda\tau} + 2\dot{U}_{(\lambda}\omega_{\tau)} + \pi_{\lambda}^{\alpha}\pi_{\tau}{}^{\beta}U_{\rho}\eta_{(\dot{\alpha}}{}^{\rho\mu\nu} \langle \sigma_{\beta)\mu;\nu} + \omega_{\beta)\mu;\nu} \rangle = 0$$

$H_{\lambda\tau}$ s'exprime aussi à l'aide du tenseur polaire à droite comme suit

$$H_{\lambda\tau} = -U^{\rho}U^{\sigma}R^{*}_{\rho(\lambda\tau)\sigma}\,; \qquad R^{*}_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{1}{2}\eta_{\cdot\cdot\rho\sigma}{}^{\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Les équations de conservation appliquées au tenseur

$$T_{\alpha\beta} = EU_\alpha U_\beta - \mathscr{P}\pi_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta \,; \quad E = c^2 rf + \frac{\mu}{2}|h|^2 - p \,; \quad \mathscr{P} = p + \frac{\mu}{2}|h|^2$$

fournissent entre autres la relation

$$\dot{E} + \theta \left\langle E + \mathscr{P} - \frac{\mu}{3}|h|^2 \right\rangle + \mu h^\alpha h^\beta \sigma_{\alpha\beta} = 0$$

L'évaluation du dernier terme découle des équations de Maxwell $\nabla_\beta[h^\alpha U^\beta - h^\beta U^\alpha] = 0$; ceci donne

$$\sigma_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta + \frac{2\theta}{3}|h|^2 + \frac{1}{2}(|h|^2)^{\cdot} = 0$$

Donc

$$\dot{E} - \frac{\mu}{2}(|h|^2)^{\cdot} + \theta \langle E + \mathscr{P} - \mu |h|^2 \rangle = 0$$

Signalons la décomposition suivante de $T_{\alpha\beta}$

$$T_{\alpha\beta} = (\rho U_\alpha U_\beta - p\pi_{\alpha\beta}) + M_{\alpha\beta} - \Pi_{\alpha\beta}$$

$$\rho = c^2 rf - p \,; \qquad M_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{2}|h|^2 U_\alpha U_\beta - \frac{\mu}{6}|h|^2 \pi_{\alpha\beta} \,;$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \mu \left\langle h_\alpha h_\beta + \frac{\pi_{\alpha\beta}}{3}|h|^2 \right\rangle \,; \qquad \Pi^{\alpha}_{\cdot\alpha} = 0 \,; \qquad \Pi_{\alpha\beta} U^\beta = 0 \,;$$

$$\Pi_{\alpha\beta} h^\beta = -\frac{4}{3}\mu |h|^2 h_\alpha \,; \qquad T^{\alpha\beta} = EU^\alpha U^\beta - P\pi^{\alpha\beta} - \Pi^{\alpha\beta} \,;$$

$$E = \rho + \frac{\mu}{2}|h|^2 \,; \qquad P = p + \frac{\mu}{6}|h|^2 \,;$$

$$\nabla_\beta(EU^\beta) + P\theta - U_\alpha \nabla_\beta(\Pi^{\alpha\beta}) = 0 \rightleftharpoons \nabla_\beta(EU^\beta) + P\theta + \Pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = 0$$

Les équations du mouvement sont enfin

$$(E + P)\dot{U}^\alpha - \pi^{\alpha\beta} P_\beta - \nabla_\beta(\Pi^{\alpha\beta}) - U^\alpha(\Pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}) = 0 \,; \qquad \Pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \mu\sigma_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta$$

III. LES TRAJECTOIRES DE $\vec{h}$.

Nous appliquerons maintenant les mêmes techniques à l'étude des trajectoires de $\vec{h}$.

Posons

$$\mathscr{A}_{\alpha\beta} = \pi_\alpha{}^\rho \pi_\beta{}^\sigma h_{\rho;\sigma} = \pi_\alpha{}^\rho \langle h_{\rho;\beta} - \dot{h}_\rho U_\beta \rangle$$

Une contraction par $\vec{U}$ de l'identité de Ricci en $\vec{h}$ nous donne

$$U^\gamma \langle h_{\alpha;\beta;\gamma} - h_{\alpha;\gamma;\beta} - h^\sigma R_{\sigma\alpha\beta\gamma} \rangle = 0$$

soit
$$\langle h_{\alpha;\beta} \rangle^{\cdot} - U^{\gamma}h_{\alpha;\gamma;\beta} - h^{\sigma}R_{\sigma\alpha\beta\gamma}U^{\gamma} = 0\,.$$
On en tire
$$(h^{\alpha}{}_{;\alpha})^{\cdot} - U^{\gamma}h^{\beta}{}_{;\gamma;\beta} + R_{\alpha\beta}h^{\alpha}U^{\beta} = 0$$

En vertu des équations d'Einstein $R_{\alpha\beta}U^{\beta} = KU_{\alpha}$; par conséquent $R_{\alpha\beta}h^{\alpha}U^{\beta} = 0$; il reste
$$\langle \nabla_{\beta}(h^{\beta}) \rangle^{\cdot} = U^{\gamma}\nabla_{\beta}\nabla_{\gamma}(h^{\beta}) = \nabla_{\beta}(\dot{h}^{\beta}) - h^{\beta;\alpha}U_{\alpha;\beta}$$
La relation se transcrit sous la forme
$$\langle \nabla_{\beta}(h^{\beta}) \rangle^{\cdot} = \nabla_{\beta}(\dot{h}^{\beta}) - \sigma_{\alpha\beta}h^{(\alpha;\beta)} - \frac{\theta}{3}\pi_{\alpha\beta}h^{(\alpha;\beta)} + \omega_{\alpha\beta}h^{[\alpha;\beta]} - h^{\beta;\alpha}\dot{U}_{\alpha}U_{\beta}\,;$$
$$\pi_{\alpha\beta}h^{(\alpha;\beta)} = \nabla_{\beta}(h^{\beta}) - U^{\beta}\dot{h}_{\beta}$$
Or les équations de Maxwell
$$\nabla_{\beta}[h^{\alpha}U^{\beta} - h^{\beta}U^{\alpha}] = 0 \rightleftarrows \dot{h}^{\alpha} + \theta h^{\alpha} - U^{\alpha}\nabla_{\beta}(h^{\beta}) - h^{\beta}U^{\alpha}{}_{;\beta} = 0$$
nous donnent $U_{\alpha}\dot{h}^{\alpha} - \nabla_{\beta}(h^{\beta}) = 0$. Donc
$$\langle \nabla_{\beta}(h^{\beta}) \rangle^{\cdot} = \nabla_{\beta}(\dot{h}^{\beta}) - \sigma_{\alpha\beta}h^{(\alpha;\beta)} + \omega_{\alpha\beta}h^{[\alpha;\beta]} - h^{(\alpha;\beta)}\dot{U}_{(\alpha}U_{\beta)} + h^{[\alpha;\beta]}\dot{U}_{[\alpha}U_{\beta]}$$
Portant dans $\dot{\mathscr{A}}_{\alpha\beta}$ la valeur de $\langle h_{\rho;\sigma} \rangle^{\cdot}$ il vient :
$$\begin{aligned}\dot{\mathscr{A}}_{\alpha\beta} = &- \dot{U}_{\alpha}U^{\rho}h_{\rho;\beta} - U_{\alpha}\dot{U}^{\rho}h_{\rho;\beta} + \dot{U}_{\alpha}U_{\beta}(U^{\rho}\dot{h}_{\rho}) + U_{\alpha}U_{\beta}(\dot{U}^{\rho}\dot{h}_{\rho}) - \dot{U}_{\beta}\dot{h}_{\alpha}\\ &- U_{\beta}(\dot{U}^{\rho}h_{\alpha;\rho}) + \dot{U}_{\beta}U_{\alpha}(U^{\rho}\dot{h}_{\rho}) + U_{\alpha}U_{\beta}(U^{\rho}\dot{U}^{\sigma}h_{\rho;\sigma})\\ &+ \pi_{\alpha}{}^{\rho}\pi_{\beta}{}^{\sigma}\langle \nabla_{\sigma}(\dot{h}_{\rho}) - h_{\rho;\gamma}U^{\gamma}{}_{;\sigma} + h^{\tau}R_{\tau\rho\sigma\gamma}U^{\gamma} \rangle\end{aligned}$$
On en déduit
$$\pi_{\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu}{}^{\beta}\dot{\mathscr{A}}_{\alpha\beta} = \pi_{\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu}{}^{\beta}\{ - \dot{U}_{\alpha}U^{\rho}h_{\rho;\beta} - \dot{h}_{\alpha}\dot{U}_{\beta} + \nabla_{\beta}(\dot{h}_{\alpha}) - h_{\alpha;\gamma}U^{\gamma}{}_{;\beta} + h^{\rho}R_{\rho\alpha\beta\sigma}U^{\sigma} \}$$
$$\pi^{\alpha\beta}\dot{\mathscr{A}}_{\alpha\beta} = \nabla_{\beta}(\dot{h}^{\beta}) - (h^{\beta;\gamma}U_{\gamma;\beta}) - (\dot{h}^{\beta}U_{\beta})^{\cdot}$$
Par antisymétrisation en μ et ν
$$\begin{aligned}\pi_{[\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu]}{}^{\beta}\dot{\mathscr{A}}_{\alpha\beta} &= \pi_{\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu}{}^{\beta}\dot{\mathscr{A}}_{[\alpha\beta]}\\ &= \pi_{[\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu]}{}^{\beta}\{ - \dot{U}_{\alpha}U^{\rho}h_{\rho;\beta} - \dot{h}_{\alpha}\dot{U}_{\beta} + \dot{h}_{\alpha;\beta} - h_{\alpha;\gamma}U^{\gamma}{}_{;\beta} + h^{\rho}R_{\rho\alpha\beta\sigma}U^{\sigma} \}\end{aligned}$$
Par ailleurs, en calculant $\dot{\mathscr{A}}_{\alpha\beta}$ à partir de
$$\mathscr{A}_{\alpha\beta} = h_{\alpha;\beta} - U_{\alpha}U^{\rho}h_{\rho;\beta} - \dot{h}_{\alpha}U_{\beta} + U_{\alpha}U_{\beta}(U^{\rho}\dot{h}_{\rho})$$
on trouve
$$\pi_{\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu}{}^{\beta}\dot{\mathscr{A}}_{[\alpha\beta]} = \pi_{\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu}{}^{\beta}\langle \{ h_{[\alpha;\beta]} \}^{\cdot} - \dot{U}_{[\alpha}h_{|\rho|;\beta]}U^{\rho} - \dot{h}_{[\alpha}\dot{U}_{\beta]} \rangle$$
D'où en égalant les deux expressions
$$\pi_{\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu}{}^{\beta}\langle h_{[\alpha;\beta]} \rangle^{\cdot} = \pi_{\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu}{}^{\beta}\{ \dot{h}_{[\alpha;\beta]} - h_{[\alpha;|\gamma|}U^{\gamma}{}_{;\beta]} + h^{\rho}R_{\rho[\alpha\beta]\sigma}U^{\sigma} \}$$
Mais
$$\begin{aligned}\pi_{\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu}{}^{\beta}h^{\rho}R_{\rho[\alpha\beta]\sigma}U^{\sigma} &= -\frac{1}{2}\pi_{\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu}{}^{\beta}h^{\rho}U^{\sigma}R_{\rho\sigma\alpha\beta}\\ &= -\frac{1}{2}h^{\rho}U^{\sigma}\langle R_{\rho\sigma\mu\nu} + U^{\alpha}R_{\rho\sigma\alpha[\mu}U_{\nu]} \rangle\end{aligned}$$
$$- \pi_{\mu}{}^{\alpha}\pi_{\nu}{}^{\beta}h_{[\alpha;|\gamma|}U^{\gamma}{}_{;\beta]} = U^{\gamma}{}_{;[\mu}h_{\nu];\gamma} - U_{[\mu}h_{\nu];\gamma}\dot{U}^{\gamma} + U_{[\mu}U^{\gamma}{}_{;\nu]}U^{\alpha}h_{\alpha;\gamma}$$

Soit en développant les deux premiers termes

$$- \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta h_{[\alpha;|\gamma|} U^\gamma{}_{;\beta]}$$

$$= \langle \sigma^\gamma_{\cdot[\mu} + \omega^\gamma_{\cdot[\mu} \rangle h_{\nu];\gamma} - \frac{\theta}{3} h_{[\mu;\nu]} + \frac{\theta}{3} \dot{h}_{[\mu} U_{\nu]} - h^\alpha U_{\alpha;\gamma} U_{[\mu} U^\gamma{}_{;\nu]}$$

Il reste finalement

$$\pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \langle h_{[\alpha;\beta]} \rangle^{\boldsymbol{\cdot}} = \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \dot{h}_{[\alpha;\beta]} + \langle \sigma^\gamma_{\cdot[\mu} + \omega^\gamma_{[\mu} \rangle h_{\nu];\gamma} - \frac{\theta}{3} h_{[\mu;\nu]} + \frac{\theta}{3} \dot{h}_{[\mu} U_{\nu]}$$
$$- h^\alpha U_{\alpha;\gamma} U_{[\mu} U^\gamma{}_{;\nu]} - \frac{1}{2} h^\rho U^\sigma \langle R_{\rho\sigma\mu\nu} + U^\alpha R_{\rho\sigma\alpha[\mu} U_{\nu]} \rangle$$

D'autre part $\dot{\mathscr{A}}_{[\alpha\beta]} = \langle \dot{\pi}_\alpha{}^\rho \pi_\beta{}^\sigma + \pi_\alpha{}^\rho \dot{\pi}_\beta{}^\sigma \rangle h_{[\rho;\sigma]} + \pi_\alpha{}^\rho \pi_\beta^\sigma \langle h_{[\rho;\sigma]} \rangle^{\boldsymbol{\cdot}}$ donc

$$\pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \dot{\mathscr{A}}_{[\alpha\beta]} = 2\pi^\sigma{}_{[\mu} \dot{U}_{\nu]} U^\rho h_{[\rho;\sigma]} + \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \langle h_{[\alpha;\beta]} \rangle^{\boldsymbol{\cdot}}$$

Ce qui relie les lois de propagation de $h_{[\alpha;\beta]}$ et $\mathscr{A}_{[\alpha\beta]}$.

Un calcul analogue aboutit, dans le cas de symétrisation, à la formule

$$\pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \langle h_{(\alpha;\beta)} \rangle^{\boldsymbol{\cdot}} = \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \dot{h}_{(\alpha;\beta)} - \langle \sigma^\gamma_{\cdot(\mu} + \omega^\gamma_{\cdot(\mu} \rangle h_{\nu);\gamma} - \frac{\theta}{3} \langle h_{(\mu;\nu)} - \dot{h}_{(\mu} U_{\nu)} \rangle$$
$$- h^\alpha U_{\alpha;\gamma} \left\langle \sigma^\gamma{}_{(\mu} + \frac{\theta}{3} \pi^\gamma{}_{(\mu} + \omega^\gamma_{\cdot(\mu} \right\rangle U_{\nu)} + h^\rho U^\sigma \langle R_{\rho(\mu\nu)\sigma} - U_{(\mu} R_{\nu)\sigma\rho\alpha} U^\alpha \rangle$$

Puis $\pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \dot{\mathscr{A}}_{(\alpha\beta)} = - 2\pi^\sigma{}_{(\mu} \dot{U}_{\nu)} h_{(\rho;\sigma)} U^\rho + \pi_\mu{}^\alpha \pi_\nu{}^\beta \langle h_{(\alpha;\beta)} \rangle^{\boldsymbol{\cdot}}$.

D'après l'identité de Ricci nous avons

$$g^{\alpha\gamma} \pi^{\mu\beta} \langle h_{\alpha;\beta;\gamma} - h_{\alpha;\gamma;\beta} - h^\sigma R_{\sigma\alpha\beta\gamma} \rangle = 0\,,$$
$$\pi^{\mu\beta} \langle \nabla_\gamma(h^\gamma{}_{;\beta}) - \nabla_\beta[\nabla_\nu(h^\nu)] - R_{\beta\sigma} h^\sigma \rangle = 0\,.$$

Or $\vec{h}$ est un vecteur propre du tenseur de Ricci

$$R_{\beta\sigma} h^\sigma = L h_\beta\,; \qquad 2L = \chi(\mu\,|\,h\,|^2 - c^2 rf + 2p) + 2\Lambda$$

Par conséquent $\pi^\mu{}_\beta \langle \nabla_\gamma(h^{\gamma;\beta}) - \nabla^\beta(h^\nu{}_{;\nu}) \rangle = L h^\mu$.

Tout vecteur $\vec{X}$ satisfaisant la relation $X_{[\alpha;\beta;\gamma]} = 0$, on a :

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{\alpha;\beta;\gamma} h_\delta = 0$$

Introduisons le vecteur $2\Omega^\alpha = \eta^{\alpha\beta\mu\nu} h_\beta h_{[\mu;\nu]}\,|\,h\,|^{-1}\,; \Omega^\alpha h_\alpha = 0$. Par inversion $h_{[\mu;\nu]} = \eta_{\mu\nu\rho\sigma} \Omega^\rho h^\sigma\,|\,h\,|^{-1}$.

$$2\nabla_\alpha(\,|\,h\,|\,\Omega^\alpha) + \eta^{\alpha\beta\mu\nu} h_{[\alpha;\beta]} h_{[\mu;\nu]} = 0 \rightleftarrows \nabla_\alpha(\,|\,h\,|\,\Omega^\alpha) + h_{[\alpha;\beta]} h^{*[\alpha;\beta]} = 0$$

Dans l'équation

$$2h_\rho \eta_{(\alpha}{}^{\rho\mu\nu} h_{\beta);\mu;\nu} + h_\rho h^\sigma \eta_{(\alpha}{}^{\rho\mu\nu} R_{\beta)\sigma\mu\nu} = 0$$

qui est une conséquence directe de l'identité de Ricci, il est commode de faire apparaitre le tenseur polaire à droite :

$$2R^*{}_{\alpha\beta\rho\sigma} = \eta_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

il vient alors

$$2h_\rho \eta_{(\dot{\alpha}}{}^{\rho\mu\nu} h_{\beta);\mu;\nu} - 2h^\rho h^\sigma \mathrm{R}^*{}_{\rho(\alpha\beta)\sigma} = 0$$

Par projection dans l'espace associé à $\vec{\mathrm{U}}$ et développement du second terme :

$$\pi_\lambda{}^\alpha \pi_\tau{}^\beta h_\rho \eta_{(\dot{\alpha}}{}^{\rho\mu\nu} h_{\beta);\mu;\nu} = h^\rho h^\sigma \langle \mathrm{R}^*{}_{\sigma(\lambda\tau)\rho} - \mathrm{U}_\tau \mathrm{U}^\beta \mathrm{R}^*{}_{\sigma(\lambda\beta)\rho} - \mathrm{U}_\lambda \mathrm{U}^\beta \mathrm{R}^*{}_{\sigma(\beta\tau)\rho} + \mathrm{U}_\lambda \mathrm{U}_\tau \mathrm{U}^\alpha \mathrm{U}^\beta \mathrm{R}^*{}_{\sigma(\alpha\beta)\rho} \rangle$$

Soit en définissant $\Phi^*{}_{\alpha\beta} = \mathrm{R}^*{}_{\alpha\beta\mu\nu} \mathrm{U}^{[\mu} h^{\nu]}$; $^*\Phi_{\mu\nu} = \mathrm{R}^*{}_{\alpha\beta\mu\nu} \mathrm{U}^{[\alpha} h^{\beta]}$

$$\pi_\lambda{}^\alpha \pi_\tau{}^\beta h_\rho \eta_{(\dot{\alpha}}{}^{\rho\mu\nu} h_{\beta);\mu;\nu} = h^\sigma \mathrm{R}^*{}_{\sigma(\lambda\tau)\rho} h^\rho - h^\rho \Phi^*{}_{\rho(\lambda} \mathrm{U}_{\tau)} + \mathrm{U}_{(\lambda} {}^*\Phi_{\tau)\rho} h^\rho + \mathrm{U}_\lambda \mathrm{U}_\tau (h^\alpha \mathrm{U}^\beta \Phi^*{}_{\alpha\beta})$$

Le tenseur polaire à gauche $2^*\mathrm{R}_{\alpha\beta\rho\sigma} = \eta_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} \mathrm{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ est lié au tenseur polaire à droite par l'égalité $^*\mathrm{R}_{\alpha\beta\rho\sigma} = \mathrm{R}^*{}_{\rho\sigma\alpha\beta}$. On en déduit $h^\alpha \mathrm{U}^\beta \Phi^*{}_{\alpha\beta} = {}^*\Phi_{\alpha\beta} \mathrm{U}^\beta h^\alpha$ puis

$$h^\rho \{ \mathrm{U}_{(\lambda} {}^*\Phi_{\tau)\rho} - \Phi^*{}_{\rho(\lambda} \mathrm{U}_{\tau)} \} = \frac{h^\rho}{2} \langle \mathrm{U}_\lambda ({}^*\mathrm{R}_{\tau\rho\alpha\beta} + \mathrm{R}^*{}_{\tau\rho\alpha\beta}) + \mathrm{U}_\tau ({}^*\mathrm{R}_{\lambda\rho\alpha\beta} + \mathrm{R}^*{}_{\lambda\rho\alpha\beta}) \rangle \mathrm{U}^\alpha h^\beta$$

Remarquant en outre que

$$h^\rho h^\sigma \mathrm{R}^*{}_{\rho(\lambda\tau)\sigma} = \frac{h^\rho h^\sigma}{2} ({}^*\mathrm{R}_{\sigma\lambda\tau\rho} + \mathrm{R}^*{}_{\sigma\lambda\tau\rho})$$

on a

$$\pi_\lambda{}^\alpha \pi_\tau{}^\beta h_\rho \eta_{(\dot{\alpha}}{}^{\rho\mu\nu} h_{\beta);\mu;\nu} = \frac{1}{2} h^\rho \hat{\mathrm{R}}_{\rho\lambda\tau\sigma} h^\sigma + h^\rho \mathrm{U}^\alpha h^\beta \mathrm{U}_{(\lambda} \hat{\mathrm{R}}_{\tau)\rho\alpha\beta} + \frac{\mathrm{U}_\lambda \mathrm{U}_\tau}{2} h^\alpha \mathrm{U}^\beta (\hat{\mathrm{R}}_{\alpha\beta\rho\sigma}) \mathrm{U}^\rho h^\sigma$$

avec $\hat{\mathrm{R}}_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv {}^*\mathrm{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \mathrm{R}^*{}_{\alpha\beta\mu\nu}$.

RÉFÉRENCES

[1] G. F. R. ELLIS, Relativistic Cosmology in *General relativity and cosmology*, edited by R. K. Sachs, p. 104-170, Int. School of Physics Enrico Fermi, course XL.

[2] A. LICHNEROWICZ, Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Section A, Vol. V, n° 1, 1966, p. 37-75.

(Manuscrit reçu le 7 mars 1975).